

УДК 621.391

## Методика получения ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей с улучшенными автокорреляционными функциями

Жук А. П., Стогний К. В., Копытов В. В., Макаров И. В.

**Постановка задачи:** для повышения структурной скрытности систем передачи информации с кодовым разделением необходимо обеспечить увеличение количества ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей. Известно, что на основе рассмотрения собственных векторов симметрических матриц возможно получить ансамбли дискретных ортогональных кодовых последовательностей. Однако увеличение их числа может привести к тому, что не все из них будут удовлетворять заданным требованиям по корреляционным характеристикам. Поэтому необходимо разработать методику получения увеличенного количества ансамблей ортогональных кодовых последовательностей, удовлетворяющих требованиям по корреляционным характеристикам. **Цель работы:** разработать методику получения множества новых ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей различной размерности (4, 8 и 16) на основе рассмотрения собственных векторов симметрических матриц, удовлетворяющих требуемым корреляционным характеристикам и превосходящих по показателю максимального бокового пика автокорреляционной функции известные последовательности Уолша и D-кодов Велти. **Новизна:** в соответствии с условием получения ортонормированного базиса  $n$ -го порядка определяются значения диагональных коэффициентов базовой симметрической матрицы, рассчитываются ее собственные числа и определяется матрица ортогональных собственных векторов, каждая строка которой описывает ортогональную кодовую последовательность ансамбля. На этой основе устанавливается число ансамблей ортогональных кодовых последовательностей с автокорреляционными функциями, обладающих наименьшими максимальными боковыми пиками, и устанавливается зависимость значений максимальных боковых пиков от возможных вариантов коэффициентов базовой симметрической матрицы. **Результат:** получены новые ансамбли двоичных ортогональных кодовых последовательностей, обладающих автокорреляционными функциями с максимальным боковым пиком, не превышающим допустимого значения. Установлено, что наименьшие значения максимальных боковых пиков автокорреляционной функции достигаются при отсутствии симметрии в знаках между левыми и правыми крайними коэффициентами базовой симметрической матрицы, в независимости от знака центрального коэффициента.

**Ключевые слова:** симметрические матрицы, ортогональные матрицы, кодовые последовательности, структурная скрытность, собственные векторы, автокорреляционная функция.

### Актуальность

Для обеспечения информационного обмена в системах передачи информации с кодовым разделением каналов используются два вида последовательностей:

---

#### Библиографическая ссылка на статью:

Жук А. П., Стогний К. В., Копытов В. В., Макаров И. В. Методика получения ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей с улучшенными автокорреляционными функциями // Системы управления, связи и безопасности. 2025. № 1. С. 48-78. DOI: 10.24412/2410-9916-2025-1-048-078

#### Reference for citation:

Zhuk A. P., Stogniy K. V., Kopytov V. V., Makarov I. V. Methodology for obtaining ensembles of discrete orthogonal code sequences with improved autocorrelation functions. *Systems of Control, Communication and Security*, 2025, no. 1, pp. 48-78 (in Russian). DOI: 10.24412/2410-9916-2025-1-048-078

псевдослучайные коды максимальной длины на основе регистров сдвига, предназначенные для скремблирования, и короткие ортогональные коды, представляющие собой ансамбли двоичных ортогональных кодовых последовательностей (АДОКП), предназначенные для разделения каналов с последующим расширением спектра.

В работах [1-5] с целью повышения структурной скрытности систем передачи информации с кодовым разделением каналов для противодействия угрозе подмены сообщений доказана необходимость увеличения количества используемых ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей. Однако увеличение количества ансамблей ортогональных кодовых последовательностей может привести к тому, что не все из них будут удовлетворять заданным требованиям к их автокорреляционным функциям (АКФ). С учетом изложенного существует задача разработки методики получения увеличенного количества ансамблей ортогональных кодовых последовательностей, удовлетворяющих требованиям к их автокорреляционным функциям.

В работах [6-8] показано, что получение увеличенного количества ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей возможно на основе рассмотрения собственных векторов симметрических матриц, поскольку собственные векторы таких матриц, относящиеся к различным собственным числам, ортогональны между собой. Полученные таким образом собственные векторы симметрической матрицы могут быть представлены ортонормированным базисом, описывающим ансамбль дискретных ортогональных кодовых последовательностей.

В работах [9-11] доказано, что значения коэффициентов базовой симметрической матрицы определяют значения амплитуд и знаков её собственных векторов. Поэтому при условии выбора необходимых значений модулей диагональных коэффициентов симметрических матриц можно задать двухуровневые матрицы собственных векторов, а используя перебор знаков у диагональных коэффициентов симметрических матриц, можно осуществить перебор различных вариантов их собственных векторов и с учетом требований к их АКФ осуществить выбор необходимых вариантов ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей. Количество возможных вариантов АДОКП, получаемых на основе перебора знаков коэффициентов базовой симметрической матрицы, существенным образом возрастает с ростом порядка матрицы, который определяет размерность  $N$  получаемых таким образом последовательностей. Поэтому по мнению авторов, необходимо провести численные эксперименты для малых размерностей АДОКП ( $N = 4, 8$  и  $16$ ), выяснить возможность существования искомых ансамблей, удовлетворяющих требованиям по АКФ, а также установить зависимость количества АДОКП с требуемыми АКФ от их размерности  $N$ .

Цель работы состоит в том, чтобы на основе рассмотрения собственных векторов симметрических матриц разработать методику получения множества новых ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей размерностей

( $N = 4, 8$  и  $16$ ), удовлетворяющих требуемым корреляционным характеристикам и превосходящих по показателю максимального бокового пика автокорреляционной функции известные последовательности Уолша и  $D$ -кодов Велти.

Анализ возможных подходов к достижению поставленной цели показал, что разрабатываемая методика должна включать следующие основные этапы.

1. Определение ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей и их автокорреляционных функций на основе симметрической матрицы 4-го порядка.
2. Определение ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей и их автокорреляционных функций на основе симметрической матрицы 8-го порядка.
3. Определение ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей и их автокорреляционных функций на основе симметрической матрицы 16-го порядка.
4. Сравнительный анализ максимальных боковых пиков автокорреляционных функций ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей на основе симметрических матриц 4, 8 и 16-ого порядков.

Основными задачами, решаемыми на 1 – 3 этапах методики являются:

- а) определение численных значений модулей диагональных коэффициентов симметрической матрицы 4, 8 и 16-го порядка, при которых ортогональная матрица её собственных векторов будет иметь равные по модулю численные значения их координат;
- б) перебор возможных вариантов знаков диагональных коэффициентов симметрической матрицы 4, 8 и 16-го порядка с целью получения всех возможных по своей структуре АДОКП размерности  $N = 4, 8$  и  $16$ ;
- в) определение автокорреляционных функций полученных АДОКП размерности  $N = 4, 8$  и  $16$  и сравнение максимальных боковых пиков АКФ с максимальными боковыми пиками АКФ известных последовательностей Уолша и  $D$ -кодов Велти и его допустимым значением.

### Математическая постановка задачи

Для формальной постановки и решения задачи в работе введены обозначения, представленные в таблице 1.

Таблица 1 – Обозначения

Обозначение	Физический смысл обозначения
$H_n$	– симметрическая матрица порядка $n$
$\lambda$	– собственное число матрицы $H_n$
$E$	– единичная матрица
$tr(H)$	– след матрицы $H$

Обозначение	Физический смысл обозначения
$A_{Уолша\ N}$	– матрица ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей Уолша $N$ -й разрядности
$A_{D-кодов\ N}$	– матрица ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей $D$ -кодов Велти $N$ -й разрядности
$A_n$	– матрица ортогональных собственных векторов порядка $n$
$R(\tau)$	– автокорреляционная функция кодовой последовательности
$R_{\max}(\tau)$	– значение максимальных боковых пиков АКФ кодовой последовательности
$R_{\text{доп}}(\tau) = 1/\sqrt{N}$	– допустимое значение максимальных боковых пиков АКФ кодовой последовательности размерности $N$
$R_{\max\ \text{новых}}(\tau)$	– значение максимальных боковых пиков АКФ новых ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей

На формальном уровне постановка задачи исследования имеет следующий вид.

Дано:  $A_{Уолша\ N}$  – матрица ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей Уолша  $N$ -й размерности;  $A_{D-кодов\ N}$  – матрица ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей  $D$ -кодов Велти  $N$ -й размерности  $N=4, 8, 16$ ;  $H_n$  – симметрическая матрица  $n$ -го порядка ( $n = 4, 8, 16$ );  $R_{\text{доп}}(\tau) = 1/\sqrt{N}$  – допустимое значение максимальных боковых пиков АКФ кодовой последовательности размерности  $N$ .

Найти: множество  $\{A_n\}$  новых матриц ортогональных собственных векторов размерности  $N = 4, 8, 16$ , удовлетворяющих требованию к автокорреляционным свойствам  $R_{\max\ \text{новых}}(\tau) \leq R_{\text{доп}}(\tau) = 1/\sqrt{N}$ , т.е. обладающих, значениями максимальных боковых пиков АКФ не превышающими допустимого значения  $1/\sqrt{N}$ .

## 1. Определение ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей и их автокорреляционных функций на основе симметрической матрицы 4-го порядка

### 1.1. Определение ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей на основе симметрической матрицы 4-го порядка

Для получения АДОКП  $A_n$  на основе симметрической матрицы  $H_n$ , где  $n$  это порядок матрицы, необходимо вычислить собственные векторы матрицы  $H_n$  для каждого собственного числа  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  [12-14].

В общем виде собственным вектором матрицы  $H$  называют такой ненулевой вектор  $X$  что

$$Hx = \lambda x, \tag{1}$$

где:  $\lambda$  – собственное число матрицы  $H$ .

Собственные числа матрицы  $H$  определяются как корни определителя  $P_H(\lambda)$ , называемого характеристическим полиномом, или характеристическим уравнением матрицы  $H$

$$P_H(\lambda) = \det |H - \lambda E| = 0, \tag{2}$$

где:  $E$  – единичная матрица.

Отметим, что характеристический полином матрицы  $H$  имеет следующие свойства [1]:

- 1) коэффициент при  $\lambda^n$  равен  $(-1)^n$ ;
- 2) свободный член равен  $\det(H)$ ;
- 3) коэффициент при  $\lambda^{n-1}$  равен  $(-1)^{n-1} \cdot \text{tr}(H)$ , где  $\text{tr}(H)$  является следом матрицы  $H$ ;
- 4) уравнение  $n$ -й степени  $|H - \lambda E| = 0$  имеет  $n$  корней.

Полученные на основе симметрических матриц собственные векторы вида

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

могут быть представлены ортонормированным базисом

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Поскольку программы для расчетов собственных векторов представляют результат их вычисления по столбцам, а для моделирования ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей необходимо их рассматривать по строкам, то далее в статье все матрицы собственных векторов будут представлены в транспонированном виде, т.е. построчно.

Ортонормированный базис представляет собой подмножество попарно ортогональных нормированных базисных векторов. Для любых элементов этого подмножества скалярное произведение будет равно символу Кронекера [14]

$$\varphi_i \cdot \varphi_j = \delta_{i,j}, \tag{4}$$

где:  $\varphi_i$  –  $i$ -й нормированный базисный вектор;  $\varphi_j$  –  $j$ -й нормированный базисный вектор;  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера.

Конкретизируем в соответствии с выражениями (1)-(4) методику получения ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей размерности  $N = 4$  на основе симметрической матрицы 4-го порядка ( $n = 4$ ).

Рассмотрим базовую симметрическую матрицу 4-го порядка с двумя боковыми диагоналями. Такая матрица может быть задана тремя диагональными коэффициентами  $\{a_1, a_2, a_3\}$  следующим образом [15, 16]:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Характеристический полином матрицы (5), позволяющий найти ее собственные числа и векторы, представляет собой полиномиальное уравнение 4-й степени, которое согласно (2) выглядит следующим образом:

$$\det(H_4 - \lambda E) = \lambda^4 - \lambda^3 \text{tr}H_4 + \lambda^2 - \Omega\lambda + \det H_4, \quad (6)$$

где:  $\text{tr}H_4$  – след матрицы (сумма элементов главной диагонали) матрицы (5);  $\Omega$  – коэффициент, определяемый как сумма миноров элементов, стоящих на главной диагонали матрицы (5).

На основании характеристического полинома (6) можно определить его корни, которые будут являться собственными числами  $\lambda_n$  матрицы  $H_n$ .

На основе собственных чисел  $\lambda_n$  матрицы  $H_n$  имеется возможность в соответствии с (3) определить одним из известных методов [12-14] собственные векторы.

В работе [17] установлено, что обязательным условием получения ортонормированного базиса  $n$ -го порядка является то, что нечетные собственные числа рассматриваемых матриц должны стремиться по своему значению к модулям диагональных коэффициентов в нечетных строках эрмитовых матриц по мере возрастания их порядкового номера в диагонали, а четные собственные числа рассматриваемых матриц должны стремиться по своему значению к модулям диагональных коэффициентов в четных строках матриц по мере возрастания их порядкового номера в диагонали, которые в свою очередь должны стремиться к нулю:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{2n-1} = |a_1| = |a_3| = \dots = |a_{2n-1}| \rightarrow a, \\ \lambda_2 = \lambda_4 = \dots = \lambda_{2n} = |a_2| = |a_4| = \dots = |a_{2n}| \rightarrow 0. \end{cases} \quad (7)$$

С учетом условия (7) авторами статьи было установлено, что значениями диагональных коэффициентов симметрической матрицы вида (5), позволяющими получить ортонормированный базис двухуровневых собственных векторов со значениями 0,5 и  $-0,5$ , являются значения  $a_1 = a_3 = 100$ ;  $a_2 = 0,01$ , а сама матрица  $A_4^{000}$  ортогональных собственных векторов будет иметь вид

$$A_4^{000} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Каждая строка матрицы (8) представляет собой собственный вектор матрицы  $A_4^{000}$ , которым описывается кодовая последовательность из состава ортогонального ансамбля, количество которых в данном случае равно четырем. Анализ матрицы (8) показывает, что она представляет собой ортонормированную матрицу Уолша 4-го порядка [17-19]. Обозначение верхними индексами «000» матрицы  $A_4^{000}$  с означает, что матрица собственных векторов получена из симметрической матрицы (5), в соответствии с уравнением (3), все три коэффициента которой положительные числа. Отрицательные коэффициенты матрицы в обозначении индексов будем обозначать значением 1 на индексе соответствующего диагонального коэффициента матрицы. Например, для случая  $a_1 = a_3 = 100$ ;  $a_2 = -0,01$ , когда второй диагональный коэффициент имеет отрицательное значение, матрицу обозначим как  $A_4^{010}$ .

Для расширения получаемых ортогональных матриц при использовании данного подхода существует возможность изменять знаки на коэффициентах базовой симметрической матрицы (5), при этом при различных вариантах знаков у диагональных коэффициентов получаются различные виды ортогональных матриц собственных векторов с различными автокорреляционными свойствами.

## 1.2. Определение автокорреляционных функций ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей 4-го порядка

Автокорреляционная функция для кодовой последовательности описывает степень схожести между кодовой последовательностью (сигналом) и сдвинутой во времени его копией от величины временного сдвига и вычисляется по формуле [18]

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t - \tau) dt, \quad (9)$$

где:  $\tau$  – величина временного сдвига сигнала (кодовой последовательности),  $f^*$  – комплексно-сопряженный элемент к функции  $f$  [14].

Важным свойством кодовой последовательности, обеспечивающим надежную синхронизацию в процессе передачи данных, является наличие у нее «хороших» автокорреляционных свойств, под которым понимается, что её АКФ должны иметь «малые» максимальные боковые пики, т.е. они должны стремиться к нулю [18, 20]. Однако получение нулевых пиков АКФ невозможно, если кодовая последовательность имеет отличные от нуля элементы, поскольку при временных сдвиге

гах в процессе расчета АКФ лишь только при последнем сдвиге для кодовой последовательности всегда даст отличный от нуля результат [21, 22]. Наилучшими автокорреляционными свойствами обладают последовательности Баркера, при этом следует отметить, что они являются одиночными и не представляют собой ансамбль ортогональных кодовых последовательностей. Уровень максимальных боковых пиков АКФ у последовательностей Баркера равен  $R_{\text{макс БП}}(\tau) = 1/N$  [21]. Для случая  $N=7$  АКФ последовательностей Баркера иллюстрируются на рис. 1.

Поскольку последовательности Баркера представляют собой одиночные последовательности, то это обстоятельство не позволяет использовать их в системах передачи информации с кодовым разделением каналов, в связи с тем, что для обеспечения возможности их применения необходима не одиночная кодовая последовательность, а ансамбль в виде набора ортогональных кодовых последовательностей [23-28].

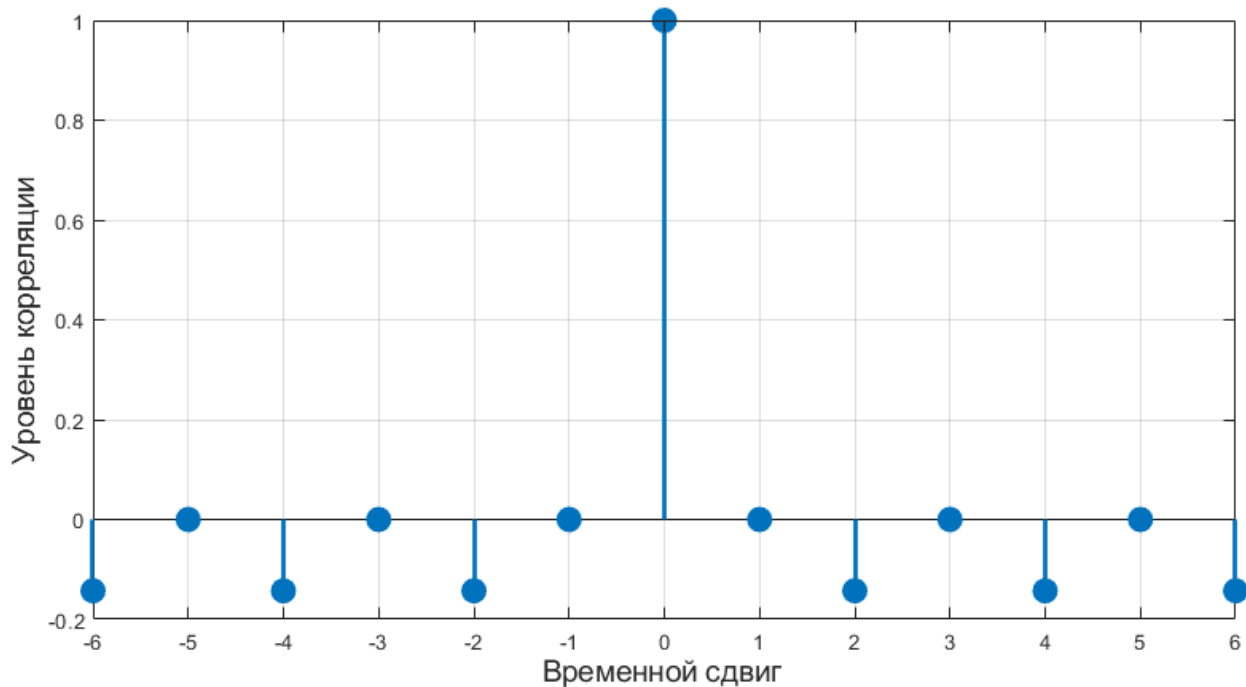


Рис. 1. Автокорреляционная функция последовательности Баркера для  $N = 7$

В работе [20] установлен критерий оценки АКФ для ансамблей ортогональных кодовых последовательностей, где определено, что «хорошими» автокорреляционными свойствами будут обладать те ансамбли, значения максимальных боковых пиков АКФ которых не превышают значения  $1/\sqrt{N}$ , где  $N$  – разрядность кодовых последовательностей ансамбля

$$R_{\text{макс}}(\tau) \leq 1/\sqrt{N}. \tag{10}$$

Для выявления ортогональных кодовых последовательностей, получаемых на основе собственных векторов симметрических матриц, обладающих наименьшими максимальными боковыми пиками АКФ, выполним полный перебор всех



возможных комбинаций знаков диагональных коэффициентов симметрических матриц  $H_4$ . Поскольку во второй диагонали симметрической матрицы  $H_4$  вида (5) имеем три диагональных коэффициента, то возможных комбинаций знаков у этих коэффициентов будет  $2^3 = 8$ . Таким образом, авторами получены 8 вариантов ортогональных кодовых последовательностей, причем 4 из полученных ансамблей являются последовательностями Уолша с различным упорядочиванием строк, а другие четыре являются последовательностями  $D$ -кодов Велти [18] с различным упорядочиванием строк, представленные в таблице 2.

Таблица 2 – Варианты кодовых последовательностей, получаемых на основе симметрической матрицы  $H_4$  вида (5)

Последовательности Уолша	$D$ -коды Велти
$A_4^{000} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$	$A_4^{001} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$
$A_4^{010} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$	$A_4^{011} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$
$A_4^{101} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$	$A_4^{100} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$
Последовательности Уолша	$D$ -коды Велти
$A_4^{111} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$	$A_4^{110} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$

Анализ полученных вариантов ансамблей ортогональных кодовых последовательностей показывает, что при симметрично расположенных знаках крайних диагональных коэффициентов базовой симметрической матрицы (5) независимо от того, какой будет знак у среднего диагонального коэффициента этой матрицы

(случаи  $H_4^{000}$ ,  $H_4^{010}$ ,  $H_4^{101}$ ,  $H_4^{111}$ ) их собственные векторы будут представлять собой структуру, соответствующую ортогональным кодовым последовательностям Уолша с разным их упорядочиванием по строкам в составе ансамбля. При ассиметрично расположенных знаках крайних диагональных коэффициентов базовой симметрической матрицы (5) независимо от того, какой будет знак у среднего диагонального коэффициента этой матрицы (случаи  $H_4^{001}$ ,  $H_4^{011}$ ,  $H_4^{100}$ ,  $H_4^{110}$ ) их собственные векторы будут представлять собой структуру, соответствующую ортогональным последовательностям  $D$ -кодов Велти с разным их упорядочиванием по строкам в составе ансамбля [29-31].

При исследовании зависимости значений максимальных боковых пиков АКФ от возможных вариантов знаков коэффициентов базовой симметрической матрицы было установлено, что наибольшие возможные значения максимальных боковых пиков АКФ равные  $R_{\max}(\tau) = 0,75$  достигаются для случаев, когда базовые симметрические матрицы имеют вид  $H_4^{000}$ ,  $H_4^{010}$ ,  $H_4^{101}$ ,  $H_4^{111}$ , то есть когда их собственные векторы описывают последовательности Уолша (левый график на рис. 2).

Наименьшие возможные значения максимальных боковых пиков АКФ равные  $R_{\max}(\tau) = 0,25$  достигаются для случаев когда базовые симметрические матрицы имеют вид  $H_4^{001}$ ,  $H_4^{011}$ ,  $H_4^{100}$ ,  $H_4^{110}$  то есть когда их собственные векторы описывают последовательности  $D$ -кодов Велти (правый график на рис. 2).

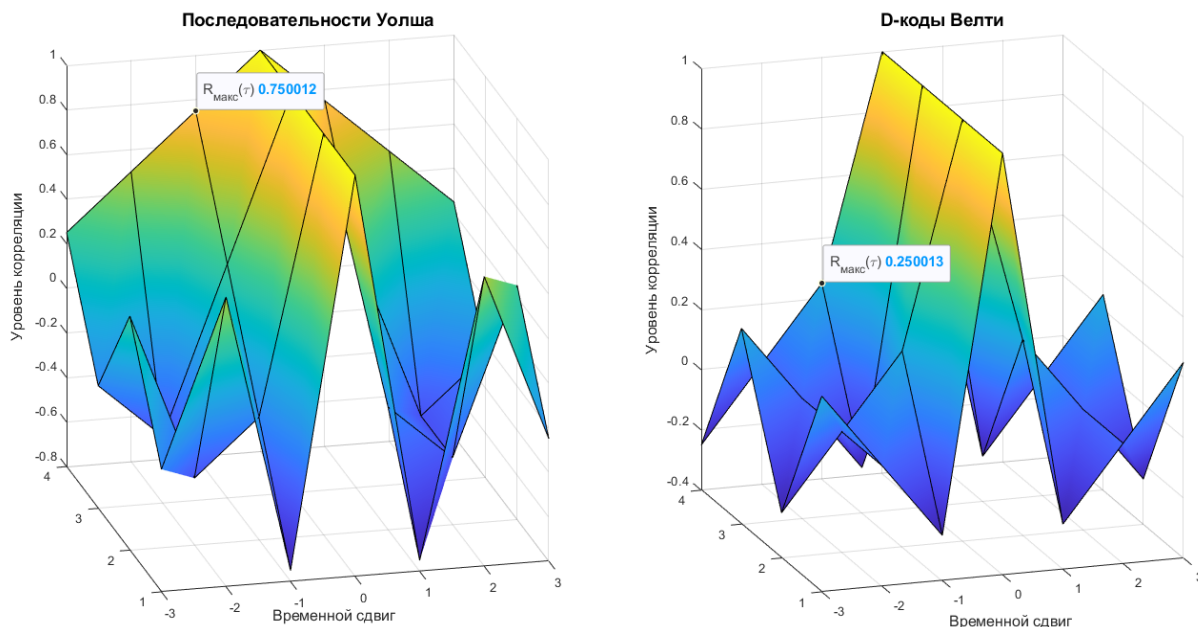


Рис. 1. Автокорреляционные функции ансамблей последовательностей Уолша и  $D$ -кодов Велти

## 2. Определение ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей и их автокорреляционных функций на основе симметрической матрицы 8-го порядка

### 2.1. Определение ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей на основе симметрической матрицы 8-го порядка

Проведем на основе определения собственных векторов симметрических матриц 8-го порядка анализ ансамблей ортогональных кодовых последовательностей и их АКФ. Для этого рассмотрим симметрическую матрицу 8-го порядка  $H_8$ , которая может быть сформирована семью диагональными коэффициентами, расположенными аналогично тому, как это было сделано в матрице  $H_4$

$$H_8 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

С учетом условия (7) авторами статьи было установлено, что значениями диагональных коэффициентов для симметрической матрицы  $H_8$  вида (11), позволяющими получить ортонормированный базис двухуровневых собственных векторов со значениями 0,35 и  $-0,35$ , являются:  $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 100$ ;  $a_2 = a_6 = 0,01$ ;  $a_4 = 0,0001$ .

Расширение кодовых последовательностей путем полного перебора комбинаций положительных и отрицательных семи коэффициентов матрицы  $H_8$  позволяет получить  $2^7 = 128$  ансамблей ортогональных кодовых последовательностей. При этом последовательности Уолша и  $D$ -кодов Велти, входят в число этих последовательностей помимо других. В частности последовательности Уолша существуют для случаев, когда базовые симметрические матрицы имеют вид

$H_8^{0000000}, H_8^{0001000}, H_8^{0100010}, H_8^{0101010}, H_8^{1010101}, H_8^{1011101}, H_8^{0101010}, H_8^{1111111}$ . Например, матрица ансамбля двоичных ортогональных кодовых последовательностей Уолша  $A_8^{0000000}$  имеет следующий вид

$$A_8^{0000000} = \begin{bmatrix} 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \end{bmatrix}.$$

Последовательности  $D$ -кодов Велти существуют для случаев, когда базовые симметрические матрицы имеют вид  $H_8^{0010011}, H_8^{0011011}, H_8^{0111001}, H_8^{0110001}, H_8^{1000110}, H_8^{1001110}, H_8^{1101100}, H_8^{1100100}$ . Например, матрица ансамбля ортогональных кодовых последовательностей  $D$ -кодов Велти  $A_8^{1101100}$  имеет вид

$$A_8^{1101100} = \begin{bmatrix} 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \end{bmatrix}.$$

Помимо последовательной Уолша и  $D$ -кодов Велти, представленных выше, авторами получены и другие (новые) ансамбли ортогональных кодовых последовательностей с разными значениями максимальных боковых пиков АКФ, которые представлены ниже.

Первый ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,625$  имеет вид

$$A_8^{0000001} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \end{bmatrix}.$$

Второй ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,625$  имеет вид

$$A_8^{0000010} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \end{bmatrix}.$$

Третий ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,625$  имеет вид

$$A_8^{0000100} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \end{bmatrix}.$$

Четвертый ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,625$  имеет вид

$$A_8^{0000110} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \end{bmatrix}.$$

Пятый ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,625$  имеет вид

$$A_8^{0010000} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \end{bmatrix}.$$

Шестой ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,625$  имеет вид

$$A_8^{0010010} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \end{bmatrix}.$$

Седьмой ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,625$  имеет вид

$$A_8^{0010100} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \end{bmatrix}.$$

Восьмой ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,625$  имеет вид

$$A_8^{0010101} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \end{bmatrix}.$$

Авторами получены ансамбли ортогональных кодовых последовательностей, у которых  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,5$ . Первый ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,5$  имеет следующий вид

$$A_8^{0000011} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \end{bmatrix}.$$

Второй ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,5$  имеет вид

$$A_8^{00001111} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \end{bmatrix}.$$

Третий ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,5$  имеет вид

$$A_8^{0010001} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \end{bmatrix}.$$

Четвертый ансамбль ортогональных кодовых последовательностей с максимальным боковым пиком АКФ равным  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,5$  имеет вид

$$A_8^{00101111} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \end{bmatrix}.$$



Авторами получен ансамбль ортогональных кодовых последовательностей, у которого, как и у  $D$ -кодов Велти  $R_{\max}(\tau) = 0,375$ , который имеет вид

$$A_8^{0000101} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \end{bmatrix}.$$

Авторами получен ансамбль ортогональных кодовых последовательностей, у которого  $R_{\max}(\tau) = 0,25$ , который имеет вид

$$A_8^{0010110} = \begin{bmatrix} 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 \\ 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & -0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & 0,35 & 0,35 \\ 0,35 & 0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 & 0,35 & -0,35 & -0,35 \end{bmatrix}.$$

В результате получено 16 различных видов ансамблей ортогональных кодовых последовательностей, включая Уолша и  $D$ -коды Велти и 14 новых видов ансамблей. Каждый вид ансамблей ортогональных кодовых последовательностей имеет восемь вариантов, отличающихся друг от друга порядком упорядочивания кодовых последовательностей в составе ансамбля.

## 2.2. Определение автокорреляционных функций ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей 8-го порядка

Результаты исследований показывают, что количество уровней максимальных боковых пиков АКФ у ортогональных последовательностей матрицы  $H_8$  равно пяти, которые имеют значения  $R_{\max}(\tau) = \{0,875; 0,625; 0,5; 0,375; 0,25\}$ . Ансамбли последовательностей Уолша имеет значения  $R_{\max}(\tau) = 0,875$ , а ансамбли  $D$ -кодов Велти имеют значения  $R_{\max}(\tau) = 0,375$ . При этом среди известных авто-

рам ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей минимальным значением максимального бокового пика обладают  $D$ -коды Велти, но при этом они не удовлетворяют условию (10).

Анализ источников [15-31], проведенный авторами, показал, что ансамбли дискретных ортогональных кодовых последовательностей размерности восемь, у которых максимальный боковой пик АКФ  $R_{\text{макс}}(\tau) < 0,375$ , не известны.

Анализ расчетов АКФ показал, что полученные новые 8 вариантов ансамблей ортогональных кодовых последовательностей имеют автокорреляционные характеристики, превосходящие автокорреляционные характеристики известных  $D$ -кодов Велти, то есть удовлетворяют условию (10) и имеют значение максимального бокового пика АКФ меньше, чем у  $D$ -кодов Велти. Такими ансамблями ортогональных кодовых последовательностей являются  $A_8^{0010110}$ ,  $A_8^{0011110}$ ,  $A_8^{0110100}$ ,  $A_8^{0111100}$ ,  $A_8^{1000011}$ ,  $A_8^{1100001}$ ,  $A_8^{1101001}$ ,  $A_8^{0011110}$  у которых значение максимального бокового пика АКФ равно  $R_{\text{макс}}(\tau) = 0,25$ . График АКФ одного из таких ансамблей  $A_8^{0011110}$  представлен на рис. 3.

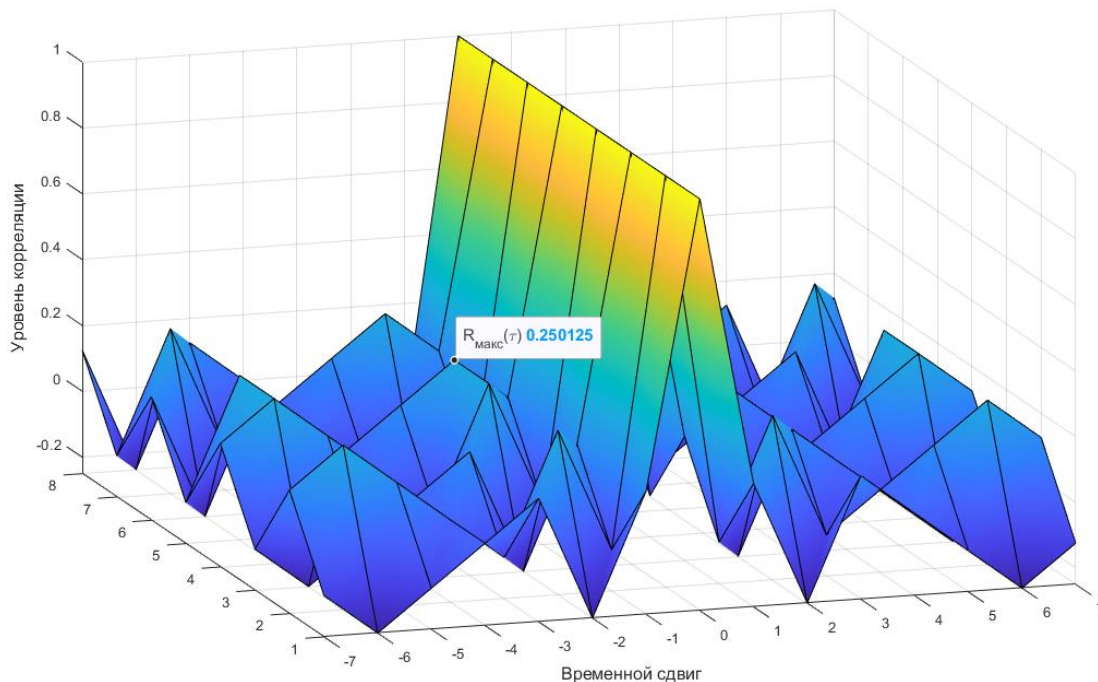


Рис. 3. Автокорреляционная функция ансамбля  $A_8^{0011110}$

Анализ полученных в результате перебора знаков коэффициентов базовой симметрической матрицы восьмого порядка  $H_8$  показывает, что чем ближе к симметричности знаки крайних диагональных коэффициентов базовой симметрической матрицы, тем выше будут максимальные боковые пики АКФ полученных собственных векторов этой матрицы, независимо от знака среднего коэффициента.

График распределения значений максимальных боковых пиков АКФ для всех комбинаций, полученных перебором знаков у коэффициентов симметрической матрицы  $H_8$  представлен на рис. 4.

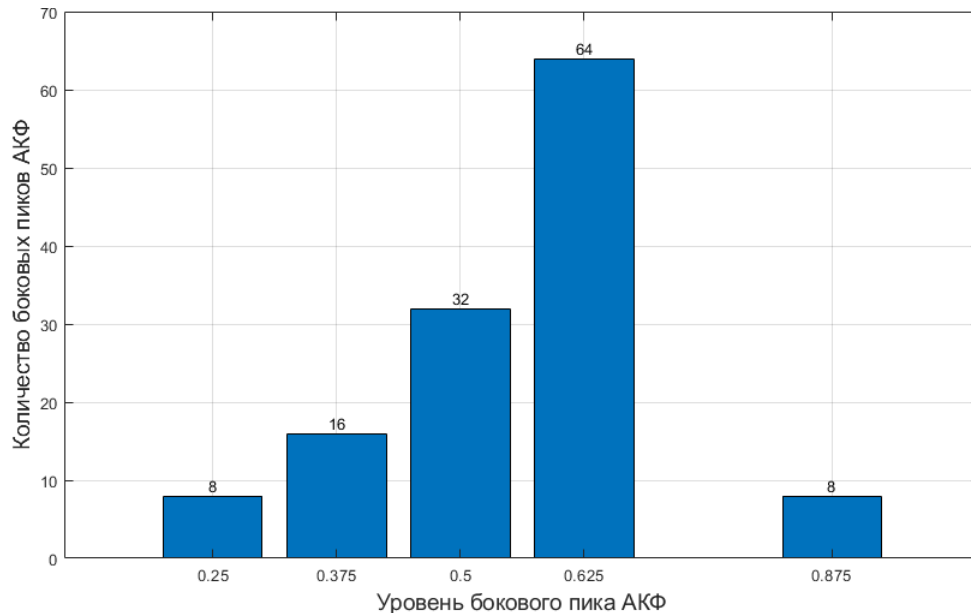


Рис. 1. Распределение максимальных боковых пиков автокорреляционных функций 128 вариантов ансамблей ортогональных кодовых последовательностей  $A_8^{0000000} \dots A_8^{1111111}$

### 3. Определение ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей и их автокорреляционных функций на основе симметрической матрицы 16-го порядка

Рассмотрим симметрическую матрицу 16-го порядка  $H_{16}$ , которая может быть сформирована из 15 диагональных коэффициентов расположенных аналогично тому, как это было сделано в матрицах (5) и (11).

С учетом условия (7) авторами статьи было установлено, что ортонормированный базис двухуровневых собственных векторов со значениями 0,25 и  $-0,25$  получается при следующих значениях диагональных коэффициентов симметрической матрицы  $H_{16}$ :

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a_{11} = a_{13} = a_{15} = 100; a_2 = a_6 = a_{10} = a_{14} = 10; a_4 = a_{12} = 0,1; a_8 = 0,0027.$$

При этом количество возможных комбинаций коэффициентов матрицы  $H_{16}$  равно  $2^{15} = 32768$ .

По аналогии с предыдущими экспериментами для 32768 возможных комбинаций коэффициентов симметрической матрицы  $H_{16}$  были рассчитаны матрицы

собственных векторов  $A_{16}$  и их максимальные боковые пики АКФ. В результате установлено, что для рассматриваемых вариантов матриц  $A_{16}$  количество возможных уровней максимальных боковых пиков АКФ равно 11. Также установлено, что минимальные значения максимальных боковых пиков АКФ получаются при наибольшем различии в симметричности знаков между левыми и правыми крайними коэффициентами базовой симметрической матрицы  $H_{16}$ .

В результате расчетов получены ансамбли двоичных ортогональных кодовых последовательностей Уолша,  $D$ -кодов Велти и новые виды ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей, состоящие из 96 вариантов ансамблей, которые обладают «хорошими» автокорреляционными характеристиками, то есть удовлетворяют условию (10) и имеют значение максимального бокового пика АКФ меньше, чем у  $D$ -кодов Велти. Максимальный боковой пик АКФ этих ансамблей ортогональных кодовых последовательностей равен  $R_{\max}(\tau) = 0,188$ . Ниже представлен один из таких ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей  $A_{16}^{111101010000101}$ , а на рис. 5 представлен график АКФ этого ансамбля.

$$A_{16}^{111101010000101} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 \\ 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 \\ 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 \\ 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 \\ 0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & -0,25 & 0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,25 & 0,25 \end{bmatrix}$$

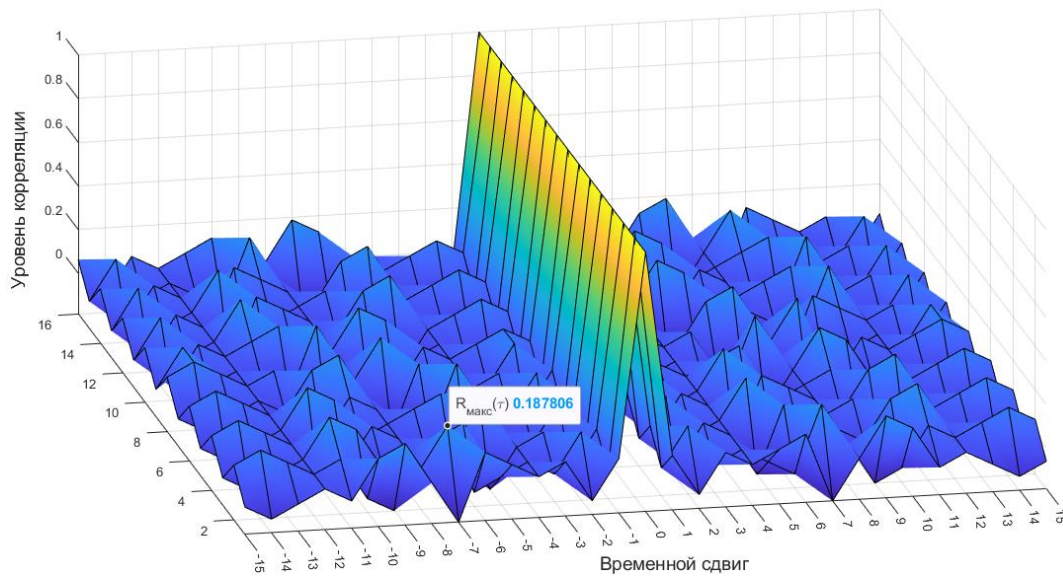


Рис. 5. Автокорреляционная функция ансамбля двоичных ортогональных кодовых последовательностей  $A_{16}^{111101010000101}$

График распределения значений максимальных боковых пиков АКФ ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей базовой матрицы  $H_{16}$  при полном переборе знаков её диагональных коэффициентов представлен на рис. 6.

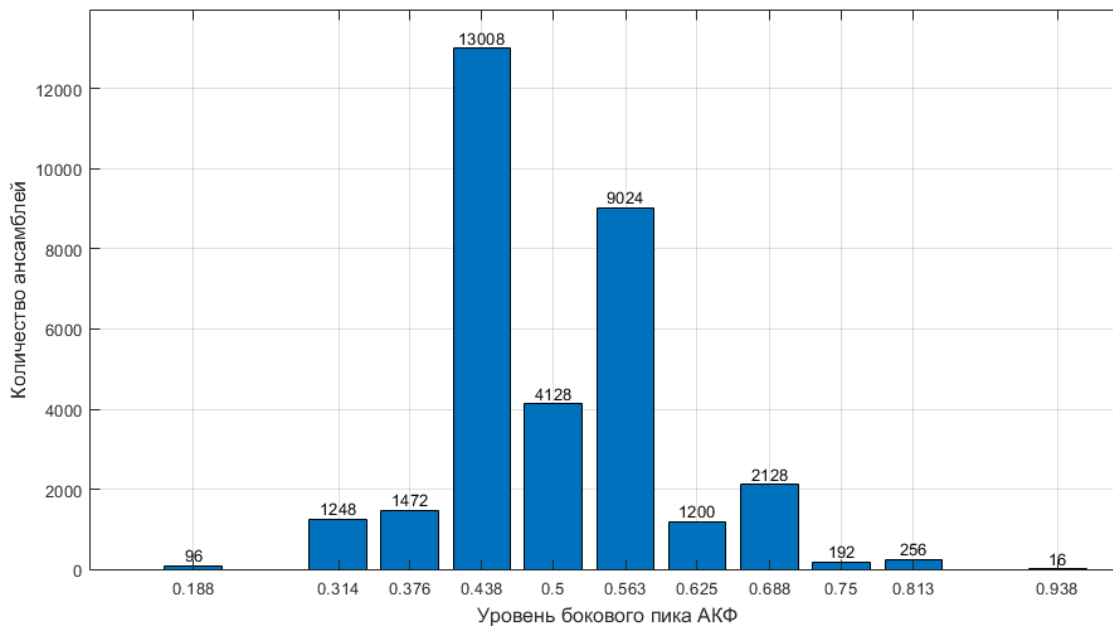


Рис. 6. Распределение максимальных боковых пиков АКФ всех ансамблей матрицы  $H_{16}$

#### 4. Сравнительный анализ максимальных боковых пиков автокорреляционных функций ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей на основе симметрических матриц 4, 8 и 16-го порядков

Таблица 3 содержит обобщенные данные о показателях максимальных боковых пиках АКФ ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей на основе собственных векторов симметрических матриц 4, 8 и 16-го порядков.

Таблица 3 – Показатели максимальных боковых пиков АКФ

Порядок матрицы, $n$	$R_{доп}(\tau)$	Значение $R_{макс Уолша}(\tau)$ последовательностей Уолша	Значение $R_{макс D-кодов}(\tau)$ D-кодов Велти	Значение $R_{макс новых}(\tau)$ для новых последовательностей
4	0,5	0,75	0,25	–
8	0,35	0,875	0,375	0,25
16	0,25	0,941	0,378	0,188

Анализ результатов, представленных в таблице 3, показывает, что:

1. Ансамбли ортогональных кодовых последовательностей Уолша анализируемых размерностей  $N = 4, 8, 16$  не удовлетворяют допустимому значению уровня максимальных боковых пиках АКФ кодовых последовательностей ансамбля, поскольку они превышают допустимое значение т.е.  $R_{макс Уолша}(\tau) > R_{доп}(\tau)$ ,
2. Ансамбли ортогональных последовательностей D-кодов Велти анализируемых размерностей удовлетворяют допустимому значению уровня максимальных боковых пиках АКФ кодовых последовательностей ансамбля только при размерности  $N = 4$ , т.е.  $R_{макс D-кодов}(\tau) < R_{доп}(\tau)$  при размерности  $N = 4$ , а при размерности  $N = 8, 16$  они превышают допустимое значение т.е.  $R_{макс D-кодов}(\tau) > R_{доп}(\tau)$ .
3. Новые ансамбли ортогональных последовательностей, полученные на основе собственных векторов симметрических матриц анализируемых размерностей  $N = 8, 16$  удовлетворяют допустимому значению уровня максимальных боковых пиках АКФ кодовых последовательностей ансамбля  $R_{макс новых}(\tau) < R_{доп}(\tau) = 1 / \sqrt{N}$ .
4. Анализ графиков распределения значений максимальных боковых пиков АКФ ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей базовых матриц  $H_4, H_8, H_{16}$  представленных соответственно на рис. 2, 4, 6, и результатов, представленных в таблице 3, показывает, что

для размерности матрицы  $N = 4$  существует 1 из 8 вариантов ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей (12,6 %), удовлетворяющих условию обеспечения допустимого значения уровня максимальных боковых пиков АКФ кодовых последовательностей ансамбля. Для размерности матрицы  $N = 8$  существует 8 из 128 вариантов ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей (6,25 %), а для размерности матрицы  $N = 16$  существует 96 из 32768 вариантов ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей (0,29 %), удовлетворяющих условию обеспечения допустимого значения уровня максимальных боковых пиков АКФ кодовых последовательностей ансамбля.

### Выводы

1. Разработана методика получения новых ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей с размерностью  $N=8, 16$  которые удовлетворяют требуемым корреляционным характеристикам и превосходят по показателю максимального бокового пика автокорреляционной функции известные последовательности Уолша и  $D$ -кодов Велти.

2. Разработанная методика включает следующие основные этапы:

- для базовой симметрической матрицы  $H_n$  где  $n$  – порядок матрицы ( $n = 4, 8, 16$ ) с двумя боковыми диагоналями на основании выражения (7) определяются значения диагональных коэффициентов  $a_i$  ( $i = 1 \dots n - 1$ );
- рассчитываются собственные числа симметрической матрицы  $\lambda_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) и определяется матрица ортогональных собственных векторов  $A_n$ , каждая строка которой представляет собой собственный вектор, которым описывается кодовая последовательность из состава ортогонального ансамбля  $A_n$ ;
- путем полного перебора знаков диагональных коэффициентов  $a_i$  ( $i = 1 \dots n - 1$ ) рассматриваемой симметрической матрицы  $H_n$  определяются возможные варианты ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей в виде матриц  $A_n$ ;
- для каждой кодовой последовательности из состава ортогонального ансамбля двоичных ортогональных кодовых последовательностей  $A_n$  определяется максимальный боковой пик АКФ, который считается максимальным боковым пиком АКФ всего ансамбля;
- проводится сравнение максимальных боковых пиков АКФ полученных новых вариантов АДОКП анализируемой размерности с максимальными боковыми пиками АКФ известных последовательностей Уолша и  $D$ -кодов Велти и его допустимым значением  $R_{\text{макс новых}}(\tau) \leq R_{\text{дон}}(\tau) = 1/\sqrt{N}$ ;

- исследуется зависимость значений максимальных боковых пиков АКФ от возможных вариантов знаков диагональных коэффициентов базовой симметрической матрицы  $H_n$ .

3. Полученные результаты проведенных исследований АКФ различных АДОКП, представленные на рис. 2, 3, 5 и в таблице 3 показывают, что:

- ансамбли последовательностей Уолша имеет наихудшие автокорреляционные характеристики, поскольку их максимальные боковые пики АКФ любых анализируемых размерностей  $N=4, 8, 16$  имеют наибольшие из сравниваемых значений и превышают допустимое значение  $R_{\text{макс Уолша}}(\tau) > R_{\text{доп}}(\tau) = 1/\sqrt{N}$ ;
- анализ автокорреляционных характеристик известных АДОКП размерности  $N=4$  показал, что значение максимального бокового пика АКФ, не превышающее допустимое  $R_{\text{доп}}(\tau) = 1/\sqrt{N}$  имеют только последовательности  $D$ -кодов Велти;
- ансамбли  $D$ -кодов Велти обладают приемлемыми автокорреляционными характеристиками, поскольку их максимальные боковые пики АКФ имеют значение близкое к  $1/\sqrt{N}$  для размерностей  $N=8, 16$ ;
- получены 8 новых видов АДОКП размерности  $N=8$  и 96 новых видов АДОКП размерности  $N=16$ , обладающие «хорошими» автокорреляционными функциями с максимальным боковым пиком не превышающим допустимое  $R_{\text{макс новых}}(\tau) \leq R_{\text{доп}}(\tau) = 1/\sqrt{N}$ ;
- максимальные боковые пики АКФ новых видов АДОКП удовлетворяют условию  $R_{\text{макс новых}}(\tau) \leq 1/\sqrt{N}$ , поэтому их дальнейшее применение в системах передачи информации с кодовым разделением каналов является целесообразным;
- наименьшие значения максимальных боковых пиков АКФ достигаются при отсутствии симметрии в знаках между левыми и правыми крайними коэффициентами базовой симметрической матрицы  $H_n$ , в независимости от знака центрального коэффициента.

4. С ростом размерности  $N$  ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей количество их вариантов, удовлетворяющих условию обеспечения допустимого значения уровня максимальных боковых пиков АКФ кодовых последовательностей ансамбля растет в количественном выражении, но падает в процентном соотношении к общему числу анализируемых ансамблей.

Дальнейшим направлением развития разработанной методики является получение новых ансамблей двоичных ортогональных кодовых последовательностей размерностей  $N=32, 64, 128, 256$ , обладающих «хорошими» автокорреляционными



ми функциями с максимальным боковым пиком, не превышающим допустимое  $R_{don}(\tau) = 1/\sqrt{N}$ , число вариантов которых может превышать несколько тысяч.

### Литература

1. Борисов В. И., Зинчук В. М. Помехозащищённость систем радиосвязи. Вероятностно-временной подход. – М.: РадиоСофт, 2008. – 260 с.
2. Борисов В. И., Зинчук В. М., Лимарев А. Е., Мухин Н. П., Нахмансон Г. С. Помехозащищённость систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью / под общ. ред. В. И. Борисова – М.: Радио и связь, 2003. – 640 с.
3. Жук А. П., Студеникин А. В., Жук Е. П. Алгоритм и устройство формирования ансамблей псевдослучайных ортогональных последовательностей для систем передачи информации с кодовым разделением каналов // Системы управления, связи и безопасности. 2020. № 3. С. 1–21. doi: 10.24411/2410-9916-2020-10301.
4. Урядников Ю. Ф. Аджемов С. С. Сверхширокополосная связь. Теория и применение. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 368 с.
5. Макаренко С. И., Иванов М. С., Попов С. А. Помехозащищённость систем связи с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты. – СПб.: Свое издательство, 2013. – 166 с.
6. Жук А. П., Черняк З. В., Сазонов В. В. О целесообразности использования ансамблей ортогональных сигналов с изменяющейся размерностью в системе CDMA // Известия ЮФУ. Технические науки. 2008. № 8 (85). С. 190 – 195.
7. Жук А. П., Петренко В. И., Кузьминов Ю. В., Жук Е. П., Луганская Л. А. Совершенствование способов обмена информацией в высокоскоростных беспроводных информационных сетях с использованием новых типов ансамблей дискретных последовательностей // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 5. С. 144–151.
8. Жук А. П., Бурмистров В. А., Гавришев А. А. Система передачи информации с использованием стохастических ортогональных ансамблей дискретных многоуровневых сигналов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2. № 11. С. 493–498.
9. Жук А. П., Жук Е. П., Трошков А. М. Способ передачи информации с псевдослучайной перестройкой формы сигналов для систем связи с кодовым разделением каналов // Информационная безопасность-2012: материалы XII Международной научно-практической конференции. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2012. Ч. 1. С. 346.
10. Гавришев А. А., Луганская Л. А., Лысенко А. А., Бурмистров В. А., Орел Д. В., Осипов Д. Л., Петренко В. И., Жук А. П. Генератор стохастических ортогональных кодов // Патент на изобретение RU 2615322 С1, опубл. 04.04.2017,

бюл. № 10. – URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=38261914> (дата обращения 27.12.2024).

11. Косякин С. И., Москвитин И. А., Смирнов А. А. Способ передачи информации в системах с кодовым разделением каналов и устройство для его осуществления // Патент на изобретение RU 2234191 С2, опубл. 10.08.2004. – URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=37941753> (дата обращения 28.12.2024).

12. Вержбицкий В. М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): учеб. пособие для вузов. 2-е изд. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. – 432 с.

13. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 340 с.

14. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

15. Попенко В. С. Оценка ширины спектра дискретных сигналов // Радиотехника. 1996. № 11. С. 57–59.

16. Попенко В. С. Векторный синтез ансамблей ортогональных сигналов. Часть 2. – Ставрополь: МО РФ, 1993. – 131 с.

17. Пашинцев В. П., Малофеев О. П., Жук А. П., Самус М. В., Гайчук Д. В., Сазонов В. В. Развитие теории синтеза и методов формирования ансамблей дискретных сигналов для перспективных систем радиосвязи различных диапазонов радиоволн. Монография. – М.: Физико-математическая литература, 2010. – 196 с.

18. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.

19. Ипатов В. П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. – М.: Радио и связь, 1992. – 152 с.

20. Варакин Л. Е. Теория сложных сигналов. – М.: Советское радио, 1978. – 199 с.

21. Golomb S. W., Gong G. Signal design for good correlation for wireless communication, cryptography, and radar. – Cambridge, University press, 2005. – 438 p.

22. Viterbi A. J. CDMA: Principles of spread spectrum communication. – Addison-Wesley, Reading MA, 1995. – 245 p.

23. Proakis J. Digital Communications. – New York, McGraw-Hill, 2001. – 928 p.

24. Sklar B. Digital Communications. Fundamentals and Applications. – Upper Saddle River NJ, Prentice-Hall, 1988. – 1104 p.

25. Golomb S. Digital communications with space applications. – Upper Saddle River NJ, Prentice-Hall, 1964. – 210 p.

26. Петрович Н. Т., Размахнин М. К. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Советское радио, 1969. – 232 с.

27. Ziemer R. E., Peterson R. L., Borth D. E. Introduction to spread spectrum communications. – Englewood Cliffs, NJ Prentice Hall, 1995. – 695 p.

28. Dixon R. Spread spectrum systems. – New York, Wiley, 1976. – 318 p.
29. Nunn C. J., Coxson G. E. Polyphase pulse compression codes with optimal peak and integrated sidelobes // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems AES-45. 2009. Vol. 2. P. 775–781.
30. Rushanan J. Weil sequences: a family of binary sequences with good correlation properties // IEEE International Symposium on Information Theory. Seattle WA, July 9–14, 2006 / Seattle convention center. Seattle WA. 2006. P. 1648–1652.
31. Дядюнов Н. Г., Сенин А. И. Ортогональные и квазиортогональные сигналы. – М.: СВЯЗЬ, 1977. – 224 с.

## References

1. Borisov V. I., Zinchuk V. M. *Pomekhozashchishchennost' sistem radiosviazi. Veroiatnostno-vremennoi podkhod* [Interference protection of radio communication systems. Time-and-probability approach]. Moscow, Radio Soft Publ., 2008. 260 p. (in Russian).
2. Borisov V. I., Zinchuk V. M., Limarev A. E., Muhin N. P., Nahmanson G. S. *Pomekhozashchishchennost' sistem radiosviazi s rasshireniem spektra signalov moduliatsiei nesushchei psevdosluchainoi posledovatel'nost'iu* [Interference protection of radio communication systems with expansion of signals spectrum by modulation of the carrier with pseudorandom sequence]. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 2003. 640 p. (in Russian).
3. Zhuk A. P., Studenikin A. V., Zhuk E. P. Algorithm and device for forming ensembles of pseudo-random orthogonal sequences for information transmission systems with code division multiplexing. *Systems of Control, Communication and Security*, 2020, no. 3, pp. 1–21 (in Russian).
4. Uriadnikov Iu. F. Adzhemov S. S. *Sverkhshirokopolosnaia sviaz'. Teoriia i primeneniye* [Ultra-wide-band communication. Theory and application]. Moscow, Solon-Press Publ., 2005. 368 p. (in Russian).
5. Makarenko S. I., Ivanov M. S., Popov S. A. *Pomehozashchishchennost' sistem svyazi s psevdosluchajnoj perestrojkoj rabochej chastoty* [Noise immunity of communication systems with pseudorandom tuning of the operating frequency]. Saint-Petersburg, Svoe izdatel'stvo Publ., 2013. 166 p. (in Russian).
6. Zhuk A. P., Cherniak Z. V., Sazonov V. V. *O tselesoobraznosti ispol'zovaniia ansamblei ortogonal'nykh signalov s izmeniaiushcheisia razmernost'iu v sisteme CDMA* [On the feasibility of using ensembles of orthogonal signals with varying dimensions in the CDMA system]. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences. Tematicheskii vypusk. Informatsionnaia bezopasnost'*, 2008, vol. 85, no. 8, pp. 190–195 (in Russian).
7. Zhuk A. P., Petrenko V. I., Kuz'minov Iu. V., Zhuk E. P., Luganskaia L. A. *Sovershenstvovanie sposobov obmena informatsiei v vysokoskorostnykh besprovodnykh informatsionnykh setiakh s ispol'zovaniem novykh tipov ansamblei diskretnykh posledovatel'nostei* [Improving information exchange methods in high-speed wireless

information networks using new types of discrete sequence ensembles]. *Sovremennye problemi nauki i obrazovaniya*, 2013, no. 5, pp. 144–151 (in Russian).

8. Zhuk A. P., Burmistrov V. A., Gavrishchev A. A. Sistema peredachi informatsii s ispol'zovaniem stokhasticheskikh ortogonal'nykh ansamblej diskretnykh mnogourovnevnykh signalov [Information transfer system using stochastic orthogonal ensembles of discrete multilevel signals]. *Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT-obrazovaniya*, 2015, vol. 2, no. 11, pp. 493–498 (in Russian).

9. Zhuk A. P., Zhuk E. P., Troshkov A. M. Sposob peredachi informatsii s psevdosluchainoi perestroikoi formy signalov dlia sistem svyazi s kodovym razdeleniem kanalov [A method for transmitting information with pseudorandom rearrangement of the signal form for communication systems with code-division multiple access]. *Informatsionnaya bezopasnost'-2012: materialy XII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Information security-2012: materials of the XII International scientific and practical Conference]. Taganrog, Southern Federal University, 2012, p. 346 (in Russian).

10. Gavrishchev A. A., Luganskaia L. A., Lysenko A. A., Burmistrov V. A., Orel D. V., Osipov D. L., Petrenko V. I., Zhuk A. P. *Generator stokhasticheskikh ortogonal'nykh kodov* [Stochastic Orthogonal Codes Generator]. Patent Russia, no. RU2615322C1, 2017.

11. Kosjakin S. I., Moskvitin I. A., Smirnov A. A. *Sposob peredachi informatsii v sistemah s kodovym razdeleniem kanalov i ustrojstvo dlia ego osushhestvlenija* [Method of transmitting information in systems with code division of channels and the device for its implementation]. Patent Russia, no. 2234191, 2004.

12. Verzhbitskii V. M. *Chislennye metody (lineinaia algebra i nelineinye uravneniia)* [Numerical methods (linear algebra and nonlinear equations)]. Moscow, Izdatel'skii dom ONIKS 21 vek Publ., 2005. 432 p. (in Russian).

13. Golovina L. I. *Lineinaia algebra i nekotorye ee prilozheniia* [Linear algebra and some of its applications]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 340 p. (in Russian).

14. Demidovich B. P., Maron I. A. *Osnovy vychislitel'noi matematiki* [Fundamentals of computational mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 664 p. (in Russian).

15. Popenko V. S. *Otsenka shiriny spektra diskretnykh signalov* [Estimation of the discrete signal's spectrum width]. *Radiotekhnika*, 1996, no. 11, pp. 57–59 (in Russian).

16. Popenko V. S. *Vektorny sintez ansamblei ortogonal'nykh signalov. Chast' 2* [Vector synthesis of orthogonal signal ensembles. Part 2]. Stavropol, Stavropol Higher Military Engineering College of Communications, 1993. 131 p. (in Russian).

17. Pashincev V.P., Malofej O.P., Zhuk A.P., Samus M.V., Gajchuk D.V., Sazonov V.V. *Razvitie teorii sinteza i metodov formirovaniia ansamblej diskretnykh signalov dlia perspektivnykh sistem radiosvyazi razlichnykh diapazonov radiovoln* [Development of the theory of synthesis and methods for forming ensembles of discrete signals for promising radio communication systems of various radio wave ranges].

Monography]. Moscow, Physics and Mathematics Literature Publ, 2010. 196 p. (in Russian).

18. Varakin L. E. *Sistemy svyazi s shumopodobnymi signalami* [Communication systems with noise-like signals]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1985. 384 p. (in Russian).

19. Ipatov V. P. *Periodicheskie diskretnye signaly s optimal'nymi korrelyatsionnymi svoystvami* [Periodic discrete signals with optimal correlation properties]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1992. 152 p. (in Russian).

20. Varakin L. E. *Teoriya slozhnykh signalov* [Theory of complex signals]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1978. 199 p. (in Russian).

21. Golomb S. W., Gong G. *Signal design for good correlation for wireless communication, cryptography, and radar*. Cambridge: University press, 2005. 438 p.

22. Viterbi A. J. *CDMA: Principles of spread spectrum communication*. Addison-Wesley, Reading MA, 1995. 245 p.

23. Proakis J. *Digital Communications*. New York NY, McGraw-Hill, 2001. 928 p.

24. Sklar B. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*. Upper Saddle River NJ, Prentice-Hall, 1988. 1104 p.

25. Golomb S. *Digital communications with space applications*. Upper Saddle River NJ, Prentice-Hall, 1964. 210 p.

26. Petrovich N. T., Razmakhnin M. K. *Sistemy svyazi s shumopodobnymi signalami* [Communication systems with noise-like signals]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1969. 232 p. (in Russian).

27. Ziemer R. E., Peterson R. L., Borth D. E. *Introduction to spread spectrum communications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995. 695 p.

28. Dixon R. *Spread spectrum systems*. New York, Wiley, 1976. 318 p.

29. Nunn C. J., Coxson G. E. Polyphase pulse compression codes with optimal peak and integrated sidelobes. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* AES-45. 2009. vol. 2. P. 775–781.

30. Rushanan J. Weil sequences: a family of binary sequences with good correlation properties. *IEEE International Symposium on Information Theory*. Seattle WA, July 9–14, 2006. Seattle convention center. Seattle WA. 2006. P. 1648 – 1652.

31. Diadiunov N. G., Senin A. I. *Ortogonal'nye i kvaziortogonal'nye signaly* [Orthogonal and quasi-orthogonal signals]. Moscow, Svyaz' Publ., 1977. 224 p. (in Russian).

Статья поступила 10 января 2025 г.

### Информация об авторах

Жук Александр Павлович – кандидат технических наук, профессор. Профессор кафедры организации и технологии защиты информации. Северо-Кавказский

федеральный университет. Область научных интересов: развитие теории и методов защиты информации в беспроводных телекоммуникационных системах; теория и практика применения биометрических методов идентификации пользователей инфокоммуникационных систем. E-mail: alekszhuk@mail.ru

*Стогний Кирилл Витальевич* – аспирант кафедры организации и технологии защиты информации, ассистент кафедры организации и технологии защиты информации. Северо-Кавказский федеральный университет. Область научных интересов: Информационная безопасность, методы защиты информации. E-mail: kirill.stogniy@mail.ru

*Копытов Владимир Вячеславович* – доктор технических наук, профессор. Профессор кафедры организации и технологии защиты информации. Северо-Кавказский федеральный университет. Область научных интересов: нелинейная динамика неавтономных систем, проблемы построения информационных систем и информационное противоборство. E-mail: v.kopytov@infocom-s.ru

*Макаров Игорь Викторович* – магистрант кафедры вычислительной математики и кибернетики. Ассистент кафедры организации и технологии защиты информации. Северо-Кавказский федеральный университет. Область научных интересов: Информационная безопасность, методы защиты информации. E-mail: viktormakar15@gmail.com

Адрес: 355017, Россия, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1.

---

## Methodology for obtaining ensembles of discrete orthogonal code sequences with improved autocorrelation functions

A. P. Zhuk, K. V. Stogniy, V. V. Kopytov, I. V. Makarov

**Purpose.** To increase the structural secrecy of code division information transmission systems, it is necessary to increase the number of ensembles of discrete orthogonal code sequences. It is known that, based on the consideration of the eigenvectors of symmetric matrices, it is possible to obtain ensembles of discrete orthogonal code sequences. However, an increase in their number may lead to the fact that not all of them will satisfy the specified requirements for correlation characteristics. Therefore, it is necessary to develop a method for obtaining an increased number of ensembles of orthogonal code sequences that satisfy the requirements for correlation characteristics. **The purpose of the work.** To develop a method for obtaining a set of new ensembles of binary orthogonal code sequences of different dimensions (4, 8 and 16) based on the consideration of the eigenvectors of symmetric matrices that satisfy the required correlation characteristics and surpass the known Walsh sequences and Welter codes in terms of the maximum side peak of the autocorrelation function. **The novelty.** In accordance with the condition of obtaining an orthonormal basis of the  $n$ -th order, the values of the diagonal coefficients of the basic symmetric matrix are determined, its eigenvalues are calculated and the matrix of orthogonal eigenvectors is determined, each row of which describes the orthogonal code sequence of the ensemble. On this basis, the number of ensembles of orthogonal code sequences with autocorrelation functions that have the smallest maximum side peaks is established, and the dependence of the val-

ues of the maximum side peaks on the possible variants of the coefficients of the basic symmetric matrix is established. **The result.** New ensembles of binary orthogonal code sequences with autocorrelation functions with a maximum side peak not exceeding the permissible value are obtained. It is established that the smallest values of the maximum side peaks of the autocorrelation function are achieved in the absence of symmetry in the signs between the left and right extreme coefficients of the basic symmetric matrix, regardless of the sign of the central coefficient.

**Key words:** symmetric matrices, orthogonal matrices, code sequences, structural secrecy, eigenvectors, autocorrelation function.

### Information about Authors

*Aleksandr Pavlovich Zhuk* – Ph.D. of Engineering Sciences, Full Professor. Professor at the Department of Organization and Technology of Information Security. North-Caucasus Federal University. Field of research: development of the theory and methods of information security in wireless telecommunications systems; theory and practice of biometric methods of user identification in information communication systems. E-mail: alekszhuk@mail.ru.

*Kirill Vitalievich Stogniy* – doctoral student of the Department of Organization and Technology of Information Security. Assistant of the Department of Organization and Technology of Information Security. North-Caucasus Federal University. Field of research: Information security, methods of information protection. E-mail: kirill.stogniy@mail.ru.

*Vladimir Vyacheslavovich Kopytov* – Doctor of Engineering Sciences, Full Professor. Professor of the Department of Organization and Technology of Information Security. North-Caucasus Federal University. Field of research: nonlinear dynamics of non-autonomous systems, problems of building information systems and information warfare. E-mail: v.kopytov@infocom-s.ru.

*Igor Viktorovich Makarov* – Master's degree student of the Department of Computational Mathematics and Cybernetics. Assistant of the Department of Organization and Technology of Information Security. North-Caucasus Federal University. Field of research: Information security, methods of information protection. E-mail: viktormakar15@gmail.com.

Address: Russia, 355017, Stavropol, Pushkin street, 1.