

УДК 621.391:621.396

## Математическое моделирование сигналов в непрерывных каналах связи в форме стохастических дифференциальных уравнений

Глушанков Е. И., Конторович В. Я., Караваев Д. А.

**Актуальность.** Разработка математических моделей сигналов в непрерывных каналах связи является необходимым этапом исследований каналов связи, так как проведение натурных испытаний, как правило, является сложным и не всегда физически возможным процессом и ограничено существенными временными затратами. Поэтому создание моделей является необходимым этапом изучения характеристик каналов связи и разработки алгоритмов первичной обработки сигналов в них. Одним из основных требований, предъявляемых к таким моделям, является их адекватность реальным процессам, происходящим в канале, которую можно оценить путем сравнения по критериям согласия результатов моделирования случайных процессов с теоретическими плотностями распределения вероятностей. Одним из наиболее конструктивных подходов к моделированию является использование метода переменных состояния и построение моделей в форме стохастических дифференциальных уравнений. При этом моделирование сигналов в непрерывных каналах связи в форме стохастических дифференциальных уравнений предполагает решение задачи синтеза таких уравнений, то есть определение их размерности и коэффициентов с необходимой точностью, чему и посвящена настоящая статья. Рассматривается задача моделирования когерентных и частично-когерентных сигналов в форме одномерных и многомерных стохастических дифференциальных уравнений. Синтезированы уравнения для частично-когерентных сигналов в пространственно-временном смысле и для частично-когерентных сигналов в частотной области. Показано при каких условиях возникает частичная когерентность сигналов и проанализированы их характеристики. Для оценки частично-когерентных сигналов в частотной области предложен модифицированный фильтр Калмана. **Целью работы** является представление методов синтеза стохастических дифференциальных уравнений, описывающих случайные параметры сигналов (коэффициент передачи, амплитуды, фазы, количество запросов, ожидающих обслуживания в сетях B-RAN и др.), в непрерывных каналах связи, и разработка на их основе новых одномерных и многомерных уравнений для различных распределений. **Результаты, их новизна и практическая значимость.** В работе синтезированы новые стохастические дифференциальные уравнения и проанализирована их адекватность для представления случайных сигналов в непрерывных каналах связи по критериям согласия путем сравнения с теоретическими распределениями. Показано, что модели обладают хорошей точностью представления вероятностных характеристик случайных процессов. При этом уравнение для распределения Райса позволяет моделировать амплитуды сигналов в многолучевых каналах, а равномерное распределение – фазы сигналов. Приведённый в начальной части работы обзор методов синтеза стохастических дифференциальных уравнений будет полезен специалистам, занимающимся разработкой и исследованием моделей сигналов в непрерывных каналах связи.

**Ключевые слова:** стохастические дифференциальные уравнения, частично-когерентные сигналы, математическое моделирование, закон Рэлея, эффект Доплера, плотность распределения вероятностей.

### Библиографическая ссылка на статью:

Глушанков Е. И., Конторович В. Я., Караваев Д. А. Математическое моделирование сигналов в непрерывных каналах связи в форме стохастических дифференциальных уравнений // Системы управления, связи и безопасности. 2023. № 4. С. 1-35. DOI: 10.24412/2410-9916-2023-4-1-35

### Reference for citation:

Glushankov E. I., Kontorovich V. Ya., Karavaev D. A. Signal Modeling in Continuous Communication Channels in the Form of Stochastic Differential Equations. *Systems of Control, Communication and Security*, 2023, no. 4, pp. 1-35 (in Russian). DOI: 10.24412/2410-9916-2023-4-1-35

## Введение

Разработка любой современной системы связи невозможна без точного представления о канале, который предполагается использовать для передачи информации. При этом на этапе теоретических исследований необходимо использование математических моделей каналов, от адекватности которых зависит обоснованность принимаемых технических решений.

Построение математических моделей сигналов в непрерывных каналах связи с учетом реальных свойств среды распространения радиоволн и воздействия различного рода помех, является необходимым этапом при выборе и разработке разных элементов приёмной и передающей аппаратуры, а также может являться основой для создания различного вида программных и аппаратных имитаторов каналов, используемых при испытаниях аппаратуры связи и анализе эффективности алгоритмов преобразования и обработки сигналов. Необходимо отметить, что в реальных каналах связи не только помехи, но зачастую и характеристики среды распространения радиоволн приходится рассматривать как случайные функции времени, частоты, а иногда и пространственных координат, например, в каналах с замираниями или в системах радиосвязи с многоэлементными антеннами. Кроме того, на основе полученных математических моделей сигналов в непрерывных каналах связи возможен синтез алгоритмов оптимальной и подоптимальной обработки сигналов, решающих задачи обнаружения, различения и фильтрации сигналов.

### Методы моделирования случайных параметров сигналов в непрерывных каналах

Пусть для передачи цифровой информации используется система из  $M$  - сигналов ( $M$  -позиционная система передачи)  $s_l(t), l \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ , каждый из которых обладает конечной энергией и передается на интервале времени  $T$  (символьный интервал). В общем виде модель непрерывного канала связи может быть представлена в виде [1, 2]:

$$y(t) = \mu(t)s_l(t) + \eta(t), \quad (1)$$

где  $y(t)$  – сигнал на входе приемника (на выходе непрерывного канала связи),  $\mu(t)$  – коэффициент передачи канала, зависящий от характеристик среды распространения радиоволн,  $s_l(t)$  – переданный сигнал (на входе непрерывного канала связи),  $\eta(t)$  – белый гауссовский шум (БГШ) с односторонней спектральной плотностью мощности  $N_0$ .

В общей модели канала (1) можно выделить два частных случая:

- 1) если  $\mu(t) = A(t)$ , где  $A(t)$  – детерминированная функция, то модель (1) представляет собой модель канала с аддитивным белым гауссовским шумом [1, 3];
- 2) если  $\mu(t)$  – случайный процесс (или в частном случае  $\mu(t) = \mu$  – случайная величина), то (1) представляет собой модель канала с неселективными по частоте общими замираниями.

Во втором случае при когерентном приеме для квадратурных составляющих коэффициента передачи справедлива совместно гауссовская четырехпараметрическая плотность вероятности [1-4]:

$$W_2(\mu_c, \mu_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_c\sigma_s} \exp\left(-\frac{(\mu_c - m_c)^2}{2\sigma_c^2} - \frac{(\mu_s - m_s)^2}{2\sigma_s^2}\right),$$

где  $\mu = \sqrt{\mu_c^2 + \mu_s^2}$  – коэффициент передачи канала,  $\mu_c$  и  $\mu_s$  – квадратурные составляющие коэффициента передачи,  $m_c$  и  $m_s$  – математические ожидания, а  $\sigma_c^2$  и  $\sigma_s^2$  – дисперсии квадратурных составляющих  $\mu_c$  и  $\mu_s$  соответственно.

Четырехпараметрическое распределение коэффициента передачи  $\mu$  и фазы  $\varphi = \arctan(\mu_c / \mu_s)$  определяется при этом выражениями [3]

$$W_1(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} \sigma^{2k} \frac{\partial^{2k}}{\partial m_1^k \partial m_{II}^k} \left( \frac{\mu}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\mu^2 + m_1^2 + m_{II}^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\mu}{\sigma^2} \sqrt{m_1^2 + m_{II}^2}\right) \right), \quad (2)$$

$$W_1(\varphi) = \frac{\sigma_c\sigma_s \exp\left(-\frac{m_1^2}{2\sigma_c^2} - \frac{m_{II}^2}{2\sigma_s^2}\right)}{2\pi(\sigma_s^2 \cos^2 \varphi + \sigma_c^2 \sin^2 \varphi)} \left(1 + K\sqrt{\pi} \exp\left(K^2(1 + \Phi(\sqrt{2}K))\right)\right), \quad (3)$$

для которых были введены следующие обозначения:

$$m_1 = \frac{m_c + m_s}{\sqrt{2}}, m_{II} = \frac{m_c - m_s}{\sqrt{2}}, \sigma^2 = \frac{\sigma_c^2 + \sigma_s^2}{\sqrt{2}}, R = \frac{\sigma_s^2 - \sigma_c^2}{\sigma_s^2 + \sigma_c^2},$$

$$K = \frac{\cos \varphi m_c \sigma_c^2 + \sin \varphi m_s \sigma_s^2}{\sigma_c \sigma_s \sqrt{\sigma_c^2 \sin^2 \varphi + \sigma_s^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (4)$$

где  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $\Phi(\sqrt{2}K)$  – интеграл вероятности.

Экспериментальные данные по замираниям в радиоканалах различных диапазонов [2-5] подтверждают возможность удовлетворительной аппроксимации распределений амплитуд и фаз как общим четырехпараметрическим законом, так и его частными случаями, к основным из которых можно отнести следующие [3, 4]:

- 1) трехпараметрические замирания ( $m_c = 0$ );
- 2) райсовские замирания ( $\sigma^2 = \sigma_c^2 = \sigma_s^2$ ,  $m_c^2 + m_s^2 \neq 0$ );
- 3) подрэлеевские замирания ( $m_c = m_s = 0$ ) или распределение Хойта, для которого наиболее глубокие замирания в рамках этой модели соответствуют случаю одностороннего нормального распределения ( $m_c = m_s = 0$ ,  $\sigma_c^2 = 0$ );
- 4) рэлеевские замирания ( $m_c = m_s = 0$ ,  $\sigma^2 = \sigma_c^2 = \sigma_s^2$ );
- 5) канал без замираний ( $\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = 0$ ).

Представление (2)-(3) достаточно сложны при практическом использовании и для их применения требуется выполнение условий дифференцируемости. В качестве модели коэффициента передачи (КС)  $\mu$  традиционно рассматриваются:

- 1) распределение Рэлея

$$W(\mu) = \frac{\mu}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right); \quad (5)$$

2) распределение Райса с  $\mu_0 = \sqrt{m_c^2 + m_s^2}$

$$W(\mu) = \frac{\mu}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\mu^2 + \mu_0^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\mu\mu_0}{\sigma^2}\right); \quad (6)$$

3) распределение Накагами с  $\Omega = \mu_0^2 + 2\sigma^2$

$$W(\mu) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \mu^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} \mu^2\right). \quad (7)$$

Подход, не требующий выполнения условий дифференцируемости, предложен в работе [1], где доказана теорема, согласно которой плотность распределения вероятностей (ПРВ) коэффициента передачи  $W(\mu)$  может быть представлена в виде разложения в ряд по распределению Райса-Накагами:

$$W(\mu) = q \exp\left(-\frac{m_s^2}{2\sigma_s^2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m H_{2m}(-i\chi)}{2^m (2m)!!}\right) (1-q^2)^m W_{m+1}^{RN}(\mu), \quad (8)$$

где  $H_n(x)$  – полином Эрмита  $n$ -ой степени и

$$q^2 = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_s^2} < 1, \quad \chi^2 = \frac{m_s^2}{2\sigma_s^2} \frac{q^2}{1-q^2},$$

$$W_{m+1}^{RN}(\mu) = \frac{\mu}{\sigma_c^2} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^m \exp\left(-\frac{\mu^2 + \mu_0^2}{2\sigma_c^2}\right) I_0\left(\frac{\mu\mu_0}{\sigma_c^2}\right)$$

– распределение Райса-Накагами.

Экспериментальные данные по замираниям в КВ диапазоне [5] подтверждают возможность удовлетворительной аппроксимации распределений амплитуд и фаз как общим четырехпараметрическим законом [1], так и его частными случаями, к основным из которых относятся перечисленные ранее трехпараметрические, райсовские, подрэлеевские, рэлеевские замирания и канал без замираний.

Следует подчеркнуть, что в рамках четырехпараметрической модели замирания амплитуд и фаз сигнала коррелируют, что подтверждается экспериментальными данными для различных радиотрасс. Что касается параметров  $m_c, m_s, \sigma_c^2, \sigma_s^2$  указанной модели, то в подавляющем большинстве реальных каналов связи их можно считать независимыми от времени [2, 3].

При некогерентном приеме кроме случайных распределений амплитуд, зависящих от коэффициента передачи, описываемого одним из распределений (5)-(8) необходимо также учитывать случайное распределение фазы сигнала.

Существуют различные методы описания случайных параметров сигналов в непрерывных каналах связи, к основным из которых можно отнести следующие модели.

1. Модели в форме конечномерных распределений вероятностей и соответствующих им моментных функций [6-13]. Это наиболее универсальный метод представления случайных процессов, полностью описывающий все характеристики и параметры процессов и их изменения

во времени. Существенным недостатком этого метода является его громоздкость, наиболее сильно проявляющаяся при использовании многомерных распределений или моментов высших порядков. В связи с этим, как правило, в большинстве случаев на практике ограничиваются описанием сигналов и помех в терминах первых двух моментов или соответствующих им спектральных характеристик. В то же время такое представление, как известно, является полным только для гауссовских случайных процессов и полей. Однако, во-первых, в непрерывных каналах связи действуют сосредоточенные по спектру и импульсные помехи, аппроксимация которых гауссовскими процессами неправомерна, а во-вторых, в каналах связи с замираниями амплитуды сигналов и коэффициенты передачи каналов описываются различными негауссовскими распределениями, что требует учета моментов более высоких порядков.

2. Модели в форме импульсных характеристик или комплексных передаточных функций непрерывных каналов связи [13, 14]. Данные методы позволяют получить законченные решения лишь и для стационарных в широком смысле случайных процессов, что не всегда имеет место на практике.
3. Модели в форме разложения импульсных характеристик в ряды, которые могут быть построены на основе оптимального разложения Карунена-Лоэва или некоторых подоптимальных ортогональных разложений, подробно описанных в [4]. При этом задавая коэффициенты разложения Карунена-Лоэва в виде координат разложения корреляционных функций (моментов второго порядка), как предложено в [4], получаем, что подобное представление справедливо для гауссовских случайных процессов.
4. Обобщенная модель канала Кронекера для представления импульсной характеристики канала [15, 16].
5. Модели в форме стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) и полученных на их основе разностных стохастических уравнений (РСУ), позволяющие описывать нестационарные негауссовские случайные процессы [2, 3, 17-29]. Отметим, что в форме СДУ могут быть представлены и модели, рассматриваемые в третьем и четвертом пунктах, о чем будет сказано в дальнейшем.

При рассмотрении и сравнении между собой различных методов описания и моделирования случайных процессов необходимо обращать внимание на две основных характеристики рассматриваемых методов.

1. Адекватность математических моделей, которая может быть оценена по различным критериям согласия, рассматриваемым далее.
2. Полнота представления различных классов случайных процессов: стационарные и нестационарные (в широком и узком смысле), эргодические и неэргодические (в классе стационарных), гауссовские и негауссовские.

По последней характеристике наиболее универсальным является представление процессов в форме СДУ, позволяющих описывать в общем случае нестационарные негауссовские случайные процессы.

Сущность представления случайного процесса, описывающего параметры сигнала в непрерывном канале связи, в форме СДУ состоит в том, что он интерпретируется в качестве выходного сигнала некоторой гипотетической динамической системы, называемой формирующим фильтром или уравнением состояния и возбуждаемой стандартным случайным процессом с известными характеристиками, в качестве которого для описания непрерывных процессов, как правило, выбирается белый гауссовский шум (БГШ), называемый формирующим шумом или шумом состояния. При моделировании импульсных процессов в качестве формирующего шума выбирается пуассоновский процесс. Такое описание относится к моделям феноменологического типа, тот есть формирующий фильтр отражает не реальные механизмы, происходящие при преобразовании сигналов и помех в непрерывном канале связи, а наблюдаемые на выходе канала статистические свойства сигналов и помех.

Модели в форме СДУ и (или) РСУ в отличие от представлений в форме конечномерных распределений вероятностей и соответствующих им моментных функций, позволяют непосредственно генерировать случайные процессы и поля с заданными статистическими характеристиками и использовать имеющиеся средства программных сред, таких как MATLAB и SIMULINK для их моделирования. Это упрощает построение программных имитаторов непрерывных каналов связи. Кроме того, запись уравнений состояния процесса в форме СДУ наряду с уравнением наблюдения позволяет непосредственно синтезировать алгоритмы линейной или нелинейной оптимальной фильтрации в непрерывном времени (аналоговая фильтрация). Аналогично этому представление уравнения состояния в форме РСУ позволяет синтезировать алгоритмы линейной или нелинейной оптимальной фильтрации в дискретном времени (цифровая фильтрация).

Несмотря на то, что основы применения метода переменных состояния в задачах статистической теории связи заложены в начале 60-х годов прошлого века [30-33], некоторые вопросы, связанные с практическим получением конкретного вида СДУ или РСУ по заданным характеристикам случайного процесса в канале или по наблюдениям за его реализациями, до последнего времени не были в полной мере решены.

К основным этапам представления математических моделей параметров сигналов в непрерывных каналах связи в форме СДУ относятся:

- 1) синтез СДУ на основе имеющейся априорной информации о случайных параметрах сигналов в непрерывных каналах связи;
- 2) решение СДУ путем вычисления стохастического интеграла (в форме Ито или Стратоновича) и получение в результате требуемой модели случайных параметров (модель в интегральном виде);
- 3) переход от СДУ к РСУ с использованием различных разностных схем [23, 34] и представление модели случайных параметров в виде раз-

ностной схемы, позволяющей моделировать нестационарные изменения случайного процесса во времени.

### Обобщение описание СДУ

Общий вид СДУ, описывающего нестационарный случайный процесс, записывается следующий образом:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) + G(x(t), t)v(t), \quad (9)$$

где  $x(t)$  – моделируемый  $N$ -мерный векторный случайный процесс,  $f(x(t), t)$  –  $N$ -мерный векторный коэффициент СДУ,  $G(x(t), t)$  –  $N \times N$ -мерный матричный коэффициент СДУ,  $v(t)$  –  $N$ -мерный векторный белый гауссовский шум (формирующий шум или шум состояния). Под решением задачи синтеза марковской модели случайного процесса в форме СДУ будем понимать алгоритм определения с заданной точностью функций  $f(x(t), t)$ ,  $G(x(t), t)$ ,  $v(t)$  и размерности  $N$ , определяющих СДУ (9), по известным вероятностным характеристикам моделируемого процесса  $x(t)$  [3]. При этом под заданием векторного БГШ  $v(t)$  понимаем определение матрицы спектральной плотности мощности его составляющих.

Для гауссовских процессов известно полное и математически строгое решение указанной задачи синтеза: оно определяется теоремами Дуба [3, 17], на основе которых можно получить коэффициенты линейного СДУ вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t)x(t) + G(t)v(t). \quad (10)$$

В негауссовском же случае общий алгоритм такого представления неизвестен.

Определяющим свойством непрерывного марковского процесса является то, что условная плотность вероятности перехода и безусловная плотность вероятности процесса удовлетворяет уравнению в частных производных вида

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (k_n(x, t)W(x, t)), \quad (11)$$

в котором

$$k_n(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \left[ (x(t + \Delta t) - x(t))^n \mid x(t) \right] \quad (12)$$

– кинетические коэффициенты марковского случайного процесса, где  $M[\cdot \mid \cdot]$  – оператор условного математического ожидания. Уравнение (11) справедливо для любых случайных процессов, для которых существуют кинетические коэффициенты (12). Кинетические коэффициенты являются такой же полной характеристикой случайных процессов, как и другие числовые характеристики (начальные и центральные моменты) при их количестве, стремящимся к бесконечности.

Частным случаем уравнения (11) является уравнение, которое можно получить для так называемых диффузионных марковских процессов. Для диффузионных процессов только первый  $k_1(x, t)$  и второй  $k_2(x, t)$  коэффициенты (12)

отличны от нуля, то есть  $k_n(\mathbf{x}, t) = 0$  для  $n \geq 3$ . При этом первый кинетический коэффициент  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{k}_1(\mathbf{x}, t)$  называется коэффициентом сноса, характеризующим среднее значение локальной скорости марковского процесса, а второй  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{k}_2(\mathbf{x}, t)$  называется коэффициентом диффузии, характеризующим локальную скорость изменения дисперсии приращения.

Для диффузионных процессов уравнение (11) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) W(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} (\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) W(\mathbf{x}, t)). \quad (13)$$

Уравнение (13) называется уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова (УФПК) [3, 17-20], которое решается при начальном условии  $W(\mathbf{x}, t_0) = W_0(\mathbf{x})$ .

Использование моделей в виде марковских случайных процессов вроде бы ограничивает память канала [35], что сужает область применимости данного класса моделей непрерывных каналов связи, но однако при увеличении размерности  $N$  случайного процесса  $\mathbf{x}(t)$  в уравнении (9) можно за счет усложнения СДУ достичь сколь угодно требуемой точности по любому из критерию синтеза и учесть память канала любой величины [3].

Кроме классических постановок задач моделирования непрерывных каналов связи для описания случайных параметров узкополосных задаваемых в гармоническом виде сигналов и помех (амплитуды, коэффициента передачи, начальной фазы и др.) представление в форме линейных (10) и нелинейных (9) СДУ в настоящее время получает более широкое распространение и в других радиотехнических задачах. Так, в [36] предложено использование непрерывных марковских процессов для моделирования сигналов в сетях радиодоступа с поддержкой блокчейна B-RAN (англ. Blockchain Radio Access Network). В данном случае количество запросов, ожидающих обслуживания, представляется  $N$ -мерным марковским непрерывным случайным процессом ( $N$ -определяется количеством полученных подтверждений для перехода к обслуживанию), описываемым многомерным СДУ (9). При этом учтен тот факт, что при ожидании обслуживания несколько запросов (для одного и того же блока) могут прибывать одновременно, то есть некоторые предыдущие события могут повлиять на текущую стадию состояния очереди, так что процесс в этом случае не является марковским. Однако, если этим можно пренебречь, например, когда поток запросов не такой интенсивный, то марковская модель процесса массового обслуживания может быть успешно использована на практике [36].

В работе [15] предложена гауссовская модель канала в сетях с неортогональным доступом и многоантенной приемо-передачей NOMA-MIMO (англ. Non Orthogonal Multiple Access-Multiple Input Multiple Output) на основе ортогонализации матричных функций в обобщенной модели Кронекера [15, 16, 37] с последующей оптимальной фильтрацией параметров для идентификации пользователей NOMA с помощью фильтра Калмана или подоптимальных бинарных алгоритмов проверки гипотез.

Таким образом, в качестве моделируемых процессов  $\mathbf{x}(t)$  в (9) или (10) могут рассматриваться параметры сигналов и помех в непрерывных каналах

связи, количество запросов, ожидающих подтверждения в сетях В-RAN, или параметры гауссовского канала в сетях NOMA-MIMO.

### Синтез одномерных СДУ

Стохастическое дифференциальное уравнение (9) для одномерного случая записывается в виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) + g(x(t), t)v(t), \quad (14)$$

где  $f(x(t), t)$  и  $g(x(t), t)$  одномерные коэффициенты СДУ,  $v(t)$  – БГШ со спектральной плотностью мощности  $N_0$ .

Случайный процесс  $x(t), t \geq t_0$  называется решением СДУ (14), удовлетворяющим начальному условию  $x(t_0) = x_0$ , если справедливо следующее интегральное представление:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau + \int_{t_0}^t g(x(\tau), \tau) dv(\tau). \quad (15)$$

В (15) в правой части присутствуют стохастические интегралы. В зависимости от способа построения соответствующей интегральной суммы стохастические интегралы подразделяются на стохастические интегралы Ито и симметризованные стохастические интегралы (или стохастические интегралы Стратоновича) [3, 17-19, 32]. Стохастический интеграл от некоторой детерминированной функции вводится как предел интегральных сумм, понимаемый в среднеквадратическом смысле. Интеграл, определённый на основе значений функции, взятых в крайних левых точках подынтервалов, называют стохастическим интегралом в смысле *Ито* [32], а при выборе указанных точек в серединах подынтервалов — стохастическим интегралом в смысле *Стратоновича* [33].

Коэффициенты СДУ (14) однозначно связаны с коэффициентами сноса и диффузии диффузионного марковского процесса следующим образом [14, 17-20]:

$$a(x, t) = f(x, t) + \frac{1}{4} \frac{\partial b(x, t)}{\partial x}, \quad b(x, t) = \frac{1}{2} N_0 g^2(x(t), t). \quad (16)$$

Выражение (16) позволяет однозначно определить коэффициенты сноса и диффузии по коэффициентам СДУ (13) и наоборот – коэффициенты СДУ по коэффициентам сноса и диффузии. Таким образом, для синтеза одномерных СДУ возможно, зная УФПК для плотности распределения вероятности, найти коэффициенты сноса и диффузии в предположении диффузионной изотропности марковского процесса, а затем из (16) найти неизвестные коэффициенты СДУ в виде

$$f(x, t) = a(x, t) - \frac{1}{4} \frac{\partial b(x, t)}{\partial x}, \quad g(x, t) = \sqrt{\frac{2b(x(t), t)}{N_0}}. \quad (17)$$

В то же время знание плотности распределения вероятностей не всегда дает однозначное решение поставленной задачи, так как по ней невозможно определить неизвестные коэффициенты сноса и диффузии, а по ним – коэффициенты

СДУ в виде (17). Так, даже зная плотность распределения вероятностей и записав ее в виде УФПК, мы получим уравнение с двумя неизвестными – коэффициентами сноса и диффузии. Поэтому для нахождения решения, как правило, вводят дополнительные ограничения на один из коэффициентов и из УФПК определяют другой или используют различные приближенные методы поиска коэффициентов СДУ.

Приближенные методы синтеза СДУ предложены в [3, 20]. В качестве критериев приближения при синтезе используются следующие.

1. Метод, основанный на многократном применении процедуры линейного программирования. Информационная мера Кульбака, характеризующая расхождение между  $N$ -мерными плотностями вероятностей реального процесса и его  $N$ -мерной марковской модели. Эта величина как мера расхождения удобна еще и тем, что служит верхней границей байесовского риска [38]. Данный критерий представляется следующим образом:

$$I_N = \int_{\mathbb{R}^N} W_N(\mathbf{x}) \log \frac{W_N(\mathbf{x})}{\mathcal{W}'_N(\mathbf{x})} d\mathbf{x},$$

характеризующий расстояние между  $N$ -мерными плотностями реального процесса  $W_N(\mathbf{x})$  и его марковской модели  $\mathcal{W}'_N(\mathbf{x})$ .

2. Расстояние Бхаттачария между соответствующими плотностями  $W_N(\mathbf{x})$  и  $\mathcal{W}'_N(\mathbf{x})$ .
3. Критерии согласия [39], то есть статистическое правило, по которому принимается или отвергается статистическая гипотеза о том, что полученная по математической модели плотность распределения вероятностей соответствует теоретической плотности с некоторым заданным уровнем значимости.

В качестве методов синтеза моделей в форме СДУ предложены три следующих метода [3]:

- 1) метод, основанный на многократном применении процедуры линейного программирования;
- 2) метод восстановления оператора по собственным числам;
- 3) синтез одномерных и двумерных моделей в виде СДУ по одномерным распределениям и корреляционным функциям.

Ниже приведены примеры синтезированных в известных работах одномерных СДУ для соответствующих вероятностных распределений.

1. Для распределения Накагами с плотностью вида (7) для  $\Omega = 1/m$  СДУ имеет вид [3]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{4m} \left( \frac{2m-1}{x(t)} - 2mx(t) \right) + \sqrt{\frac{1}{2m}} v(t).$$

2. Гамма-распределение с плотностью распределения вероятности вида

$$W(x) = \frac{x^\alpha}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), x \geq 0,$$

где  $\alpha \geq -1$ ,  $\beta > 0$  – параметры распределения. Для данного распределения в [3] методом линейного программирования получено СДУ

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta x(t) \left( \frac{\alpha}{x(t)} - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{\beta}{2} + \sqrt{2\beta x(t)}v(t).$$

3. Для распределения Рэлея (5) в [2] из УФПК по коэффициентам сноса и диффузии получено следующее СДУ:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{4\sigma^2}{N_0}x(t) + \frac{N_0}{4x(t)} + v(t).$$

4. Случайный процесс с двухсторонним распределением Лапласа, имеющий ПРВ  $W(x) = \beta \exp(-2\beta|x|)$ , где  $\beta > 0$  – параметр распределения. Для этого случая при  $g(x) = \text{const}$  в [20] получено следующее СДУ:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \text{sgn } x(t) + \sqrt{\frac{1}{2\beta}}v(t).$$

### Примеры решение задачи синтеза одномерных СДУ

Как было показано, при заданной плотности распределения  $W(x)$  стационарного случайного процесса задача синтеза СДУ формально сводится к поиску коэффициентов СДУ  $f(x)$  и  $g(x)$ . Само одномерное СДУ (14) в таком случае примет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x) + g(x)v(t).$$

В представленном уравнении коэффициенты не имеют зависимости от времени  $t$ , в силу указанного свойства стационарности процесса. Таким образом, выражение, связывающее  $f(x)$  и  $g(x)$  можно найти через представление  $W(x)$  в качестве стационарного решения соответствующего УФПК (13). Для поиска двух неизвестных величин удобно положить  $g(x) \equiv g$ , тогда в итоге получим [20]:

$$f(x) = \frac{g^2}{2} \frac{d}{dx} \ln W(x). \quad (18)$$

Для поиска значения  $g$  предложен ряд алгоритмов его оценки и в общем случае данная процедура является нетривиальной задачей [20]. Рассмотрим несколько примеров ее решения для распределения Райса, равномерного распределения и распределения фон Мизеса-Тихонова.

Распределением Райса часто описывают изменения амплитуды сигнала в многолучевых каналах связи с наличием прямого тракта распространения. Например, подобные условия распространения присутствуют в радиорелейных и спутниковых каналах связи [40].

Как было указано выше функция плотности вероятности распределения Райса задается формулой:

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + \mu_0^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{x\mu_0}{\sigma^2}\right). \quad (19)$$

При интерпретации случайной величины  $x$  как амплитуды сигнала параметры распределения (19) имеют следующий физический смысл:  $\mu_0^2$  – мощность сигнала прямого луча распространения,  $2\sigma^2$  – мощность суперпозиции отраженных лучей.

С точки зрения приложений удобно ввести дополнительную пару параметров для описания  $W(x)$ :  $K = \mu_0^2 / 2\sigma^2$  – отношение мощностей прямого луча и побочных (коэффициент Райса) и  $S = \mu_0^2 + 2\sigma^2$  суммарная мощность на входе приемного устройства.

Наличие в функции плотности распределения (19) модифицированной функции Бесселя  $I_0(\cdot)$  сильно затрудняет поиск значения  $g$ , поэтому в данной работе будут рассмотрены синтез СДУ для двух аппроксимаций  $W(x)$ , которые основаны на асимптотическом разложении функции  $I_0(\cdot)$  [41].

В первом случае предложим аппроксимировать  $W(x) \approx \mathcal{N}(x | \mu_0, \sigma^2)$  гауссовой плотностью распределения с математическим ожиданием  $\mu_0$  и дисперсией  $\sigma^2$ , что как утверждается в [41], целесообразно при  $K \gg 1$ . Для распределения  $\mathcal{N}(x | \mu_0, \sigma^2)$  СДУ широко известно и имеет вид [20]:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x - \mu_0}{\tau_c} + \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\tau_c}}v(t),$$

где  $\tau_c$  – интервал корреляции случайного процесса. Данную аппроксимацию далее будем именовать *линейной гауссовской*, так как полученное СДУ линейно относительно  $x$ .

Второй вариант СДУ основан на аппроксимации  $I_0(\cdot)$  с учетом членов более высокого порядка, что приводит к выражению:

$$W(x) \approx \sqrt{\frac{x}{\mu_0}} \mathcal{N}(x | \mu_0, \sigma^2).$$

Согласно выше указанной формуле (18), первый коэффициент СДУ в данном случае примет вид:

$$f(x) = \frac{g^2}{2} \left( \frac{1}{2x} - \frac{x - \mu_0}{\sigma^2} \right).$$

Оценить значение  $g$  можно при помощи метода статистической линеаризации [42], что в данном случае эквивалентно переходу к первому рассмотренному варианту линейной аппроксимации  $W(x)$ . Таким образом,  $g = \sqrt{2\sigma^2 / \tau_c}$ . В итоге СДУ примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sigma^2}{\tau_c} \left( \frac{1}{2x} - \frac{x - \mu_0}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\tau_c}}v(t).$$

По аналогичным причинам полученная аппроксимация будет именоваться *нелинейной гауссовской*.

Для сравнения качества аппроксимации целевого случайного процесса на основе полученных СДУ было произведено их численного интегрирование ме-

тодом Рунге-Кутта с шагом  $\Delta t = \tau_c$  относительно различных значений параметра  $K$  при  $S = 1$ .

Формальным критерием оценки качества выступило усредненное значение теста Колмогорова-Смирнова [39] (0 или 1) на соответствие выборочной функции распределения, полученной на основе результатов интегрирования СДУ, и функции распределения Райса. Значение уровня значимости – 0,05.

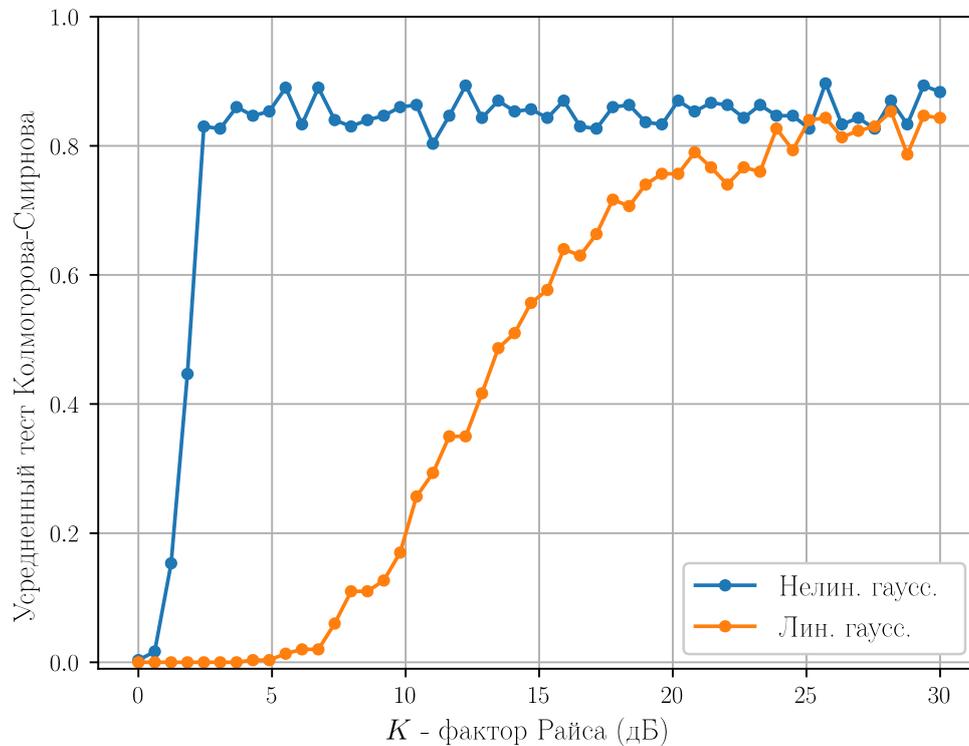


Рис. 1. Среднее значение теста Колмогорова-Смирнова для СДУ нелинейной и линейно гауссовской аппроксимации распределения Райса

Результаты численного моделирования представлены на рис 1, из которых следует что нелинейная аппроксимация имеет значительно большей диапазон применимости по сравнению с линейной.

Как уже было отмечено выше, для полноты описания эффектов распространения в многолучевых каналах связи так же необходимо учитывать искажения, вносимые в фазу принимаемого сигнала. Ниже представлены СДУ, описывающих фазу для двух типов замираний: рэлеевского и райсовского.

В случае рэлеевского замирания предполагается, что распределение фазы отраженных лучей является равномерным в интервале от  $-\pi$  до  $\pi$  [43].

СДУ для равномерного распределения общего вида было получено приближенным методом в [20]. Однако, особенностью данного распределения является принципиальная ограниченность значений соответствующей случайной величины в конечном интервале. С учетом этого факта в данной работе предложен уточненный вид искомого уравнения.

Выражение (18), связывающее коэффициент сноса  $f(x)$  и плотность вероятности  $W(x)$ , неявно предполагает, что последняя имеет область определения

всю вещественную ось. Представить в требуемом виде  $W(x)$  равномерного распределения на интервале  $[a, b]$  можно следующим образом:

$$W(x) = \frac{\theta(x-a) - \theta(x-b)}{b-a},$$

где  $\theta(x)$  – функция Хэвисайда. Таким образом, соотношением (18) преобразуется к следующему образам:

$$f(x) = \frac{g^2}{2} \frac{\delta(x-a) - \delta(x-b)}{\theta(x-a) - \theta(x-b)},$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

С учетом значения  $g^2 = 2(b-a)^2 / (\pi^2 \tau_c)$  [20] получается предлагаемый вид искомого СДУ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(b-a)^2}{\pi^2 \tau_c} \frac{\delta(x-a) - \delta(x-b)}{\theta(x-a) - \theta(x-b)} + \frac{(b-a)}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tau_c}} v(t),$$

из которого можно получить СДУ равномерного распределения в интервале  $[-\pi, \pi]$  для моделирования искажений фазы принимаемого сигнала в случае рэлеевского замирания.

При шаге интегрирования  $\Delta t = \tau_c = 0,01$  методом Рунге-Кутты СДУ для равномерного распределения дает усредненную ошибку теста Колмогорова-Смирнова  $\approx 0,8$ . В приложении 1 приведен способ аппроксимации функций  $\delta(x)$  и  $\theta(x)$ , использованные при численном интегрировании СДУ.

Для случая райсовского замирания использование явного распределения фазы представляется затруднительным в силу сложности формального описания его ПРВ [43]. В качестве аппроксимации данного распределения рассматривается распределение фон Мизеса-Тихонова [44], ПРВ которого задается как:

$$W(x) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp(\kappa \cos(x - \phi)),$$

где  $x \in [-\pi, \pi]$ , а  $\phi$  и  $\kappa > 0$  – математическое ожидание и параметр концентрации.

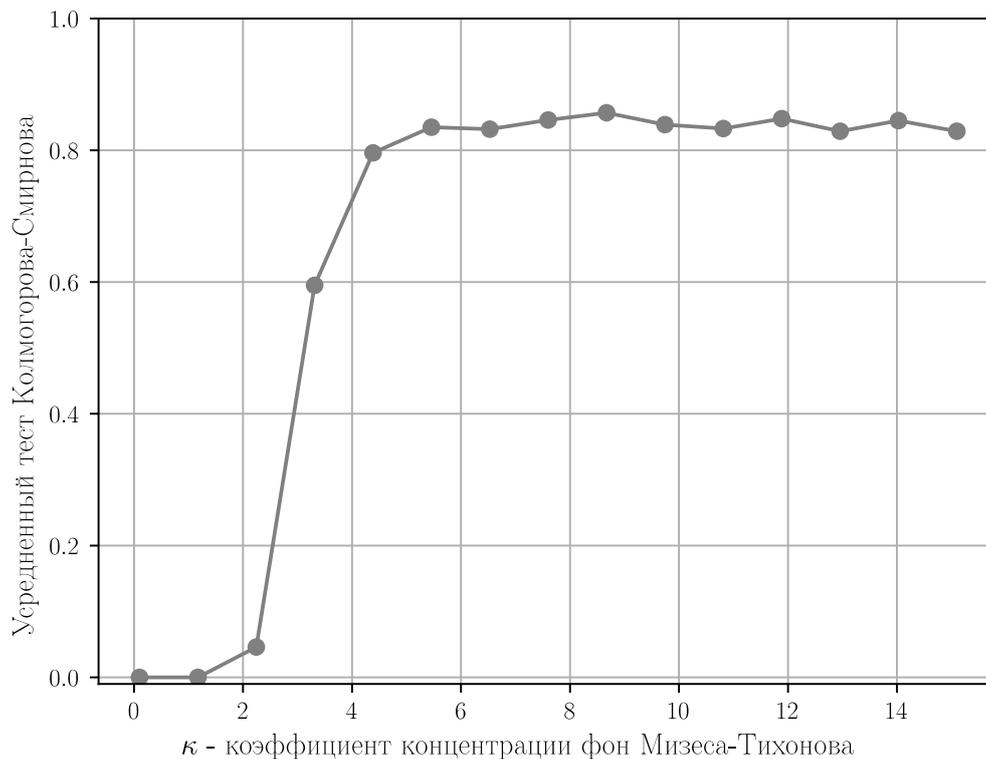


Рис. 2. Среднее значение теста Колмогорова-Смирнова для СДУ распределения фон Мизеса-Тихонова

Используя формулу (18), можно определить коэффициент сноса для искомого СДУ:

$$f(x) = -\frac{g^2}{2} \kappa \sin(x - \phi).$$

Исходя из факта, что при больших значениях параметра  $\kappa$  распределение фон Мизеса-Тихонова стремится к гауссовскому с дисперсией  $\sigma^2 = 1/\kappa$  [45], то с учетом СДУ нормального распределения, для коэффициента диффузии можно положить, что  $g^2 = 2/(\kappa\tau_c)$ . Таким образом, СДУ для распределения фон Мизеса-Тихонова при больших  $\kappa$  можно записать следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sin(x - \phi)}{\tau_c} + \sqrt{\frac{2}{\kappa\tau_c}}v(t).$$

На рис. 2 представлены усредненные значения теста Колмогорова-Смирнова для полученного СДУ относительно различных  $\kappa$ , из которого следует применимость последнего при  $\kappa \geq 4$ .

### Синтез многомерных СДУ

Математическое моделирование параметров частично-когерентных сигналов (ЧКС) является одним из этапов исследования каналов связи и синтеза алгоритмов обработки сигналов. Одним из конструктивных подходов к моделированию ЧКС является подход, основанный на представлении таких сигналов в форме векторных стохастических дифференциальных уравнений. При этом разработка таких моделей так же, как и в рассмотренном ранее одномер-

ном случае, заключается в решении задачи синтеза СДУ, то есть определения их размерности и коэффициентов [2, 3, 15, 20, 36]. В работах [2, 21, 23-25, 28, 29] на основе метода функциональной аппроксимации многомерных плотностей распределения вероятностей [46] осуществлено решение задачи синтеза СДУ для моделирования ЧКС в пространственно-временном смысле (ЧКС ПВС). Однако кроме ЧКС ПВС возможно возникновение эффекта частичной когерентности и в частотной области (ЧКС ЧО). Рассмотрим оба типа частично-когерентных сигналов и их математическое моделирование в форме векторных СДУ более подробно.

Синтез многомерных СДУ вида (9) достаточно затруднителен и решения получены лишь для некоторых случаев с использованием различных приближенных методов. Так, например, для синтеза многомерных СДУ достаточно эффективным показал себя метод функциональной аппроксимации многомерных плотностей распределения вероятностей вида [46]

$$W(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N w(x_i) \left( 1 + \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{r_{ij}}{r_{jj}r_{ii}} x_i^0(t) x_j^0(t) \right), \quad (20)$$

где  $W(\mathbf{x})$  –  $N$ -мерная плотность,  $w(x_i)$  – одномерные плотности,  $x_i^0(t) = x_i(t) - M[x_i(t)]$  – центрированное значение  $x_i(t)$ . Аппроксимация (20) справедлива с точностью до одномерных негауссовских ПРВ, составляющих  $\mathbf{x}(t)$  –  $w(x_i)$  и элементов корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \{r_{ij}\}$ . При использовании для представления метода функциональной аппроксимации (20) необходимо учитывать два фактора. Во-первых, одномерные плотности  $w(x_i)$  являются в общем случае негауссовскими, что предполагает и негауссовость многомерной плотности  $W(\mathbf{x})$ . Однако, во-вторых, аппроксимация справедлива с точностью до вектора  $\mathbf{m} = (M[x_1(t)] = m_1, M[x_2(t)] = m_2, \dots, M[x_N(t)] = m_N)^T$  средних значений и корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$ , что предполагает гауссовость многомерной плотности. Поэтому строго говоря функциональную аппроксимацию (20) можно также назвать квазигауссовской аппроксимацией многомерной плотности распределения вероятностей векторного непрерывного случайного процесса с негауссовскими одномерными плотностями его составляющих.

На основе функциональной аппроксимации в [36] получена многомерная плотность распределения вероятностей для диффузионно-изотропного случайного процесса, описывающего количество запросов, ожидающих обслуживания в сети В-RAN, для которого выполняются потенциальные условия вида

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{f_i(x, t)}{g_{ii}(x, t)} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{f_j(x, t)}{g_{jj}(x, t)} \right)$$

при диагональной матрице вида

$$\mathbf{G}(x, t) = \begin{pmatrix} g_{11}(x, t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & g_{NN}(x, t) \end{pmatrix}.$$

При этом синтезировано СДУ вида (9), для которого получено, что

$$f_i(x, t) = -\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{in} x_n, \quad g_{ii}(x, t) = \frac{D_i}{2\alpha_{ii}}$$

где  $D_i$  – дисперсия  $x_i$ , а  $\alpha_{in}$  находятся из численного решения системы

$$\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{ki} m_i, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

в которой  $m_i$  – среднее значение  $x_i$ .

В [15] на основе (20) получена многомерная плотность распределения вероятностей для случайного процесса, моделирующего канал в сетях NOMA-MIMO. В обоих случаях получены многомерные плотности на основе гауссовских одномерных плотностей  $w(x_i)$  в (20), для которых синтезированы многомерные линейные СДУ вида (10).

Основываясь на функциональной аппроксимации (20), в [2, 21, 23-25, 28, 29] были получены многомерные нелинейные СДУ вида (9) для негауссовских частично-когерентных в пространственно-временном смысле сигналов.

Для моделирования сигналов в непрерывных каналах связи, представленных в форме СДУ, и построения программных имитаторов целесообразно осуществить последующий переход от синтезированного СДУ вида (9) к РСУ следующего вида:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k, k) + \Gamma(\mathbf{x}_k, k) \mathbf{v}_k, \quad (21)$$

где  $k$  – момент дискретного времени,  $\mathbf{v}_k$  –  $N$ -мерный БГШ,  $\Phi(\mathbf{x}_k, k)$  –  $N$ -мерный векторный и  $\Gamma(\mathbf{x}_k, k)$  –  $N \times N$ -мерный матричный коэффициенты РСУ. Переход от СДУ (9) к РСУ (21) может быть выполнен с использованием различных разностных схем, к наиболее распространенным из которых относятся схемы Эйлера, Рунге-Куты, Кранка-Николсона, Эйлера-Коши и неявная схема [47, 48]. В [34] проанализированы эти разностные схемы и показано, что при моделировании необходимо учитывать не только точность, но и устойчивость разностных схем. При этом для негауссовских случайных процессов наиболее предпочтительными характеристиками по точности и устойчивости обладает схема Кранка-Николсона.

Важно отметить, что запись уравнения состояния случайного процесса в форме СДУ (9) позволяет перейти к синтезу алгоритмов линейной и нелинейной фильтрации. Так, если мы имеем СДУ (9), а наблюдаемый процесс можно записать в форме уравнения наблюдения вида

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{q}(t), \quad (22)$$

где  $\mathbf{z}(t)$  –  $M$ -мерный вектор наблюдения,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t)$  – известный  $M$ -мерный вектор, задающий взаимосвязь между  $\mathbf{x}(t)$  из (22) и  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{q}(t)$  –  $M$ -мерный векторный белый гауссовский шум (шум наблюдения).

Если (9) и (22) представляют собой линейные уравнения состояния и наблюдения гауссовского случайного процесса  $\mathbf{x}(t)$  вида

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t), \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}(t), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{F}(t)$  и  $\mathbf{G}(t)$  –  $N \times N$ -мерные матрицы,  $\mathbf{H}(t)$  –  $M \times N$ -мерная матрица, то по ним возможен синтез непрерывного фильтра Калмана [27, 49-52]. В случае же нелинейных уравнений (23) и (31), описывающих негауссовский случайный процесс  $\mathbf{x}(t)$ , по ним можно синтезировать нелинейный фильтр в виде, например, линеаризованного фильтра Калмана [49] или фильтра Стратоновича [18, 19, 52] для различных приложений.

### Частично-когерентные сигналы в пространственно-временном смысле

Рассмотрим сигналы различной степени пространственной когерентности. Существуют три основных способа описания сигналов на выходе антенных элементов многоэлементных антенных систем в зависимости от того, в ближней или дальней зоне расположены источники сигналов и помех, а также от расстояния между антенными элементами.

В первом случае, когда все источники излучения расположены в дальней зоне приёмной антенны и начальная фаза принимаемых сигналов и помех одинакова на выходе всех антенных элементов и к ней добавляется только детерминированная составляющая, зависящая от углов прихода и геометрии антенной системы (пространственный набег фазы), то такие сигналы называются пространственно-когерентными сигналами (ПКС) [53]. При этом сигнал на выходе первого антенного элемента может быть задан одномерным СДУ вида (14). В данном случае задача синтеза СДУ состоит в определении коэффициентов и спектральной плотностью мощности  $N_0$ . Методы синтеза и примеры одномерных СДУ изложены в предыдущих пунктах настоящей статьи.

Во втором случае, когда часть источников излучений может находиться в ближней зоне приёмной антенны (переотражения радиоволн от поверхности и от элементов конструкции объекта), значения начальной фазы в различных элементах не одинаковы, но коррелированы друг с другом. Такие сигналы называются частично-когерентными сигналами (ЧКС) [53]. В этом случае необходимо их представление многомерными (векторными) СДУ. В первом и втором случае расстояние между антенными элементами выбираются из условия возможности осуществления пространственно-временной обработки сигналов и составляют величину  $d \approx 0,5\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны.

В третьем случае расстояние между элементами  $d > \lambda$  и сигналы на выходе различных элементов являются некоррелированными, каждый из них может быть описан своим одномерным СДУ. Такие сигналы называются пространственно-некогерентными сигналами (ПНКС) [53], их амплитуды и фазы описываются  $N$  независимыми одномерными СДУ (по числу антенных элементов), а обработка таких сигналов осуществляется в устройствах ПВОС с пространственным разнесением, принимаемым по параллельным пространственным каналам [6].

Векторное СДУ для представления ЧКС ПВС имеет вид (9), для решения задачи синтеза которого можно воспользоваться методом функциональной ап-

проксимации многомерных плотностей распределения вероятностей вида (20) для СДУ (9) откуда получим выражение

$$\frac{\partial x_k(t)}{\partial t} = \frac{B_0}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \ln w_0(x_k) + \frac{\sum_{j=1 \neq k}^N \frac{r_{jk}}{r_{jj} r_{kk}} x_j^0(t)}{1 + \sum_{i=2}^N \sum_{j=1 \neq k}^N \frac{r_{jk}}{r_{jj} r_{kk}} x_j^0(t)} \right) + \sqrt{B_0} v_k(t), \quad (23)$$

где  $B_0$  – коэффициент диффузии. Нелинейное СДУ (23) позволяет моделировать векторные негауссовские случайные процессы  $x(t)$ .

Воспользуемся уравнением (21) и представив, что огибающая распределена по закону Рэлея, то есть

$$w(x_k) = \frac{x_k}{\sigma_k^2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_k^2}\right),$$

получим

$$\frac{\partial x_k(t)}{\partial t} = \frac{B_0}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\frac{x_k^2}{2\sigma_k^2} \ln \frac{x_k}{\sigma_k} \right) + \frac{\sum_{j=1 \neq k}^N \frac{r_{jk}}{r_{jj} r_{kk}} x_j^0(t)}{1 + \sum_{i=2}^N \sum_{j=1 \neq k}^N \frac{r_{jk}}{r_{jj} r_{kk}} x_j^0(t)} \right) + \sqrt{B_0} v_k(t).$$

Окончательно для распределения Рэлея можно записать векторное СДУ для случая моделирования ЧКС в виде

$$\frac{\partial x_k(t)}{\partial t} = \frac{B_0}{2} \left( \left( -\frac{x_k^2}{2\sigma_k^2} - \frac{x_k}{\sigma_k^2} \ln \frac{x_k}{\sigma_k} \right) + \frac{\sum_{j=1 \neq k}^N \frac{r_{jk}}{r_{jj} r_{kk}} x_j^0(t)}{1 + \sum_{i=2}^N \sum_{j=1 \neq k}^N \frac{r_{jk}}{r_{jj} r_{kk}} x_j^0(t)} \right) + \sqrt{B_0} v_k(t). \quad (24)$$

Данное СДУ позволяет моделировать ЧКС ПВС, компоненты которых распределены по закону Рэлея.

Аналогично можно получить СДУ для ЧКС ПВС, компоненты которого распределены по К-закону распределения, которым, как показано в [54-56], хорошо аппроксимируется огибающая сигнала над морской поверхностью. При этом К-распределение компонент можно записать в виде

$$w_0(x_k) = \frac{2}{a_k \Gamma(v_k + 1)} K_{v_k} \left( \frac{x_k}{a_k} \right) \left( \frac{x_k}{2a_k} \right)^{v_k + 1}, \quad (25)$$

где  $a_k > 0$ ,  $v_k > -1$  – параметры масштаба и формы К-распределения соответственно,  $K_{v_k}(\cdot)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода порядка  $v_k$ .

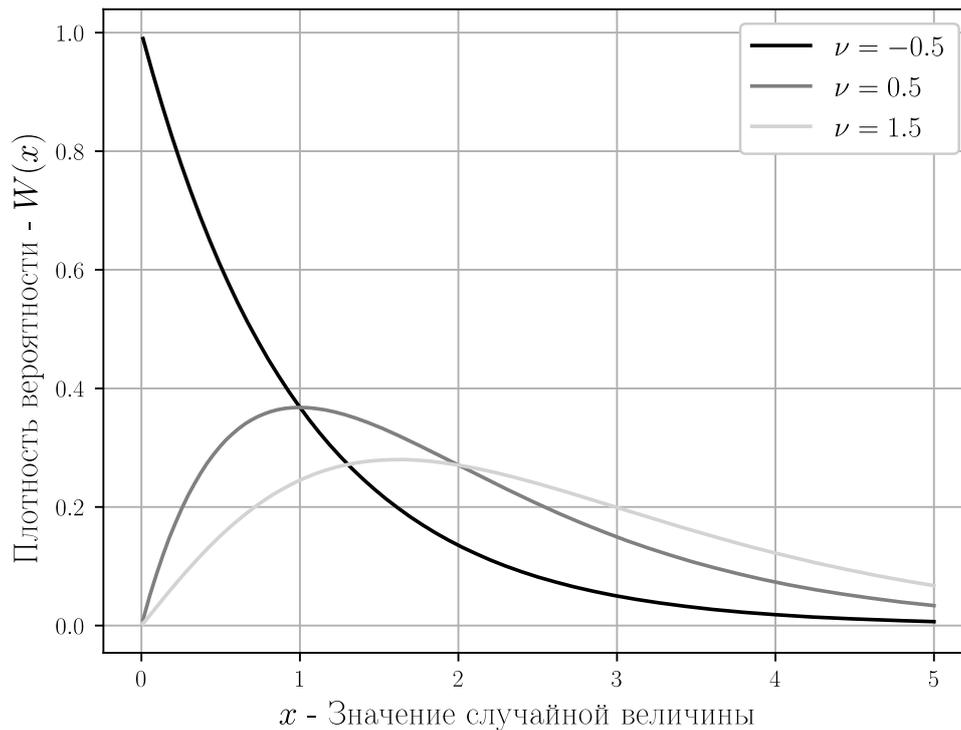


Рис. 3. Плотность распределения вероятностей для К-распределения

На рис. 3 [56] показаны графики  $w_0(x_k)$  из (25) для нескольких значений параметра формы  $\nu_k$  и единичного масштаба, то есть  $a_k = 1$ .

Воспользовавшись методом функциональной аппроксимации (20), получим коэффициенты векторного СДУ для К-распределения в виде

$$\frac{\partial x_k(t)}{\partial t} = \frac{B_0}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \left( \frac{2}{a_k \Gamma(\nu_k + 1)} K_{\nu_k} \left( \frac{x_k}{a_k} \right) \left( \frac{x_k}{2a_k} \right)^{\nu_k + 1} \right) + \frac{\sum_{j=1 \neq k}^N \frac{r_{jk}}{r_{jj} r_{kk}} x_j^0(t)}{1 + \sum_{i=2}^N \sum_{j=1 \neq k}^N \frac{r_{jk}}{r_{jj} r_{kk}} x_j^0(t)} \right] + \sqrt{B_0} \nu_k(t), \quad (26)$$

Таким образом, полученные векторные СДУ (24) и (26) позволяют моделировать ЧКС ПВС.

### Частично-когерентные сигналы в частотной области

Явление частичной когерентности в частотной области возникает при приеме широкополосных сигналов в нестационарных каналах с многолучевым распространением. Данный феномен следует из факта неоднородности доплеровского смещения частоты в полосе принимаемого сигнала

В общем случае для сигнала  $s(t)$ , расположенного на несущей частоте  $F_c$  с полосой шириной  $B$ , доплеровское смещение  $F_d(F_s, t)$  каждой частотной компоненты сигнала задается формулой:

$$F_d(F_s, t) = (F_c + F_s) d(t), F_s \in \left( F_c - \frac{B}{2}, F_c + \frac{B}{2} \right),$$

где  $d(t)$  – нормированное доплеровское смещение, являющееся отношением радиальной компоненты скорости приемника относительно передатчика к скорости света.

При дискретизации частоты  $F_s$  с равномерным шагом  $\Delta F$  представленное выражение примет вид:

$$F_d^k(t) = F_k d(t), F_k \in \left( F_c + \left( k - \frac{K}{2} \right) \Delta F \right).$$

Указанная формула применима в том числе для сигналов, синтезированных по принципу ортогонального частотного мультиплексирования (OFDM), который широко применяется в различных системах связи для борьбы с частотно-селективными замираниями. Так, при выборе  $\Delta F$  меньшей полосы когерентности канала, замирание в каждой поднесущей можно считать плоским.

С учетом указанных характеристик канала искаженную копию сигнала  $s(t)$  в низкочастотном представлении можно описать следующим выражением:

$$r(t) = \sum_{k=0}^{K-1} r_k(t) \exp \left( j2\pi \left( k - \frac{K}{2} \right) \Delta F t \right) + v(t), \quad (27)$$

в котором  $j = \sqrt{-1}$ ,  $v(t)$  – белый гауссовский шум заданной мощности  $\sigma^2$ . В свою очередь принимаемые поднесущие  $r_k(t)$  имеют вид:

$$r_k(t) = c_k(t) s_k(t) \exp(j2\pi\psi_k(t)), \psi_k(t) = \psi_k(0) + F_k \int_0^t d(t') dt',$$

где  $s_k(t)$  – соответствующую поднесущая  $s(t)$ ,  $\psi_k(t)$  – нормированная доплеровская фаза сигнала, а  $c_k(t)$  – комплексный множитель, характеризующий эффект от суперпозиции отраженных лучей  $s_k(t)$ .

Для рассматриваемого случая плоского замирания случайный множитель  $c_k(t)$  можно представить выражением [57]:

$$c_k(t) = a_k(t) \exp(-j2\pi\varphi_k(t)), \varphi_k(t) = \varphi_k(0) + F_k\theta(t), \quad (28)$$

в котором  $a_k(t)$  – амплитуда, распределенная по случайному закону согласно виду замирания,  $\varphi_k(t)$  – нормированная фаза. Величину  $\theta(t)$  можно интерпретировать как суммарную временную задержку распространения всех отраженных лучей  $s_k(t)$ . В силу зависимости множителя при  $\theta(t)$  в выше представленном выражении от индекса поднесущей соответствующие сигналы будут иметь различные значения времени когерентности:

$$T_k(t) = \frac{1}{2F_d^k(t)}.$$

Следовательно, подобные сигналы можно рассматривать как частотно-частично-когерентные или частично-когерентные в частотной области.

Для иллюстрации явления частотной частичной когерентности рассматривается стационарный канал с замираниями рэлеевского типа. С целью синтеза алгоритмов фильтрации предлагается сформировать описание в виде многомерного (векторного) СДУ.

В силу эквивалентности выражений, описывающих  $c_k(t)$ , с точностью до частотного индекса  $k$ , первично представим описание СДУ на одной поднесущей. Для упрощения нотации далее частотный индекс  $k$  будет опускаться до момента явного указания.

В случае постоянного доплеровского смещения процесс  $c(t)$  описывается стационарным случайным процессом со спектральной плотностью мощности (СПМ) Джейкса-Кларка [43]:

$$C_J(\nu) = \begin{cases} \frac{2\sigma^2}{\pi F_d \sqrt{1 - (\nu / F_d)^2}}, & \text{для } |\nu| \leq F_d; \\ 0, & \text{для } |\nu| > F_d. \end{cases}$$

Очевидно, что из-за ограниченности СПМ  $C_J(\nu)$  генерирующий фильтр обладает импульсной характеристикой бесконечной вдоль всей оси времени, а следовательно, является нереализуемым. Поэтому процедуру синтеза СДУ предполагается провести относительно реализуемого фильтра, аппроксимирующего частотный профиль мощности  $C_J(\nu)$ .

В качестве аппроксимирующего фильтра предлагается использовать линейный осциллятор Дуффинга [20]:

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\Delta\Omega \frac{dc(t)}{dt} + \Omega_0^2 c(t) = G\xi(t), \quad G = 2\alpha\Omega_0^2 \sqrt{\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}},$$

в котором  $\Omega_0 = 2\pi F_d$  – центральная частота пропускания в радианах,  $\Delta\Omega$  – полоса пропускания в радианах по уровню 3 дБ относительно  $\Omega_0$ ,  $G$  – коэффициент усиления и  $\xi(t)$  – комплексный белый гауссовский шум единичной мощности. Для аппроксимации значение  $\Delta\Omega = \alpha\Omega_0 = \alpha 2\pi F_d$ , где котором  $\alpha \approx 0,01$ , что обосновано в приложении 2.

С целью дальнейшего описания динамики замираний на всех поднесущих в виде единой системы СДУ представленное уравнение Дуффинга необходимо преобразовать в эквивалентный вид как систему одномерных СДУ в пространстве состояний:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \mathbf{A}c(t) + G\xi(t)\mathbf{e},$$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dc(t)}{dt} \\ c(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2\alpha\Omega_0 & -\Omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Синтез многомерного СДУ, описывающего замирания во всей полосе, осуществляется путем масштабирования относительно индекса  $k$  системы СДУ для сигнала на одной поднесущей:

$$\frac{d\mathbf{c}_B(t)}{dt} = \mathbf{A}_B \mathbf{c}_B(t) + \xi(t)\mathbf{g}_B,$$

$$\mathbf{c}_B(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_0(t) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{K-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{K-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_B = \begin{pmatrix} G_0\mathbf{e} \\ \vdots \\ G_{K-1}\mathbf{e} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где  $A_k$  и  $G_k$  – коэффициенты из соответствующих уравнений  $k$ -ых поднесущих, а  $c_B(t)$  – общий вектор-состояния. Важно отметить, что единственный шумовой сигнал  $\xi(t)$  участвует в синтезе замирания  $c_k(t)$  на каждой подполосе в силу единой причины их возникновения, выраженной в уравнении (28).

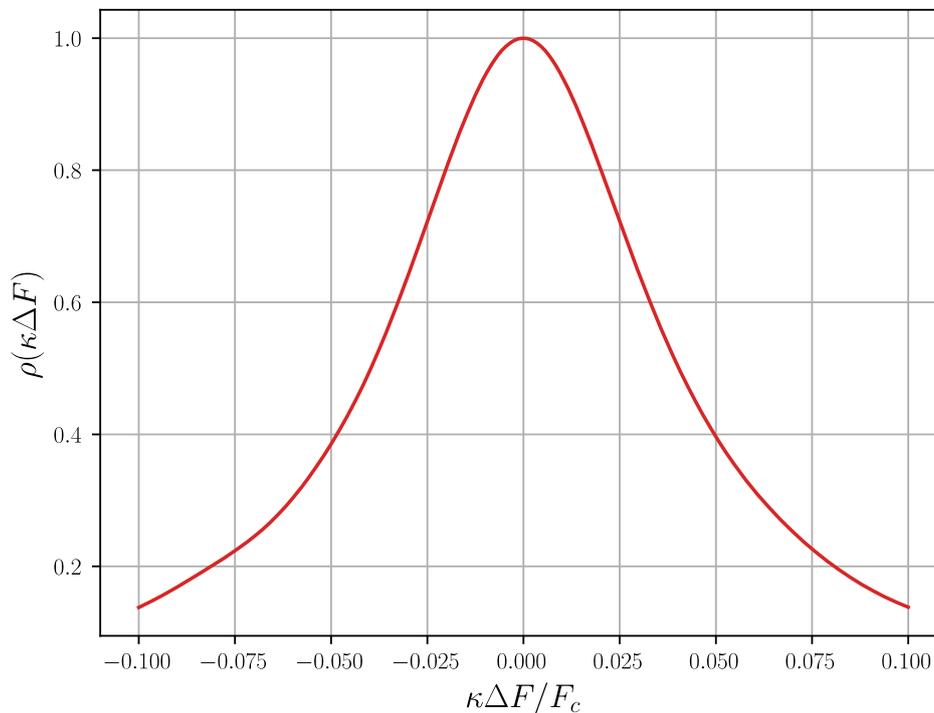


Рис. 4. Коэффициент корреляции рэлеевских замираний относительно нормированной разности частот

Для оценки различности характеров замираний можно использовать коэффициент корреляции вдоль подполос (рис. 4):

$$\rho(\kappa\Delta F) = \frac{1}{\|c_k(t)\| \|c_{k+\kappa}(t)\|} \int_0^{+\infty} c_k(t) \bar{c}_{k+\kappa}(t) dt,$$

$$\|c(t)\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} |c(t)|^2 dt}.$$

На основе данных, представленных на рис. 4, можно сделать вывод, что при достаточной разнице в частотах замирания на соответствующих поднесущих являются некоррелированным, что в свою очередь дополнительно иллюстрирует эффект частичной когерентности в частотной области.

Так как представленное выше уравнение принимаемого сигнала (27) и уравнение (29), описывающие замирания в полосе, являются линейными, то возможно синтезировать для них оптимальную процедуру фильтрации по Калману.

Для этого представим уравнение наблюдения (27) в матричном виде с учетом обозначений из (29):

$$r(t) = (\Phi(t)s(t))^T c_B(t) + \eta(t), \quad s(t) = \begin{pmatrix} s_0(t) \\ \vdots \\ s_{K-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где  $\Phi(t)$  – матрица размера  $2K \times K$ , на четных индексах строк которой находятся соответствующие фазовые множители для сигналов  $s_k(t)$ , а на нечетных 0.

Тогда модифицированное для данной модели уравнение фильтрации для оценки  $\mathbf{b}_B(t)$  замираний в полосе  $\mathbf{c}_B(t)$  по наблюдениям сигнала  $r(t)$  (30) примет вид [50]:

$$\frac{d\mathbf{b}_B(t)}{dt} = \mathbf{A}_B \mathbf{b}_B(t) + \mathbf{K}(t) \left( r(t) - (\Phi(t)\mathbf{s}(t))^T \mathbf{b}_B(t) \right), \quad (31)$$

где  $\mathbf{K}(t)$  – матрица усиления Калмана вида

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{R}(t) \Phi(t) \mathbf{s}(t), \quad (32)$$

а –  $\mathbf{R}(t)$  корреляционная матрица ошибок, для которой справедливо уравнение:

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \mathbf{g}_B(t) \mathbf{g}_B^T(t) + \mathbf{A}_B \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t) \mathbf{A}_B^T(t) - \frac{\chi(t)}{\sigma_2} \mathbf{R}^2(t), \quad (33)$$

$$\chi(t) = (\Phi(t)\mathbf{s}(t))^T \Phi(t)\mathbf{s}(t).$$

Применение модифицированного фильтра Калмана (31)-(33) позволяет оценивать ЧКС в частотной области по наблюдениям (30) в нестационарных ситуациях при работе в условиях частотно-селективных замираний.

## Выводы

В статье рассмотрены методы синтеза стохастических дифференциальных уравнений для моделирования сигналов в непрерывных каналах связи, в сетях В-RAN и NOMA-MIMO. Получены новые СДУ для моделирования случайных амплитуд (распределение Райса) и фаз (равномерное распределение и распределение фон Мизеса-Тихонова) в каналах с замираниями. Представленные материалы могут быть полезны специалистам, занимающимся разработкой и исследованием моделей сигналов в непрерывных каналах связи.

В работе также синтезированы векторные СДУ для представления ЧКС в пространственно-временном смысле и ЧКС в частотной области. Материалы могут быть использованы при математической моделировании непрерывных каналов связи и при разработке устройств первичной обработки сигналов, для которых полученные СДУ могут быть использованы в качестве уравнений состояния, являющихся необходимым этапом синтеза оптимальных нелинейных фильтров.

## Приложение 1.

Для аппроксимации  $\delta(x)$  при численном интегрировании СДУ можно использовать функцию плотности вероятности нормального распределения  $\mathcal{N}(x|0, \sigma_x^2)$  с:

$$\sigma_x = \frac{(b-a)}{6\sqrt{3}},$$

что эвристически продиктовано тем, что среднеквадратическое отклонение  $x$  будет находиться в интервале  $\pm 3\sigma_x$  функции  $\mathcal{N}(x|0, \sigma_x^2)$ .

Соответственно аппроксимация для функции Хэвисайда  $\theta(x)$  будет иметь вид:

$$\theta(x) \approx \int_{-\infty}^x \mathcal{N}(\hat{x}|0, \sigma_x^2) d\hat{x}.$$

## Приложение 2

Как известно, линейная система Дуффинга, обладает частотной характеристикой:

$$H_D(j\Omega) = \frac{G}{(j\Omega - p)(j\Omega - \bar{p})},$$

которая определяется своим полюсом  $p = p_r + jp_i = -\Delta\Omega + j\sqrt{\Omega_0^2 - \Delta\Omega^2}$ . Таким образом, спектральная плотность мощность процесса, формируемого системой Дуффинга имеет вид [58]:

$$C_D(\nu) = |H_D(j\Omega)|^2 = \frac{4F^3W\sigma^2}{(F^2 - \nu^2)^2 + (2W)^2\nu^2},$$

где  $F$  и  $W = \Delta\Omega / 2\pi$  – центральная частота и полоса пропускания в Герцах. Следовательно, для однопараметрической аппроксимации СПМ Джейкса-Кларка функцией  $C_D(\nu)$  требуется оценить величину  $W$ , что согласно ее определению, можно сделать на основе анализа приращения  $C_j(\nu)$  в окрестности  $F$ .

Так как фактически центральной частотой пропускания системы Дуффинга является точка  $\nu^* = p_i$ , то выражение для оценки можно составить следующим образом:

$$\frac{C_j(\nu^*)}{C_j(\nu^* - W)} = \gamma.$$

Представленное уравнение для  $W$  можно преобразовать относительно целевой переменной  $F$ , что приведет к уравнению:

$$W = \sqrt{F^2 - W^2} + \sqrt{F^2 - \gamma^2 W^2},$$

которое в свою очередь имеет единственное положительное решение:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\gamma^4 + 1}} F.$$

В данной работе значение  $\gamma$  было положено равным 10 дБ, что приводит к указанному выше результату для  $\Delta\Omega$ . Иллюстрация соотношения аппроксимирующей  $C_D(\nu)$  и аппроксимируемой  $C_j(\nu)$  представлена на рис. 5 слева.

Дополнительный интерес представляет сравнение корреляционных функций, которые соответствуют указанным СПМ, что проиллюстрировано на рис. 5 справа. Корреляционная функция процесса с СПМ Джейкса-Кларка имеет вид [43]:

$$R_j(\tau) = 2\sigma^2 J_0(2\pi F|\tau|),$$

где  $J_0(\cdot)$  – функция Бесселя нулевого порядка первого типа. В свою очередь корреляционная функция системы Дуффинга задается выражением [58]:

$$R_D(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\Delta\Omega\Omega_0} e^{-\Delta\Omega|\tau|} \left( \cos(p_i\tau) + \frac{\Delta\Omega}{p_i} \sin(p_i|\tau|) \right).$$

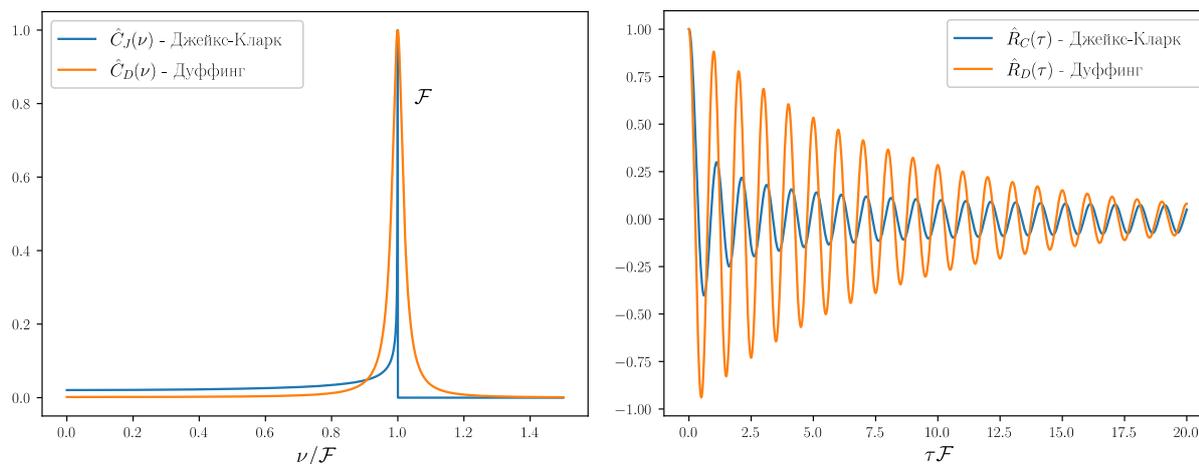


Рис. 5. Нормированные СПМ и КФ Джейкса-Кларка и Дуффинга соответственно

### Литература

1. Савищенко Н. В. Специальные интегральные функции, применяемые в теории связи. – СПб: ВАС, 2012. – 560 с.
2. Глушанков Е. И., Колесников А. Н., Конторович В. Я. Математическое моделирование каналов связи в радиорелейных и тропосферных линиях. – Л.: ВАС, 1989. – 90 с.
3. Кловский Д. Д., Конторович В. Я., Широков С. М. Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений. – М.: Радио и связь, 1984. – 248 с.
4. Кловский Д. Д., Сойфер В. А. Обработка пространственно-временных сигналов. – М.: Связь, 1976. – 207 с.
5. Калинин А. И. Распространение радиоволн на трассах наземных и космических радиолиний. – М.: Связь, 1979. – 296 с.
6. Андронов И. С., Финк Л. М. Передача дискретных сообщений по параллельным каналам. – М.: Советское радио, 1971. – 408 с.
7. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. – М.: Советское радио, 1970. – 727 с.
8. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. Том 2. – М.: Советское радио, 1962. – 831 с.
9. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и Связь, 1989. – 656 с.
10. Коржик В. И., Финк Л. М. Помехоустойчивое кодирование дискретных сообщений в каналах со случайной структурой. – М.: Связь, 1975. – 272 с.

11. Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник. – М.: Радио и связь, 1981. – 232 с.
12. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
13. Графкин А. В., Графкин В. В., Дегтярева О. А., Ивашенко А. В., Кудрина М. А., Куликовских И. М., Лезин И. А., Лезина И. В., Москаленко И. С., Прохоров С. А., Сапожникова Е. С., Станкевич А. И., Широков О. Ю. Прикладной анализ случайных процессов / под ред. С. А. Прохорова – Самара: СНЦ РАН, 2007. – 582 с.
14. Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. Статистическая радиотехника: примеры и задачи. – М.: Советское радио, 1980. – 544 с.
15. Kontorovich V. Non-coherent view on NOMA-MIMO transmission. Resumen and theoretical study // PrePrint: Tech Rxiv. 2023. Vol. 1. P. 25. doi: 10.36227/techrxiv.23504028.
16. Primak S., Kontorovich V. Wireless Multi-antenna Channels: Modeling and Simulation. – John Wiley & Sons, 2012. – 259 p.
17. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
18. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов. – М.: Советское радио, 1975. – 704 с.
19. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Горячая линия – Телеком, 2014. – 607 с.
20. Primak S., Kontorovich V., Lyandres V. Stochastic Methods and Their Applications to Communications: Stochastic Differential Equations Approach. – Wiley, 2004. – 439 p.
21. Глушанков Е. И., Конторович В. Я. Математическое моделирование сигналов различной пространственной когерентности в системах радиосвязи // Адаптивные радиотехнические системы с антенными решетками. 1991. С. 432-466.
22. Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2022. – 840 с.
23. Глушанков Е. И., Конторович В. Я., Савищенко Н. В. Цифровое моделирование векторных негауссовских случайных процессов, описывающих параметры сигналов и помех в непрерывных каналах // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. 1995. Т. 38. № 3. С. 69-74.
24. Glushankov E., Lyalina A., Rylov E. Modeling the satellite communication channel based on stochastic differential equations // CEUR Workshop Proceedings. 2021. P. 52-59.
25. Глушанков Е. И., Кирик Д. И., Лялина А. Ж. Моделирование и оценивание параметров частично-когерентных сигналов в радиотехнических системах // Труды учебных заведений связи. 2021. Т. 7. № 3. С. 16-24.

26. Кайлат Т. Метод порождающего процесса в применении к теории обнаружения и оценки // Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1970. Т. 58. № 5. С. 82-89.

27. Калман Р., Бьюси Р. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Техническая механика. 1961. Т. 83. № 1. С. 123-135.

28. Глушанков Е. И., Доценко М. Л., Конторович В. Я., Кобин С. В. Моделирование частично-когерентных сигналов в адаптивных решетках на основе линейных стохастических дифференциальных уравнений // Пространственно-временная обработка сигналов в системах радиосвязи. Приложение к журналу «Радиотехника». 1992. С. 12-19.

29. Глушанков Е. И., Конторович В. Я. Построение марковских моделей векторных негауссовских случайных процессов, описывающих параметры сигналов в антенных решетках // Пространственно-временная обработка сигналов в системах радиосвязи. Приложение к журналу «Радиотехника». 1992. С. 3-11.

30. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1961. – 560 с.

31. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. – М.: МГУ, 1966. – 276 с.

32. Ito K. Stochastic integrals // Proceedings of the Imperial Academy. 1944. Vol. 40. P. 519-524.

33. Стратонович Р. Л. Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений // Вестник МГУ. 1964. № 1. С. 72-78.

34. Глушанков Е. И., Савищенко Н. В. Анализ точности разностных схем для случайных процессов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 1995. Т. 38. № 9-10. С. 11-15.

35. Батенков К. А. Моделирование непрерывных каналов связи в форме операторов преобразования некоторых пространств // Труды СПИИРАН. 2014. № 1 (32). С. 171-198.

36. Kontorovich V. Some aspects of Blockchain-Enabled Radio Access Networks (B-RAN) modeling: review and theoretical study // Journal of Advances in Mathematics and Computer Science. 2022. Vol. 37 (7). P. 44-60.

37. Kontorovich V., Alcocer-Ochoa S., Parra-Michel A. MIMO Channel Orthogonalizations applying Universal Eigenbasis // IET Signal Processing. 2008. Vol. 2. № 2. P. 87-96.

38. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. – М.: Советское радио, 1968. – 255 с.

39. Лемешко Б. Ю. Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 163 с.

40. Corazza G. E., Vatalaro F. A statistical model for land mobile satellite channels and its application to nongeostationary orbit systems // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 1994. Vol. 43. № 3. P. 738-742. doi: 10.1109/25.312773.

41. Plaszczynski S., Montier L., Levrier F., Tristram M. A novel estimator of the polarization amplitude from normally distributed stokes parameters // Monthly

Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. Vol. 439. P. 4048-4056 doi: 10.1093/mnras/stu270.

42. Сеницын И. Н. Методы статистической линеаризации (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1974. № 5. С. 82-94.

43. Pätzold M. Mobile Radio Channels. – Wiley, 2011. – 576 p.

44. Wilson D. K., Ostashev V. E., Krackow M. E. Phase-modulated Rice model for statistical distributions of complex signals // Acoustical Society of America Journal. 2023. Vol. 153. № 2. P. 1241-1256. doi: 10.1121/10.0017251.

45. Horwood J., Poore A. Gauss von Mises Distribution for Improved Uncertainty Realism in Space Situational Awareness // SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification. 2014. Vol. 2. P. 276-304. doi: 10.1137/130917296.

46. Казаков И. Е., Мальчиков С. В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

47. Никитин Н. Н., Разевиг В. Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18. № 21. С. 106-117.

48. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Лань, 2009. – 608 с.

49. Сэйдж Э. Мелс Дж. Теория оценивания и её применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976. – 496 с.

50. Шахтарин Б.И. Фильтры Винера и Калмана. – М.: Горячая линия – Телеком, 2018. – 396 с.

51. Афанасьев Н. А., Глушанков Е. И., Кирик Д. И., Рылов Е. А. Сравнение винеровского и калмановского решения в задачах адаптации антенных решёток // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2021. № 3. С. 33-39.

52. Стратонович Р. Л. О теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций // Теория вероятности и ее применение. 1959. Т. 4. С. 223-225.

53. Кремер И. Я., Кремер А. И., Петров В. М., Понькин В. А., Потапов Н. А. Пространственно-временная обработка сигналов / под ред. И. Я. Кремера. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.

54. Jakeman E., Pusey P.N. A Model for Non-Rayleigh Sea Echo // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1976. Vol. 24. № 6. P. 806-814.

55. Jakeman E. On the Statistics of K-Distributed Noise // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1980. Vol. 13. P. 31-48.

56. Iskander R. B. The Characteristic Function of the K-Distributed Interference // XII European Signal Processing Conference EUSIPCO. – Vienna, 2004. – Vol. 1. P. 1429-1432.

57. Gutierrez C., Pätzold M., Ortega N., Azurdia-Meza C. Maciel Barboza F. Doppler Shift Characterization of Wideband Mobile Radio Channels // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2019. P. 12375-12380. doi: 10.1109/TVT.2019.2945936.

58. Шахтарин Б. И. Случайные процессы в радиотехнике. – М.: Радио и связь, 2000. – 480 с.

### References

1. Savishchenko N. V. *Specialnye integralnye funktsii, primenyaemye v teorii svyazi* [Special Integral Function in Communication Theory]. Saint-Petersburg, Voennaya akademiya svyazi Publ., 2012. 560 p (in Russian).
2. Glushankov E. I., Kolesnikov A. N., Kontorovich V. Ya. *Matematicheskoe modelirovanie kanalov svyazi v radiorelejnyh i troposfernyh liniyah* [Mathematical Modeling of Communication Channels in Relay and Tropospheric Links]. Saint-Petersburg, Voennaya akademiya svyazi Publ, 1989. 90 p. (in Russian).
3. Klovskij D. D., Kontorovich V. Ya., Shirokov S. M. *Modeli nepreryvnyh kanalov svyazi na osnove stokhasticheskikh differentsialnykh uravnenij* [Models of Continuous Communication Channels Based on Stochastic Differential Equations]. Moscow, Radio y Svyaz, 1984. 248 p. (in Russian).
4. Klovskij D. D., Soiifer V. A. *Obrabotka prostranstvenno-vremennykh signalov* [Space-Time Signal Processing]. Moscow, Svyaz. 1976. 207 p. (in Russian).
5. Kalinin A. I. *Rasprostranenie radiovoln na trassah nazemnykh i kosmicheskikh radiolinij* [Radiowaves Propagation in Ground and Space Radio Links]. Moscow, Svyaz, 1979. 296 p. (in Russian).
6. Andronov I. S., Fink L. M. *Peredacha diskretnykh soobshchenij po parallelnym kanalom* [Digital Messaging in Parallel Communication Channels]. Moscow, Soviet radio, 1971. 408 p. (in Russian).
7. Fink L. M. *Teoriya peredachi diskretnykh soobshchenij* [Theory of Digital Communications]. Moscow, Soviet radio, 1970. 727 p. (in Russian).
8. Middelton D. *An Introduction to Statistical Communication Theory*. New-York, McGraw-Hill, 1960. 1140 p.
9. Levin B. R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Signal Processing]. Moscow, Radio y Svyaz, 1989. 656 p. (in Russian).
10. Korzhik V. I., Fink L. M. *Pomekhoustojchivoe kodirovanie diskretnykh soobshchenij v kanalah so sluchajnoj strikturoj* [Error Correction Coding of Digital Messages in Communication Channels with Random Structure]. Moscow, Svyaz, 1975. 582 p. (in Russian).
11. Korzhik V. I., Fink L. M., Schelkunov K. N. *Raschet pomekhoustojchivosti sistem peredachi diskretnykh soobshchenij: Spravochnik* [Design of Error Correction Digital Communication Transmission System]. Moscow, Radio y Svyaz, 1981. 232 p. (in Russian).
12. Tihonov V. I. *Statisticheskaya radiotekhnika* [Statistical Signal Processing]. Moscow, Radio y Svyaz, 1982. 624 p. (in Russian).
13. Grafkin A. V., Grafkin V. V., Degtyareva O. A., Ivashchenko A. V., Kudrina M. A., Kulikovskikh I. M., Lezin I. A., Lezina I. V., Moskalenko I. S., Prohorov S. A., Sapozhnikova E. S., Stankevich A. I., Shirokov O. Yu. *Prikladnoj analiz sluchajnykh processov* [Applied Analysis of Stochastic Process]. Samara, SNC RAN, 2007. 582 p. (in Russian).

14. Goryainov V. T., Zhuravlev A. G., Tihonov V. I. *Statisticheskaya radiotekhnika: primery i zadachi* [Statistical Signal Processing: Applications and Problems]. Moscow, Soviet radio, 1980. 544 p. (in Russian).
15. Kontorovich V. Non-coherent view on NOMA-MIMO transmission. Resumen and theoretical study. *PrePrint: Tech Rxiv*, 2023, vol. 1, pp. 25. doi: 10.36227/techrxiv.23504028.
16. Primak S., Kontorovich V. *Wireless Multi-antenna Channels: Modeling and Simulation*, New Jersey, John Wiley & Sons, 2012. 259 p.
17. Tihonov V. I., Mironov M. A. *Markovskie process* [Markov Processes]. Moscow, Soviet radio, 1977. 488 p. (in Russian).
18. Tihonov V. I., Kulman N. K. *Nelinejnaya filtraciya i kvazikogerentnyj priyom signalov* [Nonlinear Filtration and Causi-Coherent Reception of Signals]. Moscow, Soviet Radio, 1975. 704 p. (in Russian).
19. Tihonov V. I., Kharisov V. N. *Statisticheskij analiz i sintez radiotekhnicheskikh ustrojstv i system* [Statistical Analysis and Synthesis of Signal Processing Systems]. Moscow, Goryachaya Liniya – Telecom, 2014. 607 p. (in Russian).
20. Primak S., Kontorovich V., Lyandres V. *Stochastic Methods and Their Applications to Communications: Stochastic Differential Equations Approach*. New Jersey, John Wiley & Sons, 2004. 439 p.
21. Glushankov E. I., Kontorovich V. Ya. Matematicheskoe modelirovanie signalov razlichnoj prostranstvennoj kogerentnosti v sistemah radiosvyazi. *Adaptivnye radiotekhnicheskie sistemy s antennymi reshetkami* [Adaptive Radio Systems with Antenna Arrays], Leningrad State University Publ., 1991, pp. 432-466 (in Russian).
22. Perov A. I. *Statisticheskaya teoriya radiotekhnicheskikh system* [Statistical Theory of Radio Systems]. Moscow, Radiotekhnika, 2022. 840 p. doi 10.18127/B9785931082240 (in Russian).
23. Glushankov E. I., Kontorovich V. Ya., Savishchenko N. V. Cifrovoe modelirovanie vektornyh negaussovskih sluchajnyh processov, opisyyvayushchih parametry signalov i pomekh v nepreryvnyh kanalakh [Computer Modeling of Non-Gaussian Vector Stochastic Processes in Description of Signals and Interferences in Continuous Communication Channels]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Radioelektronika*, 1995, vol. 38, no. 3, pp. 69-74 (in Russian).
24. Glushankov E., Lyalina A., Rylov E. Modeling the satellite communication channel based on stochastic differential equations. *CEUR Workshop Proceedings*, 2021, 2922. pp. 52-59.
25. Glushankov E. I., Kirik D. I., Lyalina A. Z. Modeling and Parameter Estimation of Partially Coherent Signals in Radio Engineering Systems. *Trudy uchebnyh zavedenij svyazi*, 2021, vol. 7, no. 3, pp. 16-24 (in Russian).
26. Frost P., Kailath T. An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Pt. III: Nonlinear Estimation in White Gaussian Noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16 (3), pp. 217-226.

27. Kalman, R. and Bucy, R. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *ASME Transactions, Part D, Journal of Basics Engineering*, 1961, no. 83, pp. 95-103.

28. Glushankov E. I., Docenko M. L., Kontorovich V. Ya., Kobin S. V. Modelirovanie chastichno-kogerentnyh signalov v adaptivnyh reshetkah na osnove linejnyh stohasticheskikh differencialnyh uravnenij [Modeling of Partially Coherent Signals in Adaptive Antenna Arrays Based on Linear Stochastic Differential Equations]. *Prostranstvennovremennaya obrabotka signalov v sistemah radiosvyazi. Application for journal «Radiotekhnika»*, 1992, pp. 12-19 (in Russian).

29. Glushankov E. I., Kontorovich V. Ya. Postroenie markovskikh modelej vektornyh negaussovskikh sluchajnyh processov, opisyvayushchih parametry signalov v antennyh reshetkah [Design of Markovian Models of Vector Non-Gaussian Stochastic Processes for Signals in Antenna Arrays]. *Prostranstvenno-vremennaya obrabotka signalov v sistemah radiosvyazi. Application for journal «Radiotekhnika»*, 1992, pp. 3-11 (in Russian).

30. Stratonovich R. L. *Topics in Theory of Random Noise, Volume II*. New-York, Gordon and Breach, 1967, 329 p.

31. Stratonovich R. L. *Uslovnye markovskie processy i ih primenenie k teorii optimalnogo upravleniya* [Conditional Markov Process with Applications to Theory of Optimal Control]. Moscow, Moscow State University Publ., 1966. 276 p. (in Russian).

32. Ito K. Stochastic integrals. *Proceedings of the Imperial Academy*, 1944, vol. 40, pp. 519-524.

33. Stratonovich R. L. Novaya forma zapisi stohasticheskikh integralov i uravnenij [New Form of Stochastic Integrals and Equations]. *Vestnik MGU*, 1964, no. 1, pp. 72-78 (in Russian).

34. Glushankov E. I., Savishchenko N. V. Analiz tochnosti raznostnyh skhem dlya sluchajnyh processov [Analysis of Accuracy of Difference Schemes for Stochastic Processes]. *Izvestia vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie*, 1995, vol. 38, no. 9-10, pp. 11-15 (in Russian).

35. Batenkov K. A. Modelirovanie nepreryvnyh kanalov svyazi v forme operatorov preobrazovaniya nekotoryh prostranstv [Models of Continuous Communication Channels in Operator Form: Transforms of Several Spaces]. *Proceedings of SPIIRAS*, 2014, vol. 1 (32), pp. 171-198 (in Russian).

36. Kontorovich V. Some aspects of Blockchain-Enabled Radio Access Networks (B-RAN) modeling: review and theoretical study. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 2022, vol. 37 (7), pp. 44-60.

37. Kontorovich V., Alcocer-Ochoa S., Parra-Michel A. MIMO Channel Orthogonalizations applying Universal Eigenbasis. *IET Signal Processing*, 2008, vol. 2, no 2, pp. 87-96.

38. Hazen E. M. *Metody optimalnyh statisticheskikh reshenij i zadachi optimalnogo upravleniya* [Methods of Optimal Statistical Decisions in Problems of Optimal Control]. Moscow, Soviet radio, 1968. 255 p. (in Russian).

39. Lemeshko B. Yu. *Neparametricheskie kriterii soglasiya. Rukovodstvo po primeneniyu* [Nonparametric Statistical Tests. Tutorial]. Moscow, INFRA-M, 2014. 163 p. (in Russian).
40. Corazza G. E., Vatalaro F. A statistical model for land mobile satellite channels and its application to nongeostationary orbit systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1994, vol. 43, no. 3, pp. 738-742. doi: 10.1109/25.312773.
41. Plaszczynski S., Montier L., Levrier F., Tristram M., A novel estimator of the polarization amplitude from normally distributed Stokes parameters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, vol. 439, pp. 4048-4056. doi: 10.1093/mnras/stu270.
42. Sinicyn I. N. *Metody statisticheskoy linearizacii* [Methods of Statistical Linearization]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1974, vol. 5, pp. 82-94 (in Russian).
43. Pätzold M. *Mobile Radio Channels*. New Jersey, John Wiley & Sons, 2011. 576 p.
44. Wilson, D. K., Ostashev, V. E., Krackow, M. E. Phase-modulated Rice model for statistical distributions of complex signals. *Acoustical Society of America Journal*, 2023, vol. 153, no. 2, pp. 1241-1256. doi:10.1121/10.0017251.
45. Horwood J., Poore A. Gauss von Mises Distribution for Improved Uncertainty Realism in Space Situational Awareness. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 2014, vol. 2, pp. 276-304. doi: 10.1137/130917296.
46. Kazakov I. E., Malchikov S. V. *Analiz stohasticheskikh sistem v prostranstve sostoyanij* [Analysis of Stochastic Systems in State-Space Representation]. Moscow, Nauka, 1983, 384 p. (in Russian).
47. Nikitin N. N., Razvig V. D. *Metody cifrovogo modelirovaniya stohasticheskikh differencialnyh uravnenij i ocenka ih pogreshnostej* [Methods of Computer Modelling of Stochastic Differential Equations and Estimation of Accuracy]. *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 1978, vol. 18, no. 21, pp. 106-117 (in Russian).
48. Marchuh G. I. *Metody vychislitelnoj matematiki* [Numerical Methods]. Moscow, Lan, 2009. 608 p. (in Russian).
49. Sage A. P., Melse J. L. *Estimation Theory with Application to Communication and Control*. New-York, McGraw-Hill, 1971. 752 p.
50. Shakhtarin B. I. *Filtri Winera y Kalmana* [Wiener and Kalman Filters]. Moscow, Goryachaya Liniya – Telecom, 2018, 396 p. (in Russian).
51. Afanasev N. A., Glushankov E. I., Kirik D. I., Rylov E. A. Comparison of Wiener and Kalman Solutions for Antenna Array Adaptation. *Radio Engineering and Telecommunications Systems*, 2021, no. 3, pp. 33-39 (in Russian).
52. Stratonovich R. L. O teorii optimalnoj nelinejnoj filtracii sluchajnyh funkcij [Optimal Nonlinear Filtration of Random Functions]. *Teoriya veroyatnosti i ee primeneniye*, 1959, vol. 4, pp. 223-225 (in Russian).
53. Kremer I. Ya., Kremer A. I., Petrov V. M., Ponkin V. A., Potapov N. A. *Prostranstvenno-vremennaya obrabotka signalov* [Space-Time Signal Processing]. Moscow, Radio y Svyaz, 1984, 224 p. (in Russian).
54. Jakeman E., Pusey P. N. A Model for Non-Rayleigh Sea Echo. *IEEE Transactions. on Antennas and Propagation*, 1976, vol. 24, no 6, pp. 806-814.

55. Jakeman E. On the Statistics of K-Distributed Noise. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1980, vol. 13, pp. 31-48.

56. Iskander R. B. The Characteristic Function of the K-Distributed Interference. *XII European Signal Processing Conference EUSIPCO*, Vienna, Tech. University, 2004, vol. 1, pp. 1429-1432.

57. Gutierrez C., Pätzold M., Ortega N., Azurdia-Meza C., Maciel Barboza F. Doppler Shift Characterization of Wideband Mobile Radio Channels. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2019, pp. 12375-12380. doi: 10.1109/TVT.2019.2945936.

58. Shahtarin B.I. *Sluchajnye processy v radiotekhnike* [Stochastic Processes in Radio Signal Processing]. Moscow, Radio y Svyaz, 2000, 480 p. (in Russian).

Статья поступила 29 августа 2023 г.

### Информация об авторах

*Глушанков Евгений Иванович* – доктор технических наук, профессор. Профессор кафедры радиосистем и обработки сигналов. Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени проф. М.А. Бонч-Бруевича. Область научных интересов: моделирование сигналов и помех в непрерывных каналах связи, обработка сигналов в радиотехнических системах. E-mail: glushankov57@gmail.com

*Конторович Валерий Яковлевич* – доктор технических наук, профессор. Центр исследований и перспективных разработок национального политехнического института (CINVESTAV-IPN). Член Мексиканской академии наук. Пожизненный член Институт инженеров электротехники и электроники (IEEE). Область научных интересов: передовые системы мобильной радиосвязи, анализ помех, моделирование каналов и статистическая теория связи. E-mail: valeri@cinvestav.mx

*Карavaев Дмитрий Александрович* – соискатель степени кандидата технических наук. Инженер кафедры радиосистем и обработки сигналов. Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени проф. М.А. Бонч-Бруевича. Область научных интересов: статистическая радиотехника, цифровая обработка сигналов, системы спутниковой радиосвязи. E-mail: d.a.karavaev@ya.ru

Адрес: 193232, Россия, Санкт-Петербург, пр. Большевиков д. 22, к. 1.

---

## Signal Modeling in Continuous Communication Channels in the Form of Stochastic Differential Equations

E. I. Glushankov., V. Ya. Kontorovich, D. A. Karavaev

**Relevance.** *The development of mathematical models of signals in continuous communication channels is a necessary stage in the study of communication channels, since field testing, as a rule, is a complex and not always physically possible process and is limited and time-consuming. Therefore, the creation of models is a necessary step in studying the characteristics of communication channels and developing algorithms for the primary processing of signals in them. One of the main requirements for such models is their adequacy to real processes occurring in the channel, which can be assessed by comparing the results of modeling random processes with theoretical probability distribution densities according to the agreement criteria. One of the most constructive modeling approaches is to use the state variable method and build models in the form of stochastic differential equations. At the same time, modeling signals in continuous communication channels in the form of stochastic differential equations involves solving the problem of synthesizing such equations, that is, determining their dimensions and coefficients with the required accuracy, which is the subject of this article. The problem of modeling coherent and partially coherent signals in the form of one-dimensional and multidimensional stochastic differential equations is considered. Equations are synthesized for partially coherent signals in the space-time sense and for partially coherent signals in the frequency domain. It is shown under what conditions a partial coherence of signals occurs and their characteristics are analyzed. To estimate partially coherent signals in the frequency domain, a modified Kalman filter is proposed. **The purpose** is the presentation of methods for the synthesis of stochastic differential equations that describe random signal parameters (transmission coefficient, amplitude, phase, number of requests waiting to be serviced in B-RAN networks, etc.) in continuous communication channels, and the development of new one-dimensional and multidimensional equations based on them for different distributions. **The results, their novelty and practical significance.** In this paper, new stochastic differential equations are synthesized and their adequacy for representing random signals in continuous communication channels according to the goodness of fit criteria is analyzed by comparison with theoretical distributions. It is shown that the models have good accuracy in representing the probabilistic characteristics of random processes. In this case, the equation for the Rice distribution makes it possible to model the amplitudes of signals in multipath channels, and the uniform distribution - the phases of the signals. The review of methods for the synthesis of stochastic differential equations given in the initial part of the work will be useful to specialists involved in the development and study of signal models in continuous communication channels.*

**Key words:** *stochastic differential equations, partially coherent signals, mathematical modeling, Rayleigh law, Doppler effect, probability distribution density.*

### Information about Authors

*Evgeniy Ivanovich Glushankov* – Dr. habil. of Engineering Sciences, Professor. Professor at the Department of Radio Systems and Signal Processing. The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications. Field of research: signal processing in radio engineering systems. E-mail: glushankov57@gmail.com

*Valeri Yakovlevich Kontorovich* – Dr. habil. of Engineering Sciences, Professor. Professor at the Research and Advanced Studies Center of the National Polytechnic Institute (CINVESTAV-IPN). Member of the Mexican Academy of Sciences. IEEE Life Fellow. Field of research: advanced mobile radio communication systems, interference analysis, channel modeling, and communications theory in general. E-mail: valeri@cinvestav.mx

*Dmitry Alexandrovich Karavaev* – Doctoral Student. Engineer at the Department of Radio Systems and Signal Processing. The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications. Field of research: statistical signal processing, digital signal processing, satellite communication channels. E-mail: d.a.karavaev@ya.ru

Address: Russia, 193232, Saint-Petersburg, Bolshevnikov prospect, 22.