

УДК 519.612:537.2

## Использование адаптивной перекрестной аппроксимации и блочного итерационного решения последовательности матричных уравнений при многовариантном анализе многопроводных линий передачи методом моментов

Максимов А. Е.

**Постановка задачи:** с ростом сложности радиоэлектронных средств их разработка и совершенствование становятся невозможными без применения инструментов автоматизированного проектирования. Многопроводные линии передачи широко используются в качестве элементов радиоэлектронных средств и требуют тщательного проектирования для учета требований по целостности сигналов и питания, а также электромагнитной совместимости в целом. Из-за сложности структуры многопроводных линий передачи их проектирование при помощи аналитических методов затруднительно, поэтому часто используют квазистатическое приближение и численные методы, например, метод моментов. Случайные вариации геометрических параметров многопроводных линий передачи и поиск их оптимальных значений заставляют многократно вычислять параметры линии, что приводит к дополнительному росту суммарных вычислительных затрат. Таким образом, актуальной задачей является уменьшение вычислительных затрат на многовариантный анализ многопроводных линий передачи. **Целью работы** является оценка эффективности использования адаптивной перекрестной аппроксимации и блочного итерационного решения последовательности матричных уравнений применительно к многовариантному анализу многопроводных линий передачи. **Используемые методы:** метод моментов, блочный итерационный стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BI-BiCGStab), метод адаптивной перекрестной аппроксимации. **Новизна:** предложен метод многовариантного анализа многопроводных линий передачи, отличающийся совместным использованием адаптивной перекрестной аппроксимации и блочного итерационного решения последовательности матричных уравнений. **Результат:** на примере четырех многопроводных линий передачи с числом проводников от 2 до 4 для их многовариантного (до 100 на параметр) анализа при варьировании 1–5 геометрических параметров, как в узких, так и в широких пределах, исследовано использование блочного итерационного решения последовательности матричных уравнений, показавшее уменьшение требуемого времени решения в среднем в 1,3 раза. Также на примере двух многопроводных линий передачи исследовано совместное использование адаптивной перекрестной аппроксимации и блочного итерационного решения последовательности матричных уравнений, показавшее уменьшение объема требуемой машинной памяти до 3,6 раза при увеличении требуемого времени решения до 2,6 раза. Все результаты получены при отклонении относительно метода Гаусса не более 1%. **Практическая значимость:** применительно к многовариантному анализу многопроводных линий передачи выявлены возможности уменьшения требуемых машинных памяти и времени за счет использования методов адаптивной перекрестной аппроксимации и BI-BiCGStab. Так, адаптивная перекрестная аппроксимация является эффективным средством выполнения расчетов при необходимости использования частой сегментации и ограниченном объеме имеющейся машинной памяти.

### Библиографическая ссылка на статью:

Максимов А. Е. Использование адаптивной перекрестной аппроксимации и блочного итерационного решения последовательности матричных уравнений при многовариантном анализе многопроводных линий передачи методом моментов // Системы управления, связи и безопасности. 2023. № 3. С. 197-226. DOI: 10.24412/2410-9916-2023-3-197-226

### Reference for citation:

Maksimov A. E. Use of Adaptive Cross Approximation and Block Iterative Solution of a Matrix Equations Sequence in Multivariate Analysis of Multiconductor Transmission Lines by the Method of Moments. *Systems of Control, Communication and Security*, 2023, no. 3, pp. 197-226 (in Russian). DOI: 10.24412/2410-9916-2023-3-197-226

*Ключевые слова:* многопроводная линия передачи, многовариантный анализ, метод моментов, блочный итерационный метод BI-BiCGStab, адаптивная перекрестная аппроксимация.

## Введение

Конкуренция производителей радиоэлектронных средств (РЭС) вызывает необходимость их регулярного обновления и совершенствования. При этом с ростом их сложности это становится невозможным без применения средств автоматизированного проектирования, в основе которого лежит моделирование.

Одним из основных элементов РЭС являются многопроводные линии передачи (МПЛП), из которых состоят современные многослойные печатные платы, отличающиеся очень высокой трассировочной способностью и плотностью монтажа элементов [1]. Поэтому требуется их тщательное моделирование для учета требований по целостности сигналов и питания, а также электромагнитной совместимости в целом. Моделирование МПЛП из-за сложности их структуры при помощи аналитических методов затруднено, поэтому часто используют квазистатическое приближение, основанное на решении уравнения Пуассона/Лапласа, и численные методы.

Для численного анализа какой-либо физической задачи необходимо построить ее математическую модель, учитывающую существенные для данной задачи особенности реального объекта. Этот процесс формально можно представить в виде нескольких взаимосвязанных этапов, наиболее вычислительно затратными из которых являются сегментация объекта, формирование матричного уравнения и его решение [2]. Так, сегментация оказывает влияние на свойства результирующего матричного уравнения и определяет выбор способа вычисления его элементов (численное интегрирование, дифференцирование или выражение в замкнутом виде) и метода его решения (прямой или итерационный) [3]. От выбранного метода решения матричного уравнения будут зависеть затраты времени, а от формата его хранения в памяти компьютера – объем требуемой машинной памяти. При многовариантном анализе параметров исследуемой МПЛП эти три этапа повторяются многократно, что существенно усложняет процесс оптимального проектирования РЭС из-за существенного роста вычислительных затрат. Поэтому актуален поиск путей их уменьшения.

Так, исследованы экономичные методы сегментации, использование которых позволяет уменьшить вычислительные затраты на одновариантный и многовариантный анализ без существенной потери точности [4–7] и адаптивная перекрестная аппроксимация, показавшая себя эффективным средством экономии машинной памяти [8]. После этого целесообразно рассмотреть методы уменьшения вычислительных затрат на хранение матричного уравнения и его решение. Целью данной работы является оценка эффективности использования адаптивной перекрестной аппроксимации и блочного итерационного решения последовательности матричных уравнений применительно к многовариантному анализу МПЛП.

## Метод моментов

Известно много численных методов, используемых при моделировании МПЛП: конечных разностей, конечных элементов, моментов, вспомогательных источников, эквивалентной схемы из частичных элементов и др. Однако наиболее используемыми и универсальными являются метод конечных элементов (finite element method, FEM) [9] и метод моментов (method of moments, МоМ) [10]. Преимущество последнего заключается в том, что при его использовании не требуется задание граничных условий, эмулирующих удаленные границы, что способствует априорному уменьшению вычислительных затрат.

В работе [11] представлен подробный вывод модели для вычисления матриц погонных параметров МПЛП с использованием МоМ. Кратко поясним суть данного подхода. МоМ применяют для решения уравнения Пуассона/Лапласа в интегральном виде. Так, при анализе МПЛП оно имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma, \quad (1)$$

где  $\sigma(\mathbf{r}')$  – поверхностная плотность заряда,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  – точки наблюдения  $(x, y)$  и источника  $(x', y')$ ,  $d\Gamma$  – дифференциал по поверхности МПЛП,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость, а  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – функция Грина. Для границ проводник-диэлектрик (1) принимает вид [11]

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{L_C} \sigma_T(\mathbf{r}') [\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] dl', \quad \mathbf{r} \in L_C, \quad (2)$$

где  $L_C$  – контур проводниковых границ,  $dl'$  – элемент этого контура, а для границ диэлектрик-диэлектрик –

$$0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \frac{\sigma_T(\mathbf{r})}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{L_D} \sigma_T(\mathbf{r}') \left[ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] \mathbf{n} dl', \quad \mathbf{r} \in L_D, \quad (3)$$

где  $L_D$  – контур диэлектрических границ,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе, а  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – диэлектрические проницаемости с одной (на которую направлен  $\mathbf{n}$ ) и другой (от которой направлен  $\mathbf{n}$ ) сторон от границы соответственно.

С использованием аппарата базисных и тестовых функций, (2) и (3) сводятся к матричному уравнению

$$\mathbf{Z}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Phi}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{Z}$  – матрица размера  $N \times N$ , описывающая МПЛП через связи сегментов ее границ между собой,  $\boldsymbol{\Phi}$  – матрица размера  $N \times M$ , содержащая задаваемые потенциалы,  $\boldsymbol{\Sigma}$  – матрица размера  $N \times M$ , содержащая неизвестные общие (свободные и поляризационные) плотности заряда на этих сегментах соответственно [12],  $N$  – число сегментов, на которые разбиты границы, а  $M$  – число проводников МПЛП, не считая опорного. Из решения (4) затем вычисляются матрицы погонных параметров МПЛП [13].

## Метод BI-BiCGStab

При анализе МПЛП с числом сигнальных проводников  $M$  формируется матричное уравнение (4) с правой частью, состоящей из  $M$  столбцов. Случай-

ные вариации геометрических параметров МПЛП, возникающие из-за отклонений в ходе технологического процесса, и поиск их оптимальных значений делают необходимым многократно вычислять матрицы погонных параметров МПЛП для достижения требуемого технического результата конечного изделия. Тогда, при многовариантном анализе МПЛП требуется решать последовательность матричных уравнений

$$\mathbf{Z}_i \boldsymbol{\Sigma}_i = \boldsymbol{\Phi}_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$n$  раз, по числу суммарных изменений значений варьируемых параметров, что приводит к существенному росту вычислительных затрат и тем самым затрудняет эффективное проектирование МПЛП.

При решении матричных уравнений небольшого размера стандартным подходом является использование прямых методов, например, на основе LU-разложения. Однако для МПЛП размеры матричных уравнений оказываются велики, поэтому с вычислительной точки зрения более привлекательны итерационные методы [14]. В отличие от прямых методов, итерационные используют последовательные приближения для получения более точного решения на каждой следующей итерации.

Для решения больших и разреженных матричных уравнений с несимметричными матрицами часто используют методы крыловского типа [15, 16]. В основном эти методы сводятся к генерации подходящего базиса векторного пространства, называемого подпространством Крылова, и выбора фактической итерации в пределах этого пространства [17].

Одним из наиболее популярных методов Крыловского типа является метод бисопряженных градиентов (biconjugate gradient method, BiCG) [15, 16] и его модификация для решения матричных уравнений с несимметричными матрицами коэффициентов – стабилизированный метод бисопряженных градиентов (biconjugate gradient stabilized method, BiCGStab) [18]. В случае  $M$  правых частей в уравнении, используется блочная версия метода, BI-BiCGStab. Далее приведен его алгоритм [19]:

1. Вычислить матрицу предобуславливания  $\mathbf{M}$ , близкую к матрице  $\mathbf{Z}$ , такую, что  $\mathbf{MZ}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}$ .

2. Выбрать произвольное начальное приближение  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , требуемую точность  $tol$  и максимальное число итераций  $N_{it}^{\max}$ .

3. Положить  $\mathbf{R}_0 = \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\Sigma}_0$ ,  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_0$ .

4. Задать произвольную матрицу  $\tilde{\mathbf{R}}_0$  размера  $N \times M$ .

Для  $k = 0, 1, \dots, N_{it}^{\max}$

5. Решить уравнение  $\mathbf{M}\tilde{\mathbf{P}}_k = \mathbf{P}_k$ .

6. Вычислить  $\mathbf{V}_k = \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{P}}_k$ .

7. Решить уравнение  $(\tilde{\mathbf{R}}_0^H \mathbf{V}_k) \boldsymbol{\alpha}_k = \tilde{\mathbf{R}}_0^H \mathbf{R}_k$ .

8. Вычислить  $\mathbf{S}_k = \mathbf{R}_k - \mathbf{V}_k \boldsymbol{\alpha}_k$ .

9. Решить уравнение  $\mathbf{M}\tilde{\mathbf{S}}_k = \mathbf{S}_k$ .

10. Вычислить  $\mathbf{T}_k = \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{S}}_k$ .

11. Вычислить  $\omega = \text{trace}(\mathbf{T}_k^H \mathbf{S}_k) / \text{trace}(\mathbf{T}_k^H \mathbf{T}_k)$ .

12. Вычислить  $\Sigma_{k+1} = \Sigma_k + \mathbf{P}_k \boldsymbol{\alpha}_k + \omega_k \mathbf{S}_k$ .

13. Вычислить  $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{S}_k - \omega_k \mathbf{T}_k$ .

Если  $\|\mathbf{R}_{k+1}\|_F / \|\mathbf{R}_0\|_F \leq \text{tol}$

14. Прервать вычисления и считать  $\Sigma_{k+1}$  решением.

Иначе

15. Решить уравнение  $(\tilde{\mathbf{R}}_0^H \mathbf{V}_k) \boldsymbol{\beta}_k = -\tilde{\mathbf{R}}_0^H \mathbf{T}_k$ .

16. Вычислить  $\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{R}_{k+1} + (\mathbf{P}_k - \omega_k \mathbf{V}_k) \boldsymbol{\beta}_k$ .

### Метод адаптивной перекрестной аппроксимации

Адаптивная перекрестная аппроксимация (adaptive cross approximation, АСА) основана на малоранговой аппроксимации матриц и имеет алгебраическую основу. Поэтому она не зависит от физической формулировки задачи, что делает метод АСА универсальным. Доказательство возможности компрессии данных, основанной на малоранговой аппроксимации матриц, возникающих при численном решении интегрального уравнения электрического поля, представлено в [20, 21]. Известны примеры использования АСА при решении задач с числом неизвестных, достигающим до  $4 \cdot 10^6$  с экономией памяти до 98% [22]. В работе [23] представлен обширный обзор существующих модификаций АСА и рассмотрены примеры их применения при решении крупномасштабных электродинамических задач.

Главным достоинством метода является его чисто алгебраическая основа. Так, метод позволяет аппроксимировать некую матрицу  $\mathbf{S}$  размера  $i \times j$  в виде произведения матриц  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  меньшего ранга  $k$ , где  $k \ll i$  и  $k \ll j$ . Однако в МоМ матрица  $\mathbf{Z}$  из (4) является сингулярной из-за функции Грина, поэтому АСА работает не с ней, а с ее блоками. Так, анализируемой МПЛП соответствует квадратная матрица  $\mathbf{Z}$ , а частям этой МПЛП – ее блоки  $\mathbf{S}$  (рис. 1). Тогда, если эти части находятся на удалении друга от друга, то соответствующие блоки матрицы  $\mathbf{Z}$  являются разделяемыми, и к ним можно применять АСА. В продолжение процесса деления МПЛП строится соответствующее иерархическое дерево (рис. 1в), где ветвями являются индексы блоков матрицы  $\mathbf{Z}$ , которые могут быть аппроксимированы с помощью АСА. На рис. 1д красным цветом показаны диагональные блоки, к которым АСА из-за сингулярности применить невозможно, и поэтому они хранятся в обычном (несжатом) виде, а синим – блоки, к которым можно применить АСА.

Рассмотрим принципы работы АСА более подробно на примере простой структуры – прямоугольника, имеющего 121 сегмент. Вид структуры с обозначенными центрами сегментов приведен на рис. 2а. Нумерация сегментов производится против часовой стрелки, начиная с левого нижнего угла. Алгоритм АСА выполняется с использованием итерационного процесса. Сходимость процесса контролируется параметром  $ACA\_tol$ .



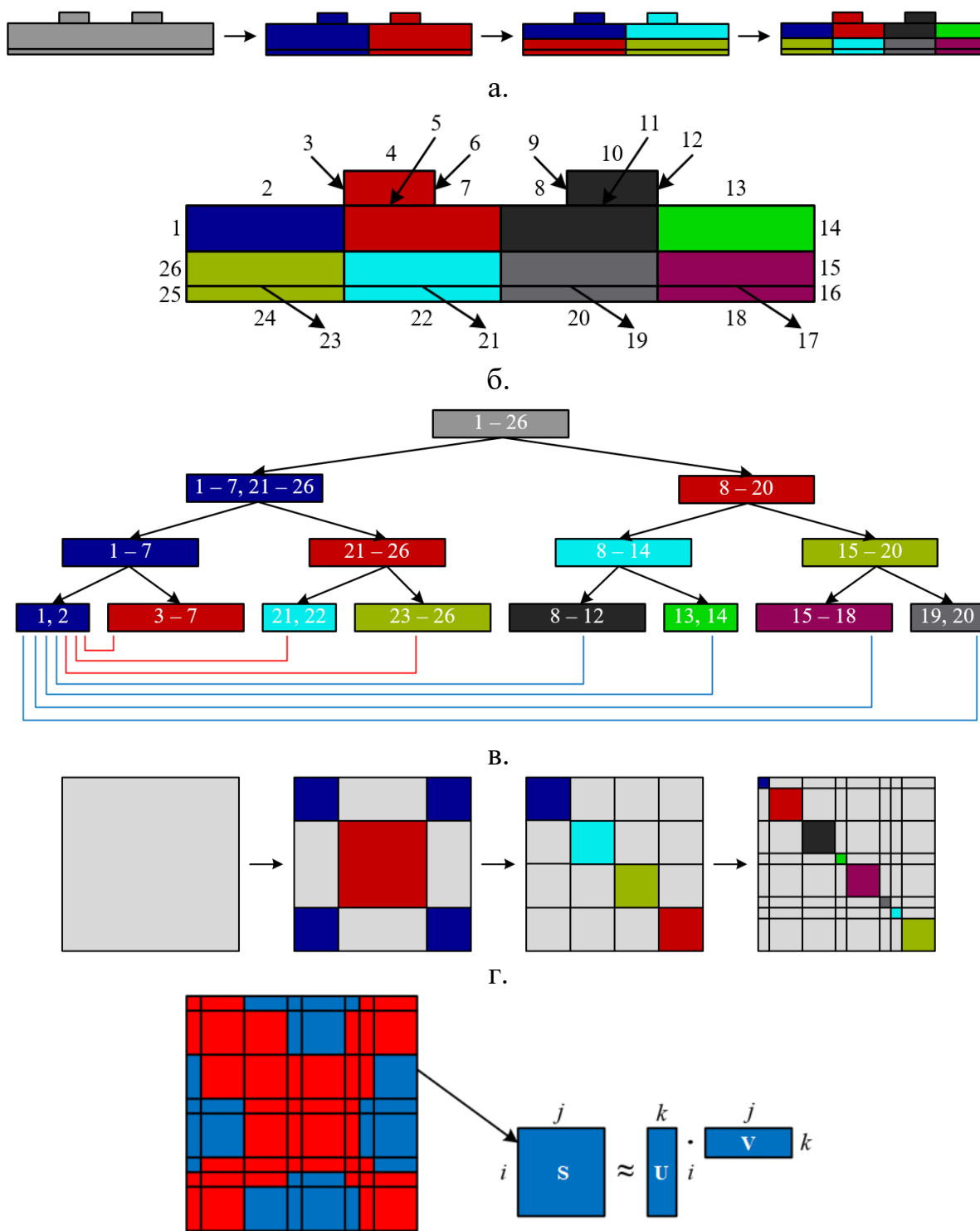


Рис. 1. Демонстрация использования АСА на примере двухпроводной линии передачи: разбиение МПЛП на части (а), нумерация сегментов (б), выделение ближних (красные линии) и дальних (синие линии) зон (в) и матричная интерпретация этого процесса (г), аппроксимация блока матрицы (д)

Произведем две итерации алгоритма. На первой итерации происходит разбиение структуры пополам или с коэффициентом 2 (рис. 2б), а на второй и последующих полученные части делятся с коэффициентом 4 (рис. 2в).

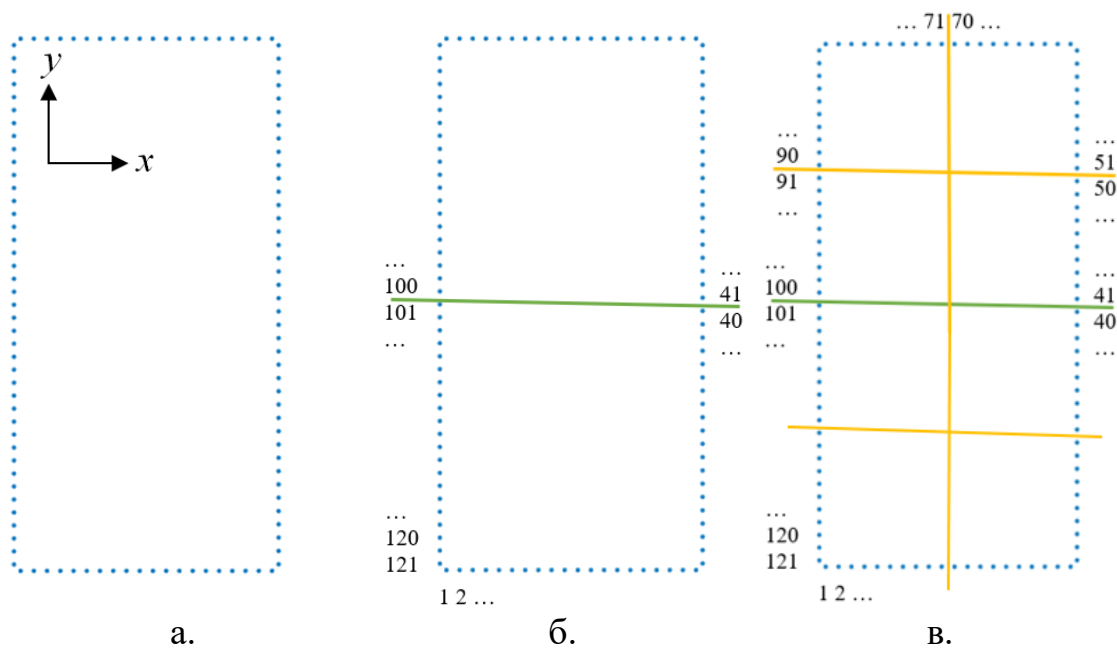


Рис. 2. Структура: исходная (а), после первой (б) и второй (в) итераций разбиения

На рис. 3а с соблюдением пропорций приведен портрет итогового разбиения матрицы  $Z$  и с использованием цветовых обозначений показаны ее блоки, а на рис. 3б красным отмечены блоки, хранящиеся в обычном (несжатом) виде, синим – в сжатом виде (с использованием АСА), а белым – нулевые элементы (не хранятся).

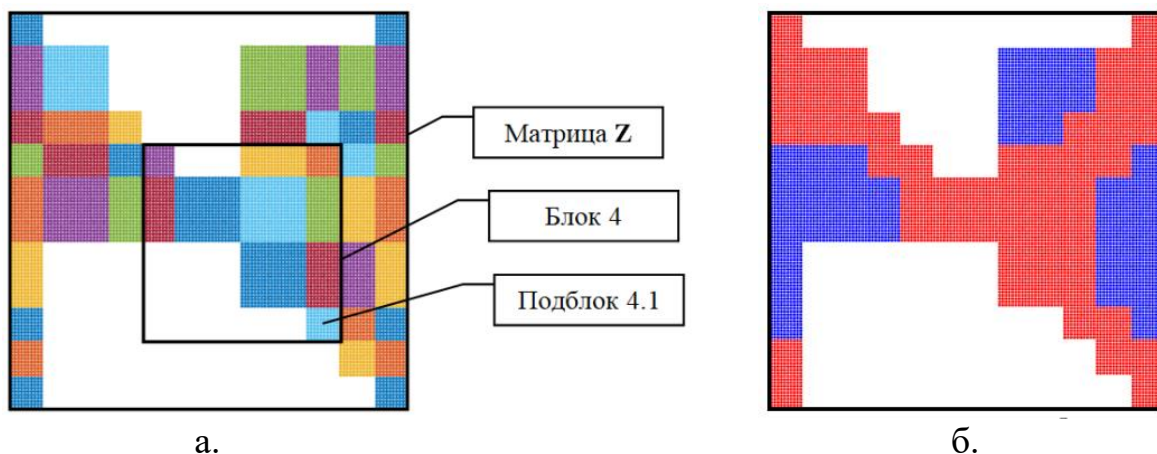


Рис. 3. Портрет матрицы  $Z$ : совместно хранящиеся блоки (а) и визуализация типов блоков (б)

Разбиение структуры приводит сначала к разбиению матрицы  $Z$  на блоки, а затем – на подблоки. Например, коэффициенты для первых двух итераций разбиения показаны на рис. 4. Далее необходимо перебрать все встречающиеся пары значений  $x_i$  и  $y_i$  для строк и столбцов матрицы  $Z$ . Так, для первой итерации встречаются всего две пары значений:  $x = 0, y = 0$  и  $x = 0, y = 1$ , поэтому разбиение на блоки будет соответствовать рис. 4в. На рис. 4г показано соответствие пар коэффициентов подблокам четвертого блока на второй итерации.

$N_i$	$x_i$	$y_i$
1	0	0
2	0	0
...	...	...
9	0	0
10	0	0
11	1	0
12	1	0
...	...	...
29	1	0
30	1	0
31	1	1
32	1	1
...	...	...
39	1	1
40	1	1
41	1	2
42	1	2
...	...	...
49	1	2
50	1	2
51	1	3
52	1	3
...	...	...
69	1	3
70	1	3
71	0	3
72	0	3
...	...	...
89	0	3
90	0	3
91	0	2
92	0	2
...	...	...
99	0	2
100	0	2
101	0	1
102	0	1
...	...	...
110	0	1
111	0	1
112	0	0
113	0	0
...	...	...
120	0	0
121	0	0

а.

$N_i$	$x_i$	$y_i$
1	0	0
2	0	0
...	...	...
39	0	0
40	0	0
41	0	1
42	0	1
...	...	...
99	0	1
100	0	1
101	0	0
102	0	0
...	...	...
120	0	0
121	0	0

б.

Строки		Столбцы	
$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
0	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	1	0	1

Блок	Строки блока	Столбцы блока
1	1-40 и 101-121	1-40 и 101-121
2	1-40 и 101-121	41-100
3	41-100	1-40 и 101-121
4	41-100	41-100

в.

Строки		Столбцы	
$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
...	...	...	...
0	2	0	2
0	2	0	3
0	2	1	2
0	2	1	3
0	3	0	2
0	3	0	3
0	3	1	2
0	3	1	3
1	2	0	2
1	2	0	3
1	2	1	2
1	2	1	3
1	3	0	2
1	3	0	3
1	3	1	2
1	3	1	3
...	...	...	...

Подблок	Строки подблока	Столбцы подблока
...	...	...
4.1	91-100	91-100
4.2	91-100	71-90
4.3	91-100	41-50
4.4	91-100	51-70
4.5	71-90	91-100
4.6	71-90	71-90
4.7	71-90	41-50
4.8	71-90	51-70
4.9	41-50	91-100
4.10	41-50	71-90
4.11	41-50	41-50
4.12	41-50	51-70
4.13	51-70	91-100
4.14	51-70	71-90
4.15	51-70	41-50
4.16	51-70	51-70
...	...	...

г.

Рис. 4. Значения коэффициентов на первой (б) и второй (а) итерациях и соответствие пар коэффициентов блокам и подблокам на первой (в) и второй (г) итерациях

Далее рассмотрим алгоритм АСА. Как показано ранее, при использовании МоМ формируется матричное уравнение (4) с плотной матрицей в левой части. Когда точки источников заряда  $\mathbf{r}'$  и наблюдения  $\mathbf{r}$  хорошо разнесены, их полное взаимодействие может быть аппроксимировано с произвольной точностью. Так, при числе точек наблюдения  $i$  и источников  $j$ , для вычисления их полного взаимодействия методом перебора (каждая с каждой) требуется  $O(ij)$  операций.



Объединение хорошо разнесенных между собой точек источников и наблюдения в группы позволяет более экономично описать общее взаимодействие. В результате происходит выделение ближних и дальних связей, где ближние вычисляются в полном виде как каждая с каждой, а дальние – в приближенном виде как группа с группой. Тогда матричное уравнение (4) можно записать как

$$\mathbf{Z}\Sigma \approx (\mathbf{Z}_{\text{near}} + \mathbf{Z}_{\text{far}})\Sigma = \Phi, \quad (6)$$

где  $\mathbf{Z}_{\text{far}}$  – часть матрицы  $\mathbf{Z}$ , содержащая «дальние» связи, а  $\mathbf{Z}_{\text{near}}$  – «ближние».

Как отмечено выше, из-за сингулярности функции Грина, АСА применяется не к матрице  $\mathbf{Z}_{\text{far}}$ , а к ее разнесенным блокам. Пусть для некоторого  $i$ -го блока

$$\mathbf{S}_{\text{far}} = \mathbf{R} + \mathbf{S}'_{\text{far}}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{R}$  – матрица погрешности,  $\mathbf{S}'_{\text{far}}$  – матрица меньшего, чем у  $\mathbf{S}_{\text{far}}$ , ранга.

Необходимо рассчитать  $\mathbf{S}'_{\text{far}}$  с заданной точностью  $ACA\_tol$ , т.е.

$$\|\mathbf{R}\| = \|\mathbf{S}'_{\text{far}} - \mathbf{S}_{\text{far}}\| \leq ACA\_tol \|\mathbf{S}'_{\text{far}}\|. \quad (8)$$

Тогда алгоритм АСА может быть представлен в виде [24]:

1. Задать векторы  $\mathbf{I} = [I_1, \dots, I_r]$  и  $\mathbf{J} = [J_1, \dots, J_r]$ , содержащие индексы строк и столбцов матрицы  $\mathbf{S}_{\text{far}}$  соответственно и выбрать максимальное число итераций  $N_{it}^{\max}$ .

2. Положить  $\mathbf{S}'_{\text{far}} = 0$ ,  $I_1 = 1$ ,  $\mathbf{R}(I_1, :)^1 = \mathbf{S}_{\text{far}}(I_1, :)$ .

3. Найти  $J_1$ , при котором  $|\mathbf{R}(I_1, J_1)| = \max_j |\mathbf{R}(I_1, j)|$ .

4. Вычислить  $\mathbf{V}(I_1, :) = \mathbf{R}(I_1, :) / \mathbf{R}(I_1, J_1)$  и  $\mathbf{U}(:, I_1) = \mathbf{R}(:, J_1) = \mathbf{S}_{\text{far}}(:, J_1)$ .

5. Вычислить  $\|\mathbf{S}_{\text{far}}\|_F^2 = \|\mathbf{S}_{\text{far}}\|_F^2 + \|\mathbf{U}(:, I_1)\|_F^2 \|\mathbf{V}(I_1, :)\|_F^2$ .

6. Найти  $I_2$ , при котором  $|\mathbf{R}(I_2, J_1)| = \max_i |\mathbf{R}(i, J_1)|$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $i \neq I_1$ .

Для  $k = 2, 3, \dots, N_{it}^{\max}$

7. Вычислить  $\mathbf{R}(I_k, :) = \mathbf{S}_{\text{far}}(I_k, :) - \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{U}(I_k, l) \mathbf{V}(l, :)$ .

8. Найти  $J_k$ , при котором  $|\mathbf{R}(I_k, J_k)| = \max_{j \neq J_1, \dots, J_{k-1}} |\mathbf{R}(I_k, j)|$ .

Если  $\mathbf{R}(I_k, J_k) = 0$

9. Прервать вычисления (решение не найдено).

Иначе

10. Вычислить  $\mathbf{V}(k, :) = \mathbf{R}(I_k, :) / \mathbf{R}(I_k, J_k)$ .

11. Вычислить  $\mathbf{R}(:, J_k) = \mathbf{S}_{\text{far}}(:, J_k) - \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{V}(J_k, l) \mathbf{U}(:, l)$  и положить

$\mathbf{U}(:, k) = \mathbf{R}(:, J_k)$ .

12. Вычислить  $\|\mathbf{S}_{\text{far}}\|_F^2 = \|\mathbf{S}_{\text{far}}\|_F^2 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} |\mathbf{U}(:, j)^T \mathbf{U}(:, k)| \|\mathbf{V}(j, :)^T \mathbf{V}(k, :)| +$

$+ \|\mathbf{U}(:, k)\|_F^2 \|\mathbf{V}(k, :)\|_F^2$ .

Если  $\|\mathbf{U}(:, k)\|_2 \|\mathbf{V}(k, 1)\|_2 \leq ACA\_tol \|\mathbf{S}'_{\text{far}}\|_F$

13. Прервать вычисления (решение найдено).

<sup>1</sup> Здесь и далее в алгоритме использован синтаксис Matlab/Octave, где  $\mathbf{R}(I_1, :)$ , например, обозначает все столбцы  $I_1$ -ой строки матрицы  $\mathbf{R}$ .

Иначе

14. Найти  $I_{k+1}$ , при котором  $|\mathbf{R}(I_{k+1}, J_k)| = \max_i |\mathbf{R}(i, J_k)|$ ,  $i \neq I_1, \dots, I_k$ .

В результате работы алгоритма получается  $i$ -й блок  $\mathbf{S}'_{\text{far}} = \mathbf{UV}$  с заданной точностью.

### Уменьшение затрат времени на многовариантный анализ МПЛП за счет использования метода VI-BiCGStab

Исследовано использование метода VI-BiCGStab для уменьшения времени решения последовательности матричных уравнений, возникающей при многовариантном анализе МПЛП, на примере связанной линии передачи (далее ЛП 1), поперечное сечение которой приведено на рис. 5. Рассмотрено изменение 1, 2, 3 и 4 геометрических параметров (варьировались  $s$ ,  $t$ ,  $w$  и  $h$ ). Число значений изменяемых параметров принято равным 100. При этом параметры выбирались случайно из следующих диапазонов (в мм):  $0,1 < s < 2$ ;  $0,018 < t < 0,2$ ;  $0,5 < w < 2$ ;  $0,1 < h < 2$ . При этом  $d = 1,894$  мм;  $\epsilon_r = 5$ . Характер последовательных изменений значений параметров ( $p$ , мм) для ЛП 1 показан на рис. 6.

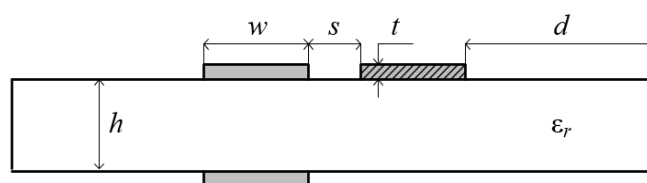


Рис. 5. Поперечное сечение ЛП 1

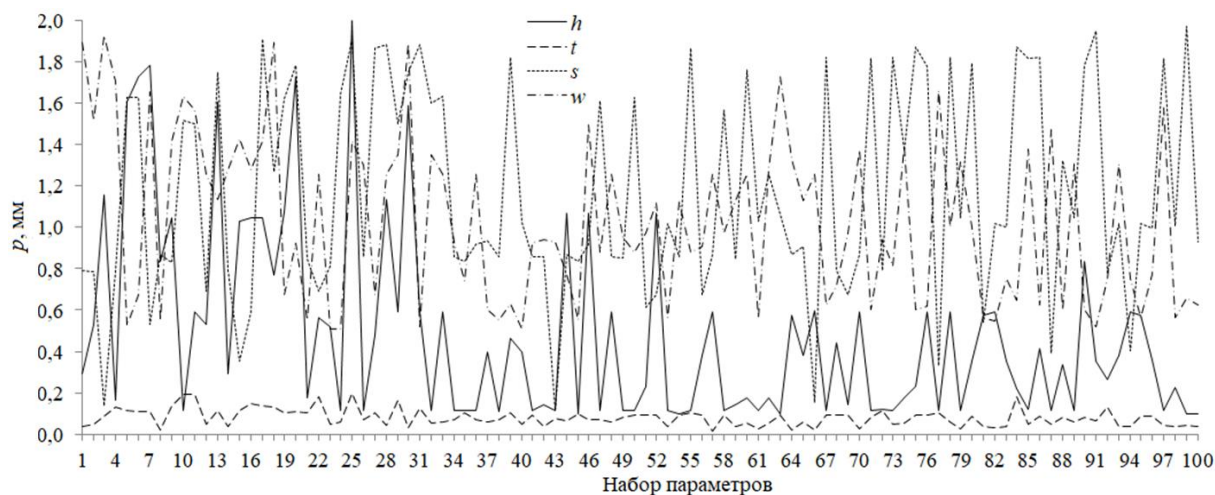


Рис. 6. Значения параметров ЛП 1 при ее многовариантном анализе

Вычисления производились на персональном компьютере со следующими характеристиками: процессор – AMD Ryzen 3 3200G, тактовая частота – 3,6 ГГц, число ядер – 4; объем оперативной памяти – 16 Гб. При вычислениях использована частая равномерная сегментация с длиной сегментов  $t/7$  (использовалось среднее значение параметра  $t$  из диапазона). Вычисления производились в программном средстве GNU Octave, использована авторская реализация

МоМ [25]. Рассмотрены только вариации, при которых параметры структуры от итерации к итерации не имеют повторяющихся значений. На рис. 7 показан портрет изменений матрицы, полученный при вариации параметров ЛП 1.

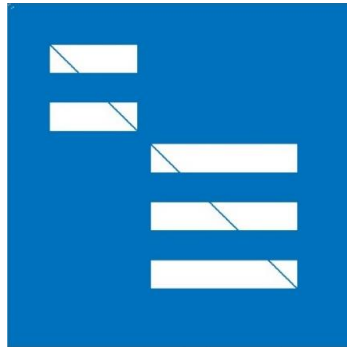


Рис. 7. Портрет изменений матрицы для ЛП 1 при вариации значений ее параметров

Исследованы варианты использования итерационного решения всей последовательности (5) без предобусловливания, с диагональным предобусловливанием и с предобусловливателем в виде LU-разложения. При этом использовано нулевое начальное приближение.

Под предобусловливателем в виде LU-разложения понимается использование LU-разложения, полученного при решении первого уравнения последовательности, в качестве «замороженного» предобусловливателя для решения остальных уравнений, причем первое уравнение решается методом Гаусса.

После решения матричного уравнения вычислялась емкостная матрица  $C$ , точный и быстрый расчет которой является одним из важных этапов при моделировании, поскольку она является исходной для вычисления других матриц погонных параметров, характеризующих МПЛП [26].

Получены числа итераций  $N_{it}$ , затраченных на решение последовательности первых 10 уравнений итерационным методом BI-BiCGStab с предобусловливанием и без него при изменении одного ( $t$ ), двух ( $t$  и  $h$ ), трех ( $t$ ,  $h$  и  $s$ ) и четырех ( $t$ ,  $h$ ,  $s$  и  $w$ ) геометрических параметров линии. Размерности матричного уравнения  $N = 1007$ . Все вычисления произведены при  $tol = 10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ . Максимальное число итераций  $N_{it}^{max} = 250$ . Также вычислены различия по матричным нормам (для емкостной матрицы  $C$ ) относительно метода Гаусса ( $C_{GE}$ ), оцениваемые как

$$\Delta C_F = \frac{\|C_{GE} - C_{BI-BiCGStab}\|_F}{\|C_{GE}\|_F} \cdot 100\% \quad (9)$$

где  $\|\cdot\|_F$  – норма Фробениуса.

Результаты приведены в таблицах П.10–П.13 приложения 1. Из них следует, что для случая с максимальными изменениями (вариация 4-х параметров) при  $tol = 10^{-2}$  различия по матричным нормам часто превышают 1%, что говорит о недостаточной точности вычислений (таблица П.13). Средние различия по матричным нормам составили: для расчета без предобусловливания – 42%, с диагональным предобусловливанием – 2%, а с LU-разложением – 1%. Среднее

число итераций составило 53, 6 и 3 соответственно. При  $tol = 10^{-4}$  для случаев с предобусловливанием средние различия составили менее 0,1% (0,03% с диагональным предобусловливанием и 0,01% с LU-разложением) при увеличении среднего числа итераций до 21 и 6 соответственно, что дает избыточную точность вычислений. Кроме того, из таблицы П.13 видно, что без предобусловливания при  $tol = 10^{-3}$  и  $tol = 10^{-4}$  сходимости решения добиться не удалось. Первые 10 вычисленных матриц  $C$  для случая вариации 4-х параметров сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Емкостные матрицы (пФ/м), вычисленные с использованием методов Гаусса и BI-BiCGStab при  $tol = 10^{-3}$ , для ЛП 1 при изменении  $t, h, s$  и  $w$

№	$C_{GE}$		$C_{BI-BiCGStab}$					
			Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
1	331,82	-316,81	329,43	-314,19	333,52	-318,27	330,34	-314,01
	-316,22	330,70	-276,53	288,22	-316,47	330,96	-314,45	327,50
2	166,57	-147,58	201,43	-172,30	166,51	-147,52	165,54	-146,80
	-147,21	165,23	-64,42	107,82	-147,16	165,12	-146,36	164,21
3	141,22	-84,05	141,28	-83,52	141,24	-84,00	141,22	-84,05
	-83,74	114,00	-83,62	113,92	-83,71	113,92	-83,72	113,99
4	503,75	-489,70	505,51	-491,63	503,90	-489,80	503,72	-489,73
	-488,65	502,07	-489,88	503,44	-488,68	502,14	-488,63	502,06
5	47,55	-29,98	50,20	-23,00	47,89	-30,13	47,56	-29,98
	-29,88	45,88	-33,58	36,19	-30,14	46,37	-29,89	45,88
6	51,71	-32,96	352,45	-85,86	51,76	-32,88	51,75	-33,01
	-32,85	49,78	-53,17	52,36	-32,83	49,88	-32,88	49,79
7	90,47	-53,11	91,67	-52,71	90,66	-53,18	90,50	-53,11
	-52,89	78,59	-53,68	78,75	-52,86	78,64	-52,90	78,59
8	64,00	-45,23	65,75	-46,90	63,94	-45,12	64,46	-45,52
	-45,11	62,55	-43,38	60,67	-44,86	62,31	-45,43	63,11
9	102,48	-77,14	103,01	-77,67	102,79	-77,28	102,48	-77,14
	-76,86	99,00	-77,54	100,12	-76,88	99,20	-76,86	99,01
10	688,76	-678,77	685,01	-672,28	688,99	-678,97	688,75	-678,66
	-677,50	687,19	-680,72	692,33	-677,78	687,50	-677,51	687,08

Из таблицы 1 видно, что точность результатов для случаев с предобусловливанием высокая, а без него, наоборот, низка из-за отсутствия сходимости решения. Это также видно из таблицы П.13 (среднее различие по матричным нормам для расчета без предобусловливания при  $tol = 10^{-3}$  составило 49%).

В результате наиболее предпочтительным для рассмотренной МПЛП является значение  $tol = 10^{-3}$ , так как при нем для случаев с предобусловливанием сохраняется высокая точность вычислений (средние значения различий матричных норм с диагональным предобусловливанием – 0,3%, с LU-разложением – 0,2%) при сохранении приемлемого числа итераций (11 и 4 соответственно).

В таблице 2 приведено ускорение решения последовательности всех 100 матричных уравнений для ЛП 1 (при  $N = 1007$  методом BI-BiCGStab с ис-

пользованием предобусловливания и без него при  $tol = 10^{-3}$ ) относительно метода Гаусса. Видно, что метод BI-BiCGStab при использовании предобусловливания дает выигрыш по времени относительно метода Гаусса: при диагональном в среднем в 1,41 раза, а при LU-разложении – в 1,49 раза.

Таблица 2 – Ускорение решения последовательности (5) при  $n = 100$  методом BI-BiCGStab с использованием предобусловливания и без него относительно метода Гаусса для ЛП 1

Изменяемые параметры	Без предобусловливания	Диагональное предобусловливание	Предобусловливание в виде LU-разложения
$s$	0,34	1,61	2,02
$w$	0,32	1,80	2,15
$t$	0,34	1,75	2,42
$h$	0,33	1,74	1,95
$s$ и $w$	0,34	1,70	1,76
$t$ и $h$	0,31	1,73	1,83
$t, h$ и $s$	0,32	1,58	1,87
$t, h, s$ и $w$	0,30	1,77	1,93

Далее многовариантный анализ по одному ( $t$ ), трем ( $t, s_1$  и  $s_2$ ) и пяти ( $t, h, s_1, s_2$  и  $w$ ) геометрическим параметрам выполнен для МПЛП, поперечное сечение которой приведено на рис. 8 (далее ЛП 2). Число значений изменяемых параметров принято равным 100, они выбирались случайно из следующих диапазонов (в мм):  $0,1 < s_1 < 2$ ;  $0,1 < s_2 < 2$ ;  $0,018 < t < 0,2$ ;  $0,5 < w < 2$ ;  $0,1 < h < 2$ . При этом  $d = 5,2413$  мм;  $\epsilon_r = 4,5$ . Характер изменений значений параметров ( $p$ , мм) показан на рис. 9.

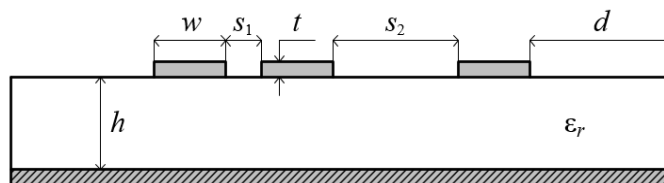


Рис. 8. Поперечное сечение ЛП 2

Получены числа итераций  $N_{it}$  на решение первых 10 уравнений при  $N = 1008$  и различия по матричным нормам для вариации пяти параметров при  $tol = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  (таблица П.14 приложения 1). Видно, что при  $tol = 10^{-1}$  различия по матричным нормам существенно превышают 1%, что дает низкую точность вычислений. При  $tol = 10^{-3}, 10^{-4}$  и некоторых наборах параметров нет сходимости решения, а для случая без предобусловливания сходимость есть только для  $tol = 10^{-1}$ . В результате наиболее предпочтительным для ЛП 2 является значение  $tol = 10^{-2}$ , так как при этом в случаях с предобусловливанием сохраняется высокая точность вычислений (средние различия по матричным нормам при диагональном предобусловливании – 1,2%, а с LU-разложением – 0,9%) при сохранении приемлемого числа итераций (7 и 8 соответственно).



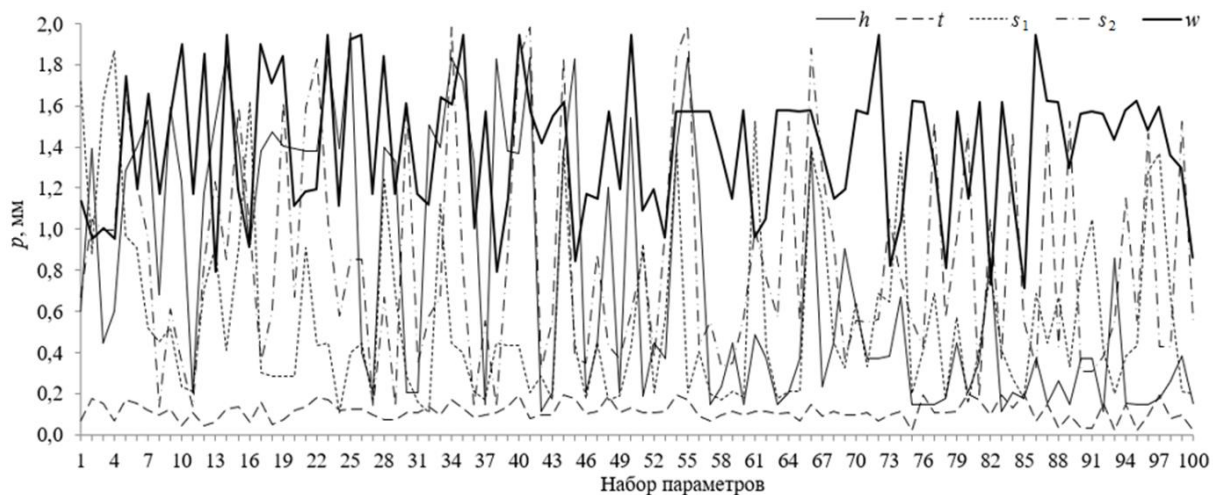


Рис. 9. Значения параметров ЛП 2 при ее многовариантном анализе

В таблицу 3 сведено ускорение решения последовательности (5) при  $n = 100$  для ЛП 2 и  $N = 1008$  методом V1-BiCGStab с использованием предобусловливания и без него при  $tol = 10^{-2}$  относительно метода Гаусса. Из таблицы видно, что метод V1-BiCGStab при использовании диагонального предобусловливания дает ускорение в среднем в 1,38 раза. При использовании LU-разложения ускорение наблюдается лишь при изменении одного параметра  $t$  (в 1,86 раза). При этом для ЛП 2 матрицы, полученные при использовании метода V1-BiCGStab без предобусловливания, часто нефизичны и неточны, а матрицы, полученные с предобусловливанием, хорошо согласуются с полученными с использованием метода Гаусса.

Таблица 3 – Ускорение решения последовательности (5) при  $n = 100$  методом V1-BiCGStab с использованием предобусловливания и без него относительно метода Гаусса для ЛП 2

Изменяемые параметры	Без предобусловливания	Диагональное предобусловливание	Предобусловливание в виде LU-разложения
$t$	0,18	1,50	1,86
$t, s_1$ и $s_2$	0,17	1,27	0,69
$t, h, s_1, s_2$ и $w$	0,19	1,37	0,56

Из полученных результатов (таблицы 2 и 3) видно, что для обеих исследованных МПЛП ( ЛП 1 и ЛП 2) использование метода V1-BiCGStab с предобусловливанием является эффективным средством снижения времени решения последовательности (5) как при изменении одного, так и нескольких геометрических параметров МПЛП. При использовании метода V1-BiCGStab без предобусловливания матрица  $C$ , из-за отсутствия сходимости, как правило, нефизична. Использование метода V1-BiCGStab с диагональным предобусловливанием является наилучшим вариантом из рассмотренных, т.к. позволяет получить требуемое уменьшение затрат времени на многовариантный анализ обеих МПЛП при любом числе изменяемых параметров. Так, выигрыш относительно использования метода Гаусса составил до 1,8 раза при высокой точности результатов. Использование метода V1-BiCGStab с предобусловливанием в виде LU-

разложения является наилучшим вариантом только для МПЛП с лицевой связью (таких, как ЛП 1) для всех вариантов ее параметров, а для МПЛП с торцевой связью (как ЛП 2) такой подход эффективен только при изменении одного геометрического параметра МПЛП.

Далее исследовано влияние на сокращение вычислительных затрат шага изменения параметров МПЛП. Так, случайные вариации геометрических параметров МПЛП, обусловленные технологическим процессом, приводят к небольшим изменениям значений этих параметров, как правило, в пределах нескольких процентов, однако, поиск оптимальных значений геометрических параметров требует их варьирования в широких пределах, как правило, из ряда стандартных значений. Оба этих случая приводят к необходимости многократно решать матричное уравнение. Тем не менее, возможности сокращения затрат времени различаются.

Исследование проведено на примере вариации одного параметра – толщины проводников  $t$ . Для этого рассмотрены две МПЛП со сложной геометрией, их поперечные сечения приведены на рис. 10 (далее ЛП 3 и ЛП 4). Рассмотрены 2 вида изменения параметра  $t$ : в диапазоне  $\pm 5\%$  от номинального значения с шагом 1% (всего 11 значений) – далее случай 1; из ряда стандартных толщин проводников печатных плат (в мкм): 5, 18, 35, 50, 75 и 105 (всего 6 значений) – далее случай 2.

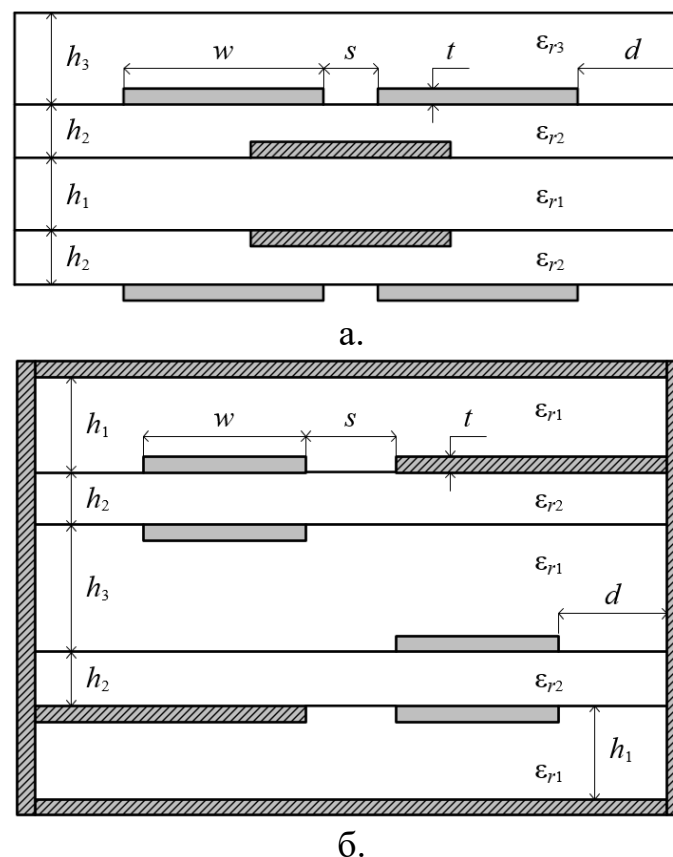


Рис. 10. Поперечные сечения ЛП 3 (а) и ЛП 4 (б)

Для ЛП 3 порядок матричного уравнения для всех случаев составил 5000, а для ЛП 4 – 10010. Параметры МПЛП: для ЛП 3  $t = 34,9554$  мкм,

$w = 0,998725$  мм,  $s = 0,699107$  мм,  $d = 2,996175$  мм,  $h_1 = 0,497375$  мм,  $h_2 = 0,246187$  мм,  $h_3 = 0,999756$  мм,  $\varepsilon_{r1} = 4,77417$ ,  $\varepsilon_{r2} = 4,26451$ ,  $\varepsilon_{r3} = 4,1605$ ; для ЛП 4  $t = 105$  мкм,  $w = 10$  мм,  $s = 2$  мм,  $d = 8$  мм,  $h_1 = 10$  мм,  $h_2 = 0,33$  мм,  $h_3 = 2,54$  мм,  $\varepsilon_{r1} = 1$ ,  $\varepsilon_{r2} = 4,5$ .

Число итераций  $N_{it}$  и различия по матричным нормам для ЛП 3 приведены в таблицах 4 и 5. При вычислениях  $N_{it}^{\max}$  принят равным 50, а  $tol = 10^{-3}$ . Предобусловливатель для случая 1 рассчитывался при номинальном значении  $t$ , а для случая 2 –  $t = 50$  мкм.

Таблица 4 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5), и различия по матричным нормам при использовании метода BI-BiCGStab для случая 1 и ЛП 3

Изменение $t$ , %	Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %
-5	11	0,123	1	0,017
-4	19	0,037	1	0,011
-3	11	0,130	1	0,006
-2	16	0,076	1	0,003
-1	16	0,066	1	< 0,001
0	11	0,107	1	0
1	19	0,033	1	< 0,001
2	12	0,086	1	0,003
3	11	0,097	1	0,006
4	12	0,074	1	0,011
5	15	0,061	1	0,017

Таблица 5 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5), и различия по матричным нормам при использовании метода BI-BiCGStab для случая 2 и ЛП 3

$t$ , мкм	Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %
5	45	0,155	8	0,608
18	12	0,245	2	0,321
35	19	0,043	2	0,005
50	12	0,098	1	0
75	17	0,046	2	0,012
105	12	0,083	4	0,004

Из таблицы 4 видно, что использование LU-разложения при небольших изменениях в матричном уравнении (случай 1) позволяет методу BI-BiCGStab всегда сходиться за одну итерацию. При этом отличие от результатов метода Гаусса во всех случаях менее 0,1%. При диагональном предобусловливании метод сходится с различием менее 1% и в среднем за 14 итераций. Из таблицы 5 следует, что при более существенных изменениях в матричном уравнении (случай 2) число итераций при использовании LU-разложения увеличивается, а

точность незначительно уменьшается (среднее различие 0,16% при 3 итерациях в среднем). При диагональном предобусловливании точность метода BI-BiCGStab и число итераций, за которые он сходится, существенно не изменяются (исключая «выброс» в 45 итераций при  $t = 5$  мкм).

Среднее время на одно решение матричного уравнения методом Гаусса составило 2,38 с, а методами BI-BiCGStab и диагонального предобусловливания – 1,64 с. При использовании LU-разложения для случая 1 среднее время составило 0,67 с, а для случая 2 – 2 с. При этом дополнительное время, необходимое для однократного LU-разложения, составило 2,13 с. В результате экономия времени для случая 1 составила 39% при использовании диагонального предобусловливания и 64% – LU-разложения. Для случая 2 экономия составила 16% и 2% соответственно.

Аналогичные вычисления произведены для ЛП 4. Число итераций и различия по матричным нормам приведены в таблицах 6 и 7. Из таблицы 6 (случай 1) видно, что при диагональном предобусловливании среднее различие результатов составило 0,41%, а среднее число итераций – 28. При использовании LU-разложения – 0,33% и 3 соответственно. Из таблицы 7 видно, что при диагональном предобусловливании среднее число итераций составило 28, как и для случая 1, а среднее различие составило 0,81%. При использовании LU-разложения данные не получены из-за отсутствия сходимости (число итераций превысило максимальное заданное значение при среднем относительном различии результатов более 100%).

Среднее время решения одного матричного уравнения для случая 1 методом Гаусса составило 15,87 с, при использовании диагонального предобусловливания – 10,81 с, а LU-разложения – 6,81 с. При этом дополнительное время, необходимое для однократного LU-разложения, составило 14,78 с. В результате экономия времени для случая 1 составила при использовании диагонального предобусловливания 33%, а при LU-разложении – 49%. Для случая 2 при использовании диагонального предобусловливания – 31%.

Таблица 6 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5), и различия по матричным нормам при использовании метода BI-BiCGStab для случая 1 и ЛП 4

Изменение $t$ , %	Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %
-5	26	0,082	5	0,368
-4	32	0,236	5	0,294
-3	29	0,770	5	0,607
-2	27	0,883	1	0,174
-1	27	0,847	1	0,892
0	26	0,186	1	0
1	28	0,226	1	0,056
2	27	0,385	1	0,093
3	27	0,595	1	0,457
4	26	0,125	5	0,495
5	28	0,143	5	0,189

Таблица 7 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5), и различия по матричным нормам при использовании метода BI-BiCGStab для случая 2 и ЛП 4

$t$ , мкм	Диагональное предобусловливание	
	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %
5	35	1,796
18	26	1,482
35	26	0,867
50	30	0
75	27	0,307
105	26	0,186

Таким образом, на примере 4 МПЛП показано, что метод BI-BiCGStab при использовании предобусловливания дает выигрыш по времени относительно метода Гаусса, причем при переходе от случая 1 к случаю 2 число итераций увеличивается, а точность незначительно уменьшается.

### Уменьшение вычислительных затрат за счет использования АСА

Далее исследована возможность сокращения используемой машинной памяти при итерационном решении последовательности матричных уравнений (5) за счет совместного использования АСА и метода BI-BiCGStab на примере многовариантного анализа ЛП 3 и ЛП 4. Для получения последовательности (5) параметр  $t$  варьировался в диапазоне  $\pm 5\%$  от номинального значения с шагом 1% ( $n = 11$ ). Значение  $tol$  принято равным  $10^{-3}$ , а  $ACA_{tol} - 10^{-2}$ . Число итераций и различия по нормам емкостной матрицы для ЛП 3 сведены в таблицу 8, а для ЛП 4 – таблицу 9.

Таблица 8 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5) при  $n = 11$ , и различия по матричным нормам при использовании методов BI-BiCGStab и АСА для ЛП 3 при изменении  $t$

Изменение $t$ , %	Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание	
	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %
-5	33	0,097	7	0,403
-4	32	0,096	7	0,651
-3	35	0,104	7	0,629
-2	34	0,095	7	0,356
-1	39	0,145	7	0,421
0	33	0,124	7	0,432
1	50	0,149	7	0,573
2	28	0,150	7	0,442
3	25	0,231	8	0,160
4	39	0,123	7	0,473
5	29	0,113	7	0,505



Таблица 9 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5) при  $n = 11$ , и различия по матричным нормам при использовании методов BI-BiCGStab с диагональным предобусловливанием и АСА для ЛП 4 при изменении  $t$

Изменение $t$ , %	$N_{it}$	$\Delta C_F$ , %
-5	24	0,216
-4	27	0,043
-3	31	0,256
-2	30	0,148
-1	31	1,743
0	28	0,151
1	40	0,058
2	30	0,043
3	30	0,364
4	31	0,218
5	30	0,025

Как видно из таблицы 8, различия по нормам для всех случаев составили менее 1%. При этом без предобусловливания среднее число итераций составило 34, а с диагональным предобусловливанием – 7. Среднее время на одно вычисление методом Гаусса составило 2,38 с, при совместном использовании методов BI-BiCGStab без предобусловливания и АСА – 6,18 с, а с диагональным предобусловливанием и АСА – 5,25 с. Машинная память, требуемая для хранения матриц на каждой итерации при вычислении методом Гаусса составила 191 Мб, а при совместном использовании методов BI-BiCGStab и АСА – 95 Мб.

Отметим, что для ЛП 4 метод BI-BiCGStab без использования предобусловливания не сходится за максимальное число итераций, поэтому в таблице 9 приведены только результаты для диагонального предобусловливания. Из таблицы 9 видно, что среднее различие по матричным нормам составило 0,3 %, однако при изменении  $t$ , равном минус 1% различие более 1%. При этом среднее число итераций равно 30. Среднее время одного вычисления методом Гаусса составило 15,87 с, а при совместном использовании методов BI-BiCGStab и АСА – 39,9 с. При этом затраты машинной памяти составили 758 Мб и 209 Мб соответственно. В результате, несмотря на то, что совместное использование методов BI-BiCGStab и АСА увеличивает требуемое время решения относительно метода Гаусса до 2,6 раза, оно позволяет уменьшить затраты машинной памяти до 3,6 раза при сохранении высокой точности вычислений (в большинстве случаев различие составило менее 1%).

## Выводы

В работе исследованы подходы к уменьшению времени решения больших последовательностей матричных уравнений при многовариантном анализе параметров МПЛП: блочного итерационного решения методом BI-BiCGStab и адаптивной перекрестной аппроксимации.

На примере связанной микрополосковой линии передачи с лицевой связью и трехпроводной микрополосковой линии передачи с торцевой связью при их многовариантном (до 100 на параметр) анализе для 1–5 параметров показано, что метод BI-BiCGStab при использовании предобусловливания дает выигрыш по времени относительно метода Гаусса: при диагональном предобусловливании в среднем на 39,5%, а LU-разложении – 26,5%. Однако для линии с торцевой связью ускорение наблюдается лишь при варьировании одного параметра. Также показано, что при использовании BI-BiCGStab для линии с лицевой связью наиболее предпочтительно  $tol = 10^{-3}$ , а с торцевой –  $tol = 10^{-2}$ , так как при этом сохраняется высокая точность вычислений с предобусловливанием (различие по матричным нормам менее 1%). Выявлено, что емкостные матрицы, полученные при использовании метода BI-BiCGStab без предобусловливания, часто нефизичны и неточны, а с предобусловливанием – приемлемы.

При варьировании геометрических параметров как в узких, так и в широких пределах для 2- и 4-слойной 4-проводных линий передачи со сложной геометрией показано, что при переходе от варьирования геометрических параметров в 1% к более существенным изменениям, число итераций увеличивается, а точность незначительно уменьшается (различие по матричным нормам остается менее 1%). Кроме того, при использовании LU-разложения в качестве предобусловливателя при сильном варьировании параметров МПЛП в ряде случаев отсутствует сходимость. Экономия времени на многовариантный анализ МПЛП при малом изменении параметров в среднем составила 36% при использовании диагонального предобусловливания и 56,5% – LU-разложения, а при значительном – 23,5% и 2% соответственно.

Наконец, на примере двух указанных МПЛП со сложной геометрией исследована возможность сокращения используемой машинной памяти при итерационном решении последовательности матричных уравнений за счет совместного использования АСА и BI-BiCGStab. Выявлено, что это позволяет увеличить до 2,6 раза требуемое время решения относительно метода Гаусса, но уменьшить затраты машинной памяти до 3,6 раза при сохранении высокой точности вычислений. Это может быть использовано для случаев, когда необходим многовариантный анализ больших структур в условиях недостатка машинной памяти, сделав возможным отказ от использования параллельных вычислений и сверхмощных компьютеров в пользу простых рабочих станций, когда время расчета не критично. Однако в дальнейшем целесообразен поиск путей одновременного уменьшения затрат на многовариантный анализ МПЛП как времени, так и машинной памяти.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по проекту FEWM-2022-0001.*

Приложение 1.

Таблица П.10 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5), и различия по матричным нормам при использовании метода BI-BiCGStab для ЛП 1 при изменении  $t$

$tol$	Номер матричного уравнения	Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
		$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$
$10^{-2}$	1	21	2,445	5	4,859	2	1,820
	2	14	5,016	5	4,118	2	0,904
	3	20	3,790	5	3,131	1	0,257
	4	16	2,347	5	1,631	1	0,435
	5	19	2,324	5	1,717	1	0,010
	6	19	3,746	5	1,797	1	< 0,001
	7	19	2,390	5	1,826	1	< 0,001
	8	27	6,197	5	9,937	2	5,420
	9	13	1,144	5	1,713	1	1,000
	10	18	0,858	5	1,717	2	0,186
$10^{-3}$	1	250	123,699	12	0,348	2	1,820
	2	250	15,477	9	0,370	2	0,904
	3	105	0,392	9	0,388	2	0,002
	4	53	0,378	10	0,435	2	0,001
	5	250	55,556	10	0,410	1	0,010
	6	250	1,169	10	0,394	1	< 0,001
	7	250	2,562	11	0,222	1	< 0,001
	8	250	40,698	11	0,637	3	2,991
	9	77	0,338	12	0,396	2	0,005
	10	250	183,618	9	0,531	2	0,186
$10^{-4}$	1	250	123,699	18	0,038	5	0,007
	2	250	15,477	14	0,035	3	0,039
	3	250	0,530	17	0,036	2	0,002
	4	250	0,656	20	0,053	2	< 0,001
	5	250	55,556	15	0,069	1	0,010
	6	250	1,169	14	0,078	1	< 0,001
	7	250	2,562	18	0,047	1	< 0,001
	8	250	40,698	20	0,016	7	0,108
	9	250	0,395	20	0,055	2	0,005
	10	250	183,618	17	0,040	3	0,025

Таблица П.11 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5), и различия по матричным нормам при использовании метода BI-BiCGStab для ЛП 1 при изменении  $t$  и  $h$

$tol$	Номер матричного уравнения	Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
		$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$
$10^{-2}$	1	19	1,601	5	3,017	2	3,899
	2	23	2,891	5	3,882	2	2,926
	3	250	22,188	5	3,148	1	0,525
	4	70	0,265	6	0,265	3	0,381
	5	16	1,852	5	1,576	1	0,317
	6	26	4,730	5	1,823	1	0,914
	7	22	4,463	5	1,775	1	1,279
	8	19	8,836	5	11,074	2	3,890
	9	16	1,540	5	1,737	1	0,998
	10	35	0,268	6	0,359	3	0,288
$10^{-3}$	1	250	1,840	13	0,055	3	0,790
	2	73	0,334	8	0,441	3	0,228
	3	250	22,188	10	0,307	2	0,005
	4	240	0,084	11	0,089	5	0,004
	5	250	56,027	10	0,365	3	< 0,001
	6	250	13,839	10	0,337	3	< 0,001
	7	250	1,348	10	0,342	3	0,002
	8	250	58,498	12	0,564	3	2,205
	9	250	0,726	11	0,383	2	0,005
	10	250	4,988	11	0,089	5	0,012
$10^{-4}$	1	250	1,840	20	0,004	6	0,039
	2	250	1,862	14	0,050	4	0,037
	3	250	22,188	17	0,043	2	0,005
	4	250	0,218	16	0,023	9	< 0,001
	5	250	56,027	17	0,065	3	< 0,001
	6	250	13,839	16	0,100	3	< 0,001
	7	250	1,348	15	0,063	3	0,002
	8	250	58,498	18	0,025	6	0,206
	9	250	0,726	17	0,035	2	0,005
	10	250	4,988	20	0,007	9	< 0,001

Таблица П.12 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5), и различия по матричным нормам при использовании метода BI-BiCGStab для ЛП 1 при изменении  $t$ ,  $h$  и  $s$

$tol$	Номер матричного уравнения	Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
		$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$
$10^{-2}$	1	38	4,527	5	2,263	3	0,993
	2	17	2,023	5	3,617	2	0,975
	3	250	8,518	6	0,585	2	0,946
	4	23	0,264	6	0,209	2	0,558
	5	18	3,632	5	2,081	1	2,372
	6	24	4,276	5	2,029	1	3,136
	7	25	4,150	6	0,699	2	0,404

$tol$	Номер матричного уравнения	Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
		$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$
$10^{-2}$	8	250	3239,238	5	10,449	2	4,001
	9	16	0,691	5	1,707	1	0,557
	10	25	0,396	6	0,510	4	0,036
$10^{-3}$	1	250	1,283	11	0,092	4	0,354
	2	250	4,505	8	0,247	4	0,140
	3	250	8,518	12	0,238	4	0,016
	4	92	0,093	12	0,057	5	0,003
	5	250	1,999	10	0,500	2	0,031
	6	250	9,954	11	0,463	2	0,230
	7	250	2,743	9	0,481	3	0,054
	8	250	3239,238	12	0,590	3	2,562
	9	69	0,393	9	0,418	2	0,062
	10	250	398,732	13	0,080	5	0,011
$10^{-4}$	1	250	1,283	15	0,022	5	0,067
	2	250	4,505	14	0,018	5	0,020
	3	250	8,518	17	0,045	6	0,005
	4	250	8,674	16	0,016	6	< 0,001
	5	250	1,999	23	0,048	3	< 0,001
	6	250	9,954	15	0,082	3	0,003
	7	250	2,743	21	0,036	4	0,003
	8	250	3239,238	19	0,040	7	0,092
	9	250	0,401	17	0,036	3	0,004
	10	250	398,732	20	0,015	11	< 0,001

Таблица П.13 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5), и различия по матричным нормам при использовании метода BI-BiCGStab для ЛП 1 при изменении  $t, h, s$  и  $w$

$tol$	Номер матричного уравнения	Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
		$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$
$10^{-2}$	1	32	0,408	5	5,206	3	3,556
	2	25	5,019	5	3,145	2	1,978
	3	47	1,067	6	1,592	2	0,966
	4	35	0,282	8	0,054	4	0,034
	5	30	2,341	6	1,536	3	0,300
	6	250	405,486	6	1,616	2	1,240
	7	26	0,943	6	0,686	2	0,650
	8	30	3,066	5	4,578	3	0,781
	9	16	1,930	5	1,720	1	0,232
	10	36	0,129	6	0,227	4	0,017
$10^{-3}$	1	250	9,250	12	0,358	6	0,848
	2	250	42,830	12	0,055	3	0,636
	3	250	5,162	12	0,050	5	0,028
	4	250	0,358	12	0,023	5	0,010
	5	250	22,723	10	0,841	5	0,017
	6	250	405,486	12	0,383	3	0,085
	7	250	1,773	12	0,166	4	0,029



$tol$	Номер матричного уравнения	Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
		$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$
$10^{-3}$	8	250	2,965	8	0,575	3	0,781
	9	250	1,438	10	0,306	3	0,002
	10	250	0,787	14	0,038	5	0,019
$10^{-4}$	1	250	9,250	19	0,005	8	0,042
	2	250	42,830	20	0,009	5	0,023
	3	250	5,162	19	0,009	8	0,005
	4	250	0,358	18	0,004	9	< 0,001
	5	250	22,723	19	0,053	5	0,017
	6	250	405,486	19	0,094	5	0,002
	7	250	1,773	30	0,024	4	0,029
	8	250	2,965	18	0,039	6	0,003
	9	250	1,438	19	0,015	3	0,002
	10	250	0,787	25	0,010	9	< 0,001

Таблица П.14 – Число итераций, требуемых для решения последовательности (5), и различия по матричным нормам при использовании метода BI-BiCGStab для ЛП 2 при изменении  $t, h, s_1, s_2$  и  $w$

$tol$	Номер матричного уравнения	Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
		$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$
$10^{-1}$	1	3	25,370	3	20,484	3	3,862
	2	2	18,872	2	16,256	1	5,316
	3	3	30,501	3	18,580	4	3,111
	4	3	24,600	3	18,475	4	5,399
	5	3	20,709	3	14,521	1	4,188
	6	2	20,432	2	18,599	1	1,783
	7	3	15,658	2	17,246	1	4,788
	8	3	20,591	3	14,382	3	10,053
	9	3	14,438	2	15,108	1	4,379
	10	4	15,495	3	14,610	7	11,517
$10^{-2}$	1	250	255,194	8	0,810	5	0,403
	2	250	22,479	5	1,875	3	0,942
	3	250	54,442	7	1,444	5	1,020
	4	250	29,212	7	1,138	7	0,838
	5	250	32,486	8	0,462	6	1,317
	6	250	6,103	6	0,775	2	0,121
	7	250	631,644	6	1,660	10	0,677
	8	250	25,305	7	0,616	15	0,457
	9	250	21,613	7	0,811	12	1,517
	10	250	6,578	7	2,102	17	1,520
$10^{-3}$	1	250	255,194	33	0,368	5	0,403
	2	250	22,479	15	0,236	7	0,068
	3	250	54,442	22	0,379	12	0,097
	4	250	29,212	16	0,264	12	0,016
	5	250	32,486	250	0,619	12	0,044
	6	250	6,103	17	0,304	2	0,121
	7	250	631,644	250	1,905	250	15,534

<i>tol</i>	Номер матричного уравнения	Без предобусловливания		Диагональное предобусловливание		Предобусловливание в виде LU-разложения	
		$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$	$N_{it}$	$\Delta C_F, \%$
$10^{-3}$	8	250	25,305	18	0,174	20	0,045
	9	250	21,613	250	3,842	22	0,604
	10	250	6,578	250	4,381	250	3,340
$10^{-4}$	1	250	255,194	250	0,063	10	0,006
	2	250	22,479	30	0,015	8	0,012
	3	250	54,442	250	0,675	17	0,004
	4	250	29,212	210	0,002	15	0,006
	5	250	32,486	250	0,619	19	0,008
	6	250	6,103	250	0,056	5	0,026
	7	250	631,644	250	1,905	250	15,534
	8	250	25,305	250	0,050	38	< 0,001
	9	250	21,613	250	3,842	250	0,706
	10	250	6,578	250	4,381	250	3,340

### Литература

1. Гизатуллин З. М. Помехоустойчивость средств вычислительной техники внутри зданий при широкополосных электромагнитных воздействиях. – Казань: КНИТУ-КАИ, 2019. – 328 с.
2. Григорьев А. Д. Методы вычислительной электродинамики. – М.: Физматлит, 2013. – 430 с.
3. Maiti C. K. Computer Aided Design of Micro- and Nanoelectronic Devices. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 2016. – 455 p.
4. Maksimov A. E., Kuksenko S. P. Accurate Capacitance Matrices for Multiconductor Transmission Lines // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2022. Vol. 64. № 5. P. 1514-1521. DOI: 10.1109/TEMC.2022.3175717
5. Максимов А. Е., Куксенко С. П. О методах адаптивной сегментации при квазистатическом анализе многопроводных линий передачи // Журнал радиоэлектроники. 2023. № 1. DOI: 10.30898/1684-1719.2023.1.14
6. Maksimov A., Kuksenko S. Adaptive Segmentation of Multiconductor Transmission Lines in Quasi-static Analysis by the Method of Moments // Journal of Physics: Conference Series. 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/1862/1/012020
7. Максимов А. Е., Куксенко С. П. Исследование методов построения адаптивных сеток при квазистатическом анализе многопроводных линий передачи методом моментов // Журнал радиоэлектроники. 2021. № 1. DOI: 10.30898/1684-1719.2021.1.10
8. Максимов А. Е., Онищенко И. А. Использование адаптивной перекрестной аппроксимации при анализе линий передачи // Сборник избранных статей XXV Международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Научная сессия ТУСУР-2020». Томск, 2020. № 1-1. С. 263-266.

9. Özgün Ö, Kuzuoğlu M. MATLAB-based Finite Element Programming in Electromagnetic Modeling. – Oxfordshire United Kingdom: Taylor & Francis Group, 2018. – 428 p.
10. Harrington R. F. Field Computation by Moment Methods. – N.Y.: Macmillan, 1968. – 229 p.
11. Gazizov T. R. Analytic Expressions for MoM Calculation of Capacitance Matrix of Two Dimensional System of Conductors and Dielectrics having Arbitrary Oriented Boundaries // Proceedings of the 2001 IEEE EMC Symposium. Montreal, 2001. P. 151-155.
12. Venkataraman J., Rao S. M., Djordjevic A. R., Sarkar T. K., Naiheng Y. Analysis of Arbitrarily Oriented Microstrip Transmission Lines in Arbitrarily Shaped Dielectric Media Over a Finite Ground Plane // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1985. Vol. 33. № 10. P. 952-960. DOI: 10.1109/TMTT.1985.1133155
13. Paul C. R. Analysis of Multiconductor Transmission Lines. – Hoboken/New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. – 816 p.
14. Freund R. W., Golub G. H., Nachtigal N. Iterative Solution of Linear Systems // Acta Numerica. 1991. Vol. 1. P. 57-100. DOI: 10.1017/S0962492900002245
15. Fletcher R. Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems // Lecture Notes in Mathematics. 1976. Vol. 506. P. 73-89. DOI: 10.1007/BFB0080116
16. Lanczos C. Solution of Systems of Linear Equations by Minimized Iterations // Journal of Research of National Bureau of Standards. 1952. Vol. 49. № 1. P. 33-53. DOI: 10.6028/JRES.049.006
17. Yang L. T., Brent R. P. The Improved BiCGStab Method for Large and Sparse Unsymmetric Linear Systems on Parallel Distributed Memory Architectures // Fifth International Conference on Algorithms and Architectures for Parallel Processing. Beijing, 2002. DOI: 10.1109/ICAPP.2002.1173595
18. Van der Vorst H. A. Bi-CGStab: a Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1992. Vol. 13. P. 631-644.
19. El Guennouni A., Jbilou K., Sadok H. A. Block Version of BiCGSTAB for Linear Systems with Multiple Right-hand Sides // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2003. Vol. 16. P. 129-142.
20. Горейнов С. А., Замарашкин Н. Л., Тыртышников Е. Е. Псевдоскелетные аппроксимации при помощи подматриц наибольшего объема // Математические заметки. 1997. Т. 62. № 4. С. 619-623.
21. Tyrtysnikov E. E. Incomplete Cross Approximation in the Mosaic-Skeleton Method // Computing. 2000. № 64. P. 367-380.
22. Shaeffer J. Million Plus Unknown MOM LU Factorization on a PC // IEEE International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications. 2015. P. 62-65.

23. Li M., Ding D., Heldring A., Hu J., Chen R., Vecchi G. Low-Rank Matrix Factorization Method for Multiscale Simulations: A Review // *IEEE Open Journal of Antennas and Propagation*. 2021. Vol. 2. P. 286-301.

24. Rjasanow S., Steinbach O. *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. – New York: Springer, 2007. – 279 p.

25. Максимов А. Е., Куksenко С. П. Программа для расчета матриц коэффициентов электростатической и электромагнитной индукции методом моментов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. № 2022662895. 2022.

26. Gazizov T. R., Sagiyeva I. Y., Kuksenko S. P. Solving the Complexity Problem in the Electronics Production Process by Reducing the Sensitivity of Transmission Line Characteristics to Their Parameter Variations // *Complexity*. 2019. Vol. 2019. DOI: 10.1155/2019/6301326

## References

1. Gizatullin Z. M. *Pomekhoustoichivost' sredstv vychislitel'noi tekhniki vnutri zdanii pri shirokopolosnykh elektromagnitnykh vozdeistviakh* [Interference Immunity of Computing Equipment Inside Buildings Under Broadband Electromagnetic Effects]. Kazan, Tupolev Kazan National Research Technical University, 2019. 328 p. (in Russian).

2. Grigor'ev A. D. *Metody vychislitel'noi elektrodinamiki* [Methods of Computational Electrodynamics]. Moscow, Fizmatlit, 2013. 430 p. (in Russian).

3. Maiti C. K. *Computer Aided Design of Micro- and Nanoelectronic Devices*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2016. 455 p.

4. Maksimov A. E., Kuksenko S. P. Accurate Capacitance Matrices for Multiconductor Transmission Lines. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2022, vol. 64, no. 5, pp. 1514-1521. DOI: 10.1109/TEMC.2022.3175717

5. Maksimov A. E., Kuksenko S. P. Adaptive Segmentation Methods for Quasi-static Analysis of Multiconductor Transmission Lines. *Journal of Radio Electronics*, 2023, no. 1. DOI: 10.30898/1684-1719.2023.1.14. (in Russian).

6. Maksimov A., Kuksenko S. Adaptive Segmentation of Multiconductor Transmission Lines in Quasi-static Analysis by the Method of Moments. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/1862/1/012020

7. Maksimov A. E., Kuksenko S. P. Study of Methods for Constructing Adaptive Meshes for Quasi-static Analysis of Multiwire Transmission Lines by the Method of Moments. *Journal of Radio Electronics*, 2021, no. 1. DOI: 10.30898/1684-1719.2021.1.10 (in Russian).

8. Maksimov A. E., Onishchenko I. A. Ispol'zovanie adaptivnoi perekrestnoi approksimatsii pri analize linii peredachi [Use of Adaptive Cross Approximation in Transmission Line Analysis]. *Sbornik izbrannykh statei XXV Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh*

«*Nauchnaia sessiia TUSUR-2020*» [Collection of Selected Articles of the XXV International Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists "Scientific Session of TUSUR-2020"]. Tomsk, 2020, no. 1-1, pp. 263-266. (in Russian).

9. Özgün Ö, Kuzuoğlu M. *MATLAB-based Finite Element Programming in Electromagnetic Modeling*. Oxfordshire United Kingdom: Taylor & Francis Group, 2018. 428 p.

10. Harrington R. F. *Field Computation by Moment Methods*. N.Y.: Macmillan, 1968. 229 p.

11. Gazizov T. R. Analytic Expressions for MoM Calculation of Capacitance Matrix of Two Dimensional System of Conductors and Dielectrics having Arbitrary Oriented Boundaries. *Proceedings of the 2001 IEEE EMC Symposium*, Montreal, 2001, vol. 1, pp. 151-155.

12. Venkataraman J., Rao S. M., Djordjevic A. R., Sarkar T. K., Naiheng Y. Analysis of Arbitrarily Oriented Microstrip Transmission Lines in Arbitrarily Shaped Dielectric Media Over a Finite Ground Plane. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1985, vol. 33, no 10. pp. 952-960. DOI: 10.1109/TMTT.1985.1133155

13. Paul C. R. *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*. Hoboken/New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. 816 p.

14. Freund R. W., Golub G. H., Nachtigal N. Iterative Solution of Linear Systems. *Acta Numerica*, 1991, vol. 1, pp. 57-100. DOI: 10.1017/S0962492900002245

15. Fletcher R. Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems. *Lecture Notes in Mathematics*, 1976, vol. 506, pp. 73-89. DOI: 10.1007/BFB0080116

16. Lanczos C. Solution of Systems of Linear Equations by Minimized Iterations. *Journal of Research of National Bureau of Standards*, 1952, vol. 49, no 1, pp. 33-53. DOI: 10.6028/JRES.049.006

17. Yang L. T., Brent R. P. The Improved BiCGStab Method for Large and Sparse Unsymmetric Linear Systems on Parallel Distributed Memory Architectures. *Fifth International Conference on Algorithms and Architectures for Parallel Processing*, Beijing, 2002. DOI: 10.1109/ICAPP.2002.1173595

18. Van der Vorst H. A. Bi-CGStab: a Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1992, vol. 13, pp. 631-644.

19. El Guennouni A., Jbilou K., Sadok H. A. Block Version of BiCGSTAB for Linear Systems with Multiple Right-hand Sides. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 2003, vol. 16, pp. 129-142.

20. Goreinov S. A., Zamarashkin N. L., Tyrtysnikov E. E. Pseudoskeletalnye approksimatsii pri pomoshchi podmatrits naibol'shego ob'ema [Pseudoskeletal approximations using submatrices of largest volume]. *Matematicheskie zametki*, 1997, vol. 62, no 4, pp. 619-623. (in Russian).



21. Tyrtysnikov E. E. Incomplete Cross Approximation in the Mosaic-Skeleton Method. *Computing*, 2000, no 64, pp. 367-380.

22. Shaeffer J. Million Plus Unknown MOM LU Factorization on a PC. *IEEE International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*, 2015, pp. 62-65.

23. Li M., Ding D., Heldring A., Hu J., Chen R., Vecchi G. Low-Rank Matrix Factorization Method for Multiscale Simulations: A Review. *IEEE Open Journal of Antennas and Propagation*, 2021, vol. 2, pp. 286-301.

24. Rjasanow S., Steinbach O. *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. New York: Springer, 2007. 279 p.

25. Maksimov A. E., Kuksenko S. P. Programma dlia rascheta matricts koefitsientov elektrosticheskoj i elektromagnitnoj induksii metodom momentov [Program for Calculation of Electrostatic and Electromagnetic Induction Coefficient Matrices by the Method of Moments]. The Certificate on Official Registration of the Computer Program in Russia. No. 2022662895, 2022.

26. Gazizov T. R., Sagiyeva I. Y., Kuksenko S. P. Solving the Complexity Problem in the Electronics Production Process by Reducing the Sensitivity of Transmission Line Characteristics to Their Parameter Variations. *Complexity*, 2019, vol. 2019. DOI: 10.1155/2019/6301326

Статья поступила 28 июля 2023 г.

### Информация об авторе

Максимов Александр Евгеньевич – соискатель ученой степени кандидата технических наук. Аспирант кафедры телевидения и управления. Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. Область научных интересов: моделирование технических систем, численные методы. E-mail: mae@tusur.ru

Адрес: 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, д. 40.

---

## Use of Adaptive Cross Approximation and Block Iterative Solution of a Matrix Equations Sequence in Multivariate Analysis of Multiconductor Transmission Lines by the Method of Moments

A. E. Maksimov

**Purpose.** Performance evaluation of adaptive cross approximation and block iterative solution of a sequence of matrix equations as applied to multivariate analysis of multiconductor transmission lines. **Methods.** Method of moments, block iterative stabilized biconjugate gradient method (BI-BiCGStab), method of adaptive cross approximation. **Novelty.** A method for multivariate analysis of multiconductor transmission lines is proposed, characterized by the joint use of adaptive cross-approximation and block iterative solution of a sequence of matrix equations. **Results.** On the example of four multiconductor transmission lines with the number of conductors from 2 to 4 for their multivariate (up to 100 per parameter) analysis when varying 1-5 geometric parameters, both in narrow and wide limits, the use of block iterative solution of the sequence

of matrix equations is investigated, showing a decrease in the required solution time by an average of 1.3 times. Also, on the example of two multiconductor transmission lines, the joint use of adaptive cross approximation and block iterative solution of a sequence of matrix equations is investigated, showing a reduction in the amount of required machine memory by a factor of 3.6 while increasing the required solution time by a factor of 2.6. All results are obtained with deviation from the Gauss method not more than 1%. **Practical relevance.** With respect to multivariate analysis of multiconductor transmission lines, the possibilities of reducing the required machine memory and time by using the methods of adaptive cross approximation and BI-BiCGStab are revealed. Thus, adaptive cross approximation is an effective means of performing calculations when frequent segmentation is required and the available machine memory is limited.

**Key words:** multiconductor transmission line, multivariate analysis, method of moments, block iterative method BI-BiCGStab, adaptive cross approximation.

### Information about Author

*Aleksandr Evgenevich Maksimov* – Postgraduate at the Department of Television and Control. Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics. Field of research: modeling of technical systems, numerical methods. E-mail: mae@tusur.ru

Address: Russia, 634050, Tomsk, prospect Lenina, 40.