

УДК 621.396.946

Повышение энергетической скрытности узкополосных сигналов систем спутниковой связи при трансионосферном распространении радиоволн через неоднородную ионосферу за счет понижения несущих частот и пространственно-разнесенного приема

Часть 1. Постановка задачи повышения энергетической скрытности и ее решение

Ляхов А. В.

Актуальность статьи обусловлена тем, что решение задачи проектирования перспективных спутниковых систем связи (ССС) должно базироваться на комплексном подходе, который предполагает учет всех параметров и ограничений, обеспечивающих как требования по эффективности ее функционирования, включая требования, как по помехоустойчивости, так и по ее скрытности от средств радио- и радиотехнической разведки (РПТР). Известен способ повышения энергетической скрытности ССС при близком размещении приемника радиообнаружения за счет понижения несущей частоты и применения пространственно-разнесенного приема сигналов. В качестве количественного критерия достигаемого уровня энергетической скрытности ССС при этом используется такой общепризнанный показатель, как коэффициент энергетической скрытности (КЭС) ССС. Однако при этом известная методика определения КЭС является графоаналитической. Поэтому она не позволяет автоматизировать процесс определения этого показателя с помощью современных средств вычислительной техники, что затрудняет решение задачи проектирования перспективных ССС. **Целью работы** является анализ возможности повышения энергетической скрытности узкополосных сигналов систем спутниковой связи с пониженными несущими частотами на основе разработки методики, позволяющей сократить временные затраты и уменьшить погрешность оценки КЭС спутниковых систем связи, за счет применения вместо графических численных методов уточнения корней нелинейных уравнений обнаружения и помехоустойчивости и их реализации в MATLAB. **Результаты и их новизна.** Разработанная методика оценки КЭС спутниковых систем связи отличается от известных тем, что она позволяет сократить время оценки этого коэффициента с часов до единиц секунд и при этом уменьшить погрешность его оценки не менее чем на три порядка. Кроме того, впервые получены оригинальные аналитические выражения для вычисления первой и второй производной от Q -функции Маркума по параметру энергетическое отношение сигнал-шум, необходимые для программной реализации численных методов Ньютона и Ньютона-хорд уточнения корней нелинейного уравнения обнаружения. **Практическая значимость** заключается в том, что разработанная методика оценки КЭС спутниковых систем связи будет полезна техническим специалистам для обоснования исходных данных, необходимых для проведения расчетов по уточнению параметров перспективных спутниковых систем связи с учетом одновременного обеспечения ими требований, как по требуемой помехоустойчивости, так и по скрытности связи.

Библиографическая ссылка на статью:

Ляхов А. В. Повышение энергетической скрытности узкополосных сигналов систем спутниковой связи при трансионосферном распространении радиоволн через неоднородную ионосферу за счет понижения несущих частот и пространственно-разнесенного приема. Часть 1. Постановка задачи повышения энергетической скрытности и ее решение // Системы управления, связи и безопасности. 2022. № 4. С. 256-312. DOI: 10.24412/2410-9916-2022-4-256-312

Reference for citation:

Lyakhov A. V. Increasing the energy secrecy of narrow-band signals of satellite communication systems during transionospheric propagation of radio waves through an inhomogeneous ionosphere due to a decrease in carrier frequencies and space-diversified reception. Part 1. Statement of the problem of increasing energy secrecy and its solution. *Systems of Control, Communication and Security*, 2022, no. 4, pp. 256-312 (in Russian). DOI: 10.24412/2410-9916-2022-4-256-312

Кроме того, данная методика может представлять интерес научным работникам и соискателям, ведущим научные исследования в области спутниковой связи.

Ключевые слова: низкочастотная система спутниковой связи, райсовские замирания, трансионосферное распространение радиоволн, численный метод, коэффициент энергетической скрытности, спутниковая система связи, Q -функция Маркума.

Введение

Современные спутниковые системы связи (ССС) специального назначения являются системообразующим компонентом стратегического звена государственного управления. Именно эти ССС обеспечивают связь с удаленными пунктами органов государственной власти, дипломатическими представительствами Российской Федерации (РФ) в других странах, передачу команд боевого управления подразделениям силовых и специальных ведомств, дислоцированных за рубежом. При организации связи через ССС с вышеуказанными абонентами к ней предъявляются повышенные требования по безопасности, помехоустойчивости и скрытности.

Известно, что *скрытность* радиоэлектронного устройства – это его способность противостоять мерам радиоразведки, при этом, энергетическая скрытность характеризует способность противостоять мерам, направленным на обнаружение сигнала разведывательным приемным устройством [1].

И именно энергетическая скрытность ССС на линиях «вниз» «искусственный спутник Земли (ИСЗ) – земная станция спутниковой связи (ЗССС)» при близком (на удалении не более 10 км) размещении приемника (ПРМ) радиообнаружения средства радио- и радиотехнической разведки (РРТР) стала объектом рассмотрения в настоящей статье.

Актуальность

Для обоснования актуальности, а также формальной постановки и решения задачи в работе введены обозначения, сведенные в таблицу 1.

Таблица 1 – Обозначения

Обозначение	Физический смысл обозначения
$P_{\text{по з}}$	– заданная вероятность правильного обнаружения сигнала разведываемой системы связи
$P_{\text{лт з}}$	– заданная вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала разведываемой системы связи
h_p^2	– энергетическое ОСШ на входе ПРМ радиообнаружения средства РРТР
$h_{p з}^2$	– энергетическое ОСШ на входе ПРМ радиообнаружения, необходимое для достижения заданной вероятности правильного обнаружения $P_{\text{по з}}$ (например, $P_{\text{по з}} = 0,99$) сигнала ССС при заданной вероятности ложной тревоги $P_{\text{лт з}}$ (например, $P_{\text{лт з}} = 10^{-4}$)

Обозначение	Физический смысл обозначения
R_p	– удаление ПРМ радиобнаружения средства РРТР от ПРМ ЗсСС
$P_{\text{ош тр}}$	– требуемая вероятность ошибки $P_{\text{ош тр}}$ приема бита информации
$h_{\text{тр}}^2$	– ОСШ на входе ПРМ ЗсСС, определяемое из условия обеспечения требуемого качества связи (помехоустойчивости), оцениваемого таким показателем, как требуемая вероятность ошибки $P_{\text{ош тр}}$ приема бита информации (например, $P_{\text{ош}} = P_{\text{ош тр}} = 10^{-5}$)
$h_{\text{тр}4}^2$	– ОСШ на входе ПРМ ЗсСС, определяемое из условия обеспечения требуемого качества связи (помехоустойчивости), при пространственно разнесенном приеме на четыре антенны
$\gamma_{\text{эс}}$	– коэффициент энергетической скрытности разведываемой системы связи
$\gamma_{\text{эс тр}}$	– требуемое значение коэффициента энергетической скрытности разведываемой системы связи
B	– база сигнала разведываемой системы связи
N_i	– электронная концентрация в i -той неоднородности нормальной ионосферы
\bar{N}	– среднее (фоновое) значение электронной концентрации в нормальной ионосфере
ΔN_i	– флуктуации электронной концентрации относительно среднего (фонового) значения \bar{N} в i -той неоднородности нормальной ионосферы
$\Delta\varphi_i$	– относительный фазовый сдвига луча, проходящего в точку приема, рассеянного i -той неоднородностью электронной концентрации нормальной ионосферы (ΔN_i)
f_0	– несущая частота сигнала разведываемой системы связи
$f_{0 \text{ гр}}$	– граничная пониженная несущая частота, на которой коэффициент энергетической скрытности ССС достигает требуемого значения $\gamma_{\text{эс тр}}$
P_p	– мощности регулярной (не случайной) составляющей принимаемого сигнала
$P_{\text{фл}}$	– мощности флуктуационной (случайной) составляющей принимаемого сигнала
γ^2	– параметра Райса принимаемого сигнала, который определяется как отношение мощностей его регулярной и флуктуационной составляющей
$(\gamma^2)_{\text{min}}$	– минимальное значение параметра Райса принимаемого сигнала

Обозначение	Физический смысл обозначения
R	– коэффициент пространственной корреляции быстрых замираний в элементах приемной антенной системы
ΔR	– диапазон изменения коэффициента пространственной корреляции быстрых замираний в элементах приемной антенной системы
α	– угол α транссионосферного распространения радиоволн относительно вертикали (зенитный угол)
$Q(g_1, h_{01})$	– функция Маркума от аргументов g_1 и h_{01} , которые должны быть неотрицательными вещественными числами ($g_1, h_{01} \geq 0$)
$I_0(g_1 x)$	– модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка
σ_φ	– среднее квадратическое отклонение относительного фазового сдвига лучей, приходящих в точку приема
$(\sigma_\varphi)_{\max}$	– максимальное значение среднее квадратическое отклонение фазового фронта принимаемой волны
c	– скорость света
l_s	– характерный размер ионосферных неоднородностей
h_m	– высота максимума ионизации в слое F ионосферы
\bar{N}_m	– максимальная средняя электронная концентрация в слое F ионосферы на высоте максимума ионизации
h_ε	– эквивалентная толщина ионосферы со средней электронной концентрацией, равной ее максимальному значению
$\sigma_{\Delta N}$	– среднее квадратическое отклонение флуктуаций электронной концентрации в неоднородностях ионосферы
$\beta_{и}$	– интенсивность ионосферных неоднородностей, которая определяется как отношение среднее квадратическое отклонение флуктуаций электронной концентрации в неоднородностях ионосферы к максимальной средней электронной концентрации в слое F ионосферы на высоте максимума ионизации
$\vec{\lambda}$	– вектор параметров ионосферы с элементами $h_\varepsilon, \sigma_{\Delta N}, l_s$ или $h_\varepsilon, \bar{N}_m, \beta_{и}, l_s$ в зависимости от контекста
n	– количество элементов приемной антенной системы
$\Delta\rho$	– расстояние между элементами приемной антенной системы в случае их линейного эквидистантного разнесения
$\Delta\rho_k$	– интервал пространственной корреляции быстрых замираний принимаемых сигналов
$P_{ош}$	– вероятности ошибки приема бита информации
λ_k, λ_p	– собственные значения корреляционной матрицы быстрых замираний в элементах приемной антенной системы ($k, p = 1, 2, \dots, n$)

Обозначение	Физический смысл обозначения
λ	– вектор собственных значений корреляционной матрицы быстрых замираний в элементах приемной антенной системы
I	– единичная диагональная матрица
\bar{h}^2	– среднее значение ОСШ в ветвях пространственного разнесения приемных антенн
h^2	– в зависимости от контекста ОСШ на входе ПРМ радиобнаружения или среднее значение ОСШ в ветвях пространственного разнесения приемных антенн
$ \varepsilon_a _{\text{треб}}$	– требуемая процентная погрешность уточнения корня нелинейного уравнения обнаружения или помехоустойчивости
N	– номер итерации итерационного процесса уточнения корня нелинейного уравнения обнаружения или помехоустойчивости
$ \varepsilon_a _N$	– процентная погрешность уточнения корня нелинейного уравнения обнаружения или помехоустойчивости, достигаемая на итерации N
h_l^2, h_u^2	– нижняя и верхняя граница отрезка локализации корня нелинейного уравнения обнаружения или помехоустойчивости
h_{rN}^2	– середина отрезка локализации корня нелинейного уравнения обнаружения или помехоустойчивости на итерации с номером N при использовании метода половинного деления (бисекций)
h_r^2	– итерационный процесс уточнения корня нелинейного уравнения обнаружения или помехоустойчивости численным методом половинного деления (бисекций)
h_s^2	– итерационный процесс уточнения корня нелинейного уравнения обнаружения или помехоустойчивости численным методом хорд
h_N^2	– итерационный процесс уточнения корня нелинейного уравнения обнаружения методом Ньютона
h_{true}^2	– итерационный процесс уточнения корня нелинейного уравнения обнаружения методом Ньютона-хорд
h_0^2	– начальное приближение корня нелинейного уравнения обнаружения для численного метода Ньютона
$f'(h^2)$	– первая производная от нелинейного уравнения обнаружения по параметру ОСШ h^2
$f''(h^2)$	– вторая производная от нелинейного уравнения обнаружения по параметру ОСШ h^2
h_{true}^2	– итерационный процесс уточнения корня нелинейного уравнения обнаружения или помехоустойчивости методом хорд
$\Delta\gamma_{эс}$	– абсолютная погрешность определения коэффициент энергетической скрытности ССС $\gamma_{эс}$

Обозначение	Физический смысл обозначения
$\Delta h_{p_3}^2$	– абсолютная погрешность определения параметра $h_{p_3}^2$
Δh_{tr}^2	– абсолютная погрешность определения параметра h_{tr}^2
$\delta_{\gamma_{эс}}$	– относительная погрешность определения коэффициент энергетической скрытности ССС $\gamma_{эс}$
$\delta_{\Delta h_{p_3}^2}$	– относительная погрешность определения параметра $h_{p_3}^2$
$\delta_{\Delta h_{tr}^2}$	– относительная погрешность определения параметра h_{tr}^2
$\left(\delta_{\Delta h_{p_3}^2}\right)_{\text{числ.}}$	– относительная погрешность определения параметра $h_{p_3}^2$, найденная на основе численных методов уточнения корней нелинейного уравнения обнаружения
$\left(\delta_{\Delta h_{tr}^2}\right)_{\text{числ.}}$	– относительная погрешность определения параметра $\delta_{\Delta h_{tr}^2}$, найденная на основе численных методов уточнения корней нелинейного уравнения помехоустойчивости
$\left(\delta_{\Delta h_{p_3}^2}\right)_{\text{гр. аналит.}}$	– относительная погрешность определения параметра $h_{p_3}^2$, найденная графоаналитическим методом уточнения корней нелинейного уравнения обнаружения
$\left(\delta_{\Delta h_{tr}^2}\right)_{\text{гр. аналит.}}$	– относительная погрешность определения параметра $\delta_{\Delta h_{tr}^2}$, найденная графоаналитическим методом уточнения корней нелинейного уравнения помехоустойчивости
η	– число, показывающее во сколько раз найденная графоаналитическим методом относительная погрешность определения коэффициент энергетической скрытности ССС $\gamma_{эс}$ превосходит аналогичную погрешность, но найденную численными методами решения нелинейных уравнений обнаружения и помехоустойчивости

Как известно, обнаружение сигнала происходит в условиях, когда на ПРМ радиообнаружения средства РРТР действуют помехи (шумы), и может сопровождаться ошибками двух видов: пропуск сигнала при его наличии на входе ПРМ радиообнаружения и ложное обнаружение (ложная тревога) при отсутствии сигнала. Эти ошибки носят вероятностный характер. Общепризнанной количественной мерой энергетической скрытности, от обнаружения сигнала разведываемой системы связи, является заданная вероятность правильного обнаружения $P_{по_3}$ при заданных ограничениях на вероятность ложной тревоги $P_{лт_3}$, которые в свою очередь зависят от энергетического отношения сигнал-шум (ОСШ) в рассматриваемой радиолинии и правила принятия решения на обнаружение сигнала [1-3].

Обеспечиваемая ПРМ радиообнаружения вероятность правильного обнаружения $P_{по}$ сигнала разведываемой системы связи при заданной (фиксиро-

ванной) вероятности ложной тревоги $P_{лт} = const$ в общем случае связана некоторой функциональной зависимостью (ζ), именуемой функцией обнаружения [4], с энергетическим ОСШ h_p^2 на входе этого ПРМ (здесь и далее индекс «р» означает радиообнаружение):

$$P_{по} = \zeta(P_{лт}, h_p^2) \Big|_{P_{лт}=const}. \quad (1)$$

В этом случае условием обеспечения энергетической скрытности системы связи является выполнение неравенства $h_{pз}^2 > h_p^2$, т. е. снижение фактического энергетического ОСШ на входе ПРМ радиообнаружения h_p^2 по сравнению со значением $h_{pз}^2$, необходимым для достижения заданной вероятности правильного обнаружения $P_{поз}$ (например, $P_{поз} = 0,99$) сигнала ССС при заданной вероятности ложной тревоги $P_{лтз}$ (например, $P_{лтз} = 10^{-4}$) [1-4]

$$h_{pз}^2 = \zeta^{-1}(P_{по}, P_{лт}) > h_p^2, \quad (2)$$

где $\zeta^{-1}(P_{по}, P_{лт})$ – функция, обратная к функции $\zeta(P_{по}, h_p^2)$.

Условие (2) $h_{pз}^2 > h_p^2$ принято выражать через коэффициент энергетической скрытности (КЭС) системы связи следующим образом [2]

$$\gamma_{эс} = h_{pз}^2 / h_p^2 > 1 \text{ или } (\gamma_{эс})_{дБ} = (h_{pз}^2)_{дБ} - (h_p^2)_{дБ} > 0. \quad (3)$$

Из соотношения (3) следует, что КЭС системы связи показывает во сколько раз (на сколько дБ) значение энергетического ОСШ $h_{pз}^2$ на входе ПРМ радиообнаружения, необходимое для достижения заданного качества обнаружения, т. е. обеспечения заданной вероятности правильного обнаружения $P_{поз}$ сигнала системы связи при заданной допустимой вероятности ложной тревоги $P_{лтз}$, превосходит фактическое значение энергетического ОСШ h_p^2 на входе этого ПРМ.

Примечание – С практической точки зрения, необходимо, чтобы КЭС системы связи был не просто больше единицы, а был бы не менее некоторого требуемого значения $\gamma_{эс тр}$. Например, если $\gamma_{эс тр} = 20$, то тогда должны выполняться неравенства $\gamma_{эс} \geq \gamma_{эс тр} = 20$ или $(\gamma_{эс})_{дБ} \geq (\gamma_{эс тр})_{дБ} = 13$ дБ.

Традиционно этого достигают за счет [1-3, 5]:

1) снижения уровня сигнала в ПРМ радиообнаружения при сохранении достаточного для нормальной работы уровня сигнала в ПРМ системы связи (амплитудный метод). Этот метод реализуется путем повышения чувствительности ПРМ системы связи и одновременного снижения мощности передатчика системы связи до минимально необходимого уровня (работа на пределе чувствительности). Признано, что такой метод практически нецелесообразен, поскольку при этом ухудшается помехоустойчивость разведываемой системы связи;

2) применения узконаправленных передающих антенн с малым уровнем боковых лепестков диаграммы направленности (ДН), применяемых в передатчике системы связи (пространственный метод).

Очевидно, что для ССС выполнение условия обеспечения помехоустойчивости при одновременном обеспечении ее энергетической скрытности, от обнаружения сигнала, сложнее всего реализовать в случае, когда ПРМ радиобнаружения расположен близко к ПРМ ЗсСС, т. к. в этом случае пространственный метод повышения энергетической скрытности оказывается неэффективным.

Актуальность такого допущения подтверждается высокой вероятностью ведения противоборствующей стороной (например, специальными службами недружественных стран и (или) незаконными террористическими формированиями) РРТР сигналов ССС, передаваемых на радиолинии «ИСЗ-ЗсСС», в случае если ЗсСС расположена за рубежом, а передаваемые сигналы содержат конфиденциальную информацию.

Ведение РРТР в таких случаях может производиться путем размещения ПРМ радиобнаружения непосредственно вблизи ПРМ ЗсСС, таким образом, чтобы они оба попадали в луч вещания ИСЗ. Например, в соседнем здании от дипломатического представительства РФ за рубежом или вблизи подразделений силовых и специальных ведомств РФ, дислоцированных за рубежом, обеспечивая при этом энергетическую и пространственную доступность средства РРТР к сигналам в радиолинии «ИСЗ-ЗС».

Поэтому, в дополнение к традиционным способам повышения энергетической скрытности ССС, был предложен способ повышения энергетической скрытности радиолинии «ИСЗ-ЗсСС», основанный на использовании в ССС широкополосных сигналов (ШПС), обладающих высокой помехоустойчивостью и скрытностью за счет большой базы ($B \gg 1$) сигнала и энергетического уровня сигнала на уровне шумов на входе ПРМ радиобнаружения [1, 2, 5].

Однако при этом необходимо учитывать, что в УКВ диапазоне ССС специального назначения преимущественно используются не ШПС, обладающих высокой помехоустойчивостью и скрытностью за счет большой базы сигнала и энергетического уровня сигнала на уровне шумов, а узкополосные, т. е. простые сигналы ($B \cong 1$) с шириной спектра порядка 25 кГц. Примером такой ССС может служить отечественная узкополосная ССС «Гонец», которая осуществляет связь в УКВ диапазоне в интересах обслуживания органов государственной власти РФ, расположенных, в том числе, и за рубежом. Другим примером современной узкополосной военной ССС является система Mobile User Objective System (MUOS) [6].

В связи с этим, представляется актуальным известный способ обеспечения энергетической скрытности ССС при близком размещении ПРМ радиобнаружения от ПРМ ЗсСС (на удалении не более 10 км) и передаче в радиолинии «ИСЗ-ЗсСС» узкополосных, простых сигналов ($B \cong 1$) [7].

Этот способ учитывает известные [8] особенности распространения радиоволн (РРВ) диапазона частот от 30 до 100 МГц в ионосфере, заключающиеся в том, что в нормальной ионосфере электронная концентрация (ЭК)

$N_i = \bar{N} + \Delta N_i$ содержит флуктуации ΔN_i относительно среднего (фонового) значения \bar{N} (рис. 1).

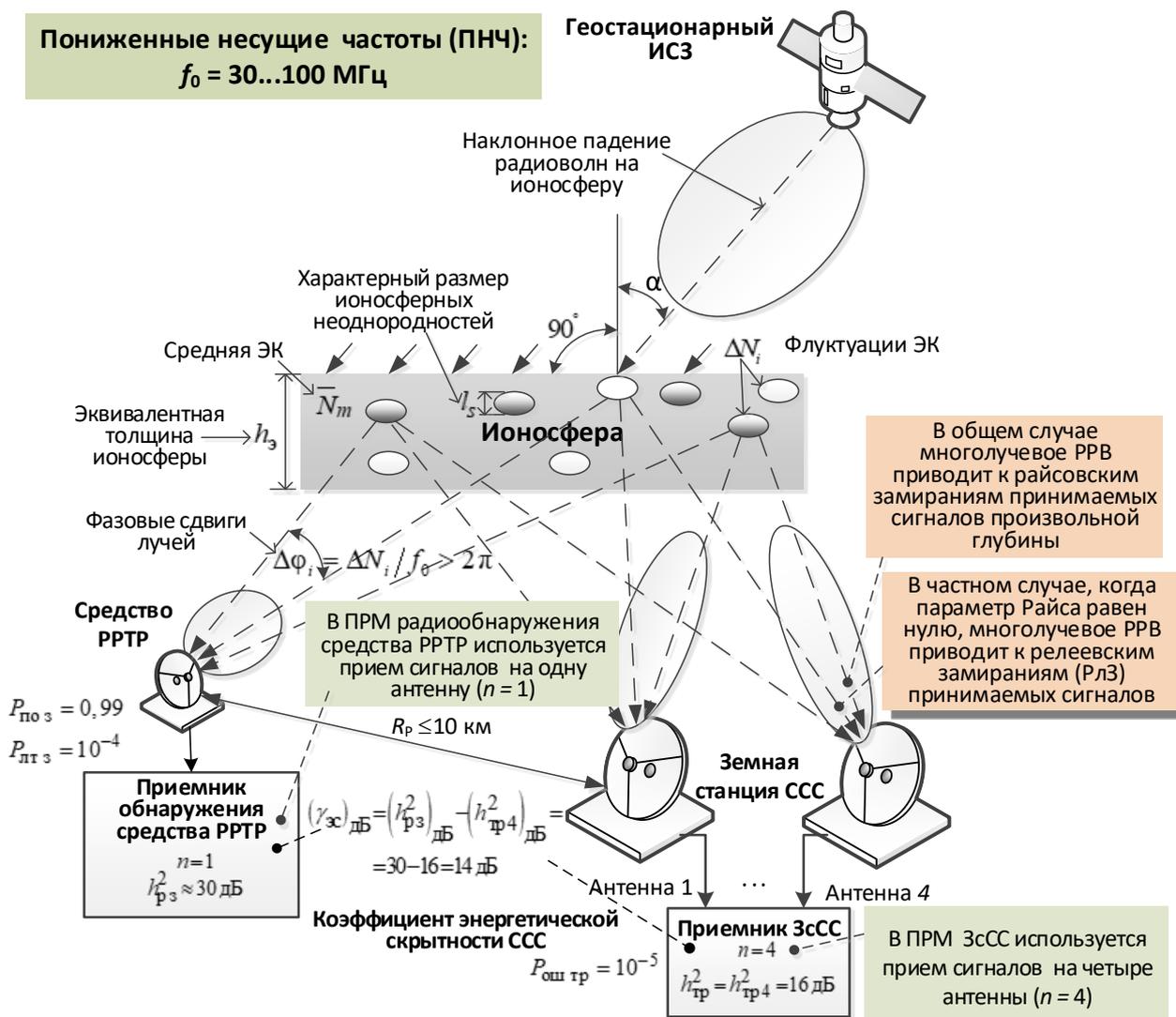


Рис. 1. Модель размещения передатчика и приемника ЗсСС с ПНЧ при близком размещении приемника радиообнаружения средства РРТР и пространственно-разнесенном приеме на четыре антенны

Вследствие этого, при трансionoсферном РРВ с пониженными несущими частотами (ПНЧ) до $f_0 = 30 \dots 100$ МГц через неоднородную ионосферу к ПРМ ЗсСС приходит множество ($i = 1 \dots M$) рассеянных неоднородностями ЭК (ΔN_i) лучей с относительными фазовыми сдвигами $\Delta \phi_i \sim \Delta N_i / f_0$. Значения фазовых сдвигов $\Delta \phi_i$ определяют условия возникновения интерференционных быстрых замираний райсовского ($0 < \Delta \phi_i \leq 2\pi$) или рэлеевского ($\Delta \phi_i \gg 2\pi$) типа, причем райсовские замирания могут быть произвольной глубины. При традиционно используемых в ССС несущих частотах $f_0 = 1 \dots 10$ ГГц относительные фазовые сдвиги лучей отсутствуют (т. к. $\Delta \phi_i \sim \Delta N_i / f_0 = 0$), и поэтому интерференционные быстрые замирания сигналов не возникают.

Глубину райсовских замираний сигналов принято количественно оценивать при помощи параметра Райса γ^2 , который определяется как отношение мощности регулярной (не случайной) составляющей принимаемого P_p сигнала к мощности флуктуационной (случайной) $P_{фл}$ составляющей $\gamma^2 = P_p/P_{фл}$ [9]. Таким образом, параметр Райса может принимать произвольные значения от нуля ($\gamma^2 = 0$) при рэлеевских замираниях, когда мощность регулярной составляющей принимаемого сигнала равна нулю ($P_p = 0$) и вплоть до бесконечности ($\gamma^2 = \infty$) при отсутствии замираний, когда мощность флуктуационной (случайной) составляющей принимаемого сигнала равна нулю ($P_{фл} = 0$), т. е. $0 \leq \gamma^2 \leq \infty$.

Для того чтобы скомпенсировать отрицательные эффекты, возникающие при приеме сигналов с быстрыми замираниями в ЗсСС, в рамках известного способа повышения энергетической скрытности ССС [7], предлагается использовать пространственно-разнесённый приём сигналов на четыре антенны. В то время как в ПРМ радиообнаружения скомпенсировать отрицательные эффекты, возникающие при приеме сигналов с замираниями, невозможно, т. к. этот приемник, в связи с ограничениями на массогабаритные характеристики средства РРТР, вынужден использовать традиционные методы одиночного приема сигнала (т. е. на одну антенну).

При этом для ССС с ПНЧ (здесь термин «ССС с ПНЧ» указывает на то, что ССС работает в диапазоне, ниже минимального значения $f_0 = 150...200$ МГц диапазонов частот, отведенных Регламентом радиосвязи МККР для ССС) формула (3) для вычисления КЭС $\gamma_{эс}$ была в [7] представлена в виде:

$$\gamma_{эс} = h_{pз}^2/h_{тр}^2 \text{ или } (\gamma_{эс})_{дБ} = (h_{pз}^2)_{дБ} - (h_{тр}^2)_{дБ}, \quad (4)$$

где $h_{тр}^2$ – ОСШ на входе ПРМ ЗсСС, определяемое из условия обеспечения требуемого качества связи (помехоустойчивости), оцениваемого таким показателем, как требуемая вероятность ошибки $P_{ош тр}$ приема бита информации (например, $P_{ош} = P_{ош тр} = 10^{-5}$).

Примечание – Так как параметры $h_{pз}^2$ и $h_{тр}^2$, входящие в формулу (4), представляют собой соответствующие энергетические ОСШ (альтернативное название ОСШ), то для упрощения далее в тексте термин «энергетические» будет упускаться.

Как видно, при переходе от формулы (3) к (4) сделано допущение о том, что $h_p^2 \cong h_{тр}^2$. Справедливость такого допущения обосновывается в [7] именно пространственной близостью ПРМ радиообнаружения средства РРТР к ПРМ ЗсСС.

Полагая, что в ПРМ радиообнаружения используется схема оптимальной некогерентной обработки узкополосных, т. е. простых ($B \cong 1$) сигналов со случайной начальной фазой и амплитудой, распределенной по рэлеевскому закону, параметр h_{p3}^2 , входящий в формулу (4) в качестве числителя дроби, определялся в [7] на основе анализа уравнения обнаружения [4]

$$P_{по} = P_{лт} \left(1+h_p^2\right)^{-1} = \left(1+h_p^2\right) \sqrt{P_{лт}} . \quad (5)$$

Уравнение (5) является нелинейным, поэтому найти его аналитическое решение в виде $h_{p3}^2 = \zeta^{-1}(P_{по3}, P_{лт3})$ невозможно. Поэтому в [7] параметр h_{p3}^2 определялся графическим методом:

1) строился график функции обнаружения (5) при фиксированном значении вероятности ложной тревоги $P_{лт3} = 10^{-4}$;

2) находилась точка пересечения этого графика с линией постоянного уровня вероятности правильного обнаружения $P_{по3} = 0,99$, которая далее проецировалась на ось абсцисс. Таким образом, в [7] было найдено значение параметра $h_{p3}^2 = 30$ дБ.

В свою очередь, параметр $h_{тр}^2$, входящий в формулу (4) в качестве знаменателя дроби, определяется на основе анализа уравнения помехоустойчивости $P_{по} = \xi(h^2)$, связывающего между собой вероятность ошибки $P_{ош}$ приема бита информации и ОСШ на входе ПРМ ЗсСС. Известно, что в случае рэлеевских быстрых замираний и пространственно-разнесенном приеме простых сигналов (например, типа частотной телеграфии) на n антенн ($n \geq 2$) в ПРМ ЗсСС, а также при отсутствии корреляции (коэффициент пространственной корреляции замираний $R = 0$) этих замираний в элементах приемной антенной системы (АС), определяется соотношением [10]:

$$P_{ош} = C_{2n-1}^n / (h^2)^n , \quad (6)$$

где $C_m^n = m! / n!(n-m)!$ – число сочетаний из m по n .

Параметр $h_{тр}^2$ в [7] также определялся графическим методом:

1) строился график функции помехоустойчивости (6), при фиксированном значении количества антенн, используемом при пространственно-разнесенном приеме в ЗсСС, а именно при приеме на четыре антенны ($n = 4$);

2) находилась точка пересечения этого графика с линией постоянного уровня вероятности ошибки $P_{ош тр}$ приема бита информации $P_{ош} = P_{ош тр} = 10^{-5}$, которая далее проецировалась на ось абсцисс. В результате было найдено значение параметра $h_{тр}^2 \approx 16$ дБ.

После подстановки найденных значений $h_{p_3}^2 = 30$ дБ и $h_{tr}^2 \approx 16$ дБ в формулу (4) было получено значение КЭС ССС с ПНЧ $\gamma_{эс} = 30 - 16 = 14$ дБ.

Это позволило сделать вывод о том, что, если в ССС используются ПНЧ (до $f_0 = 30 \dots 100$ МГц), обуславливающие рэлеевские замирания принимаемых сигналов, и пространственно-разнесенный прием на четыре антенны, то можно обеспечить достижение высокой энергетической скрытности ССС [7] на уровне КЭС равного 16 дБ. Причем такой эффект достигается при близком размещении ПРМ радиообнаружения к ПРМ ЗсСС и при передаче в радиолинии «ИСЗ-ЗсСС» простых сигналов.

Недостатками методики определения КЭС ССС с ПНЧ, использованной в [7], являются:

1) не учитывается возможность возникновения в канале радиообнаружения райсовских замираний принимаемых сигналов произвольной глубины ($0 \leq \gamma^2 \leq \infty$) вследствие эффектов, сопровождающих трансферное РРВ в диапазоне несущих частот $f_0 = 30 \dots 100$ МГц, [11];

2) не учитывается наличия пространственной корреляции быстрых замираний сигналов в элементах приемной АС, используемых для приема в ЗсСС [10, 12];

3) использование графических методов определения параметров h_{tr}^2 и $h_{p_3}^2$, что приводит к значительным затратам времени и методическим погрешностям вычисления КЭС по формуле (4), т. к. исходные данные для таких вычислений определяются достаточно грубо, «на глаз».

В настоящее время известен ряд решений задачи повышения энергетической скрытности ССС (например, представленные в работах [13-16]).

Анализ работ [13-16] показал, что все они посвящены анализу возможностей повышения энергетической скрытности ССС от радиоперехвата (РПХ) сигналов, а не от их обнаружения. Однако более актуальной является задача обеспечения энергетической скрытности ССС при близком размещении не ПРМ РПХ, а ПРМ обнаружения сигналов средства РРТР. Это обусловлено тем, что подсистема радиоперехвата сигналов средства РРТР задействуется только после обнаружения факта прихода сигнала на вход ПРМ радиоразведки этого средства. К тому же, традиционно энергетическая скрытность характеризует способность собственно противостоять именно мерам, направленным на обнаружение сигнала ПРМ радиоразведки средства РРТР, а не его перехват.

Предметом рассмотрения в настоящей статье является научно-методический аппарат (НМА) определения энергетической скрытности ССС с ПНЧ от обнаружения сигналов.

Целью работы является анализ возможности повышения энергетической скрытности узкополосных сигналов систем спутниковой связи с пониженными несущими частотами на основе разработки методики, позволяющей уменьшить временные затраты и повысить точность оценки КЭС ССС, за счет применения

вместо графических численных методов уточнения корней нелинейных уравнений обнаружения и помехоустойчивости и их реализации в MATLAB.

Авторский материал по оценке КЭС ССС на основе численных методов, ввиду его большого объема, был разделен на две относительно независимые части. Первая часть, представленная в данной статье, посвящена постановке задачи повышения энергетической скрытности узкополосных сигналов систем спутниковой связи с пониженными несущими частотами и анализу возможных подходов к ее решению на основе численных методов, которые могут быть применены для оценки КЭС ССС, а также сравнительной оценке погрешности определения этого параметра на основе численных и графоаналитических методов. Вторая часть будет посвящена рассмотрению методики автоматизированной оценки КЭС ССС и её реализации в независимом приложении MATLAB, а также результатам вычислительного эксперимента по оценке КЭС ССС и их анализу.

Материал данной статьи, ввиду своей объемности, был декомпозирован на ряд логических подразделов.

1. Постановка общей задачи повышения энергетической скрытности узкополосных сигналов систем спутниковой связи с пониженными несущими частотами.

2. Постановка и решение частной задачи определения значения отношения сигнал-шум, необходимого для обнаружения с заданным качеством сигнала спутниковой системы связи, на основе численных методов.

2.1. Постановка частной задачи и анализ возможных подходов к ее решению.

2.2. Численный метод половинного деления.

2.3. Численный метод хорд.

2.4. Численный метод Ньютона.

2.5. Численный метод Ньютона-хорд.

3. Постановка и решение частной задачи определения значения отношения сигнал-шум, необходимого для обеспечения требуемой помехоустойчивости при пространственно-разнесенном приеме сигналов земной станцией спутниковой связи, на основе численных методов.

3.1. Постановка частной задачи и анализ возможных подходов к ее решению.

3.2. Численный метод половинного деления.

3.3. Численный метод хорд.

4. Сравнительная оценка погрешности определения коэффициента энергетической скрытности спутниковой системы связи на основе численных и графоаналитических методов.

Результаты, представленные в статье, основаны на исследованиях автора, которые были опубликованы в журнальных статьях только частично [17].

1. Постановка общей задачи повышения энергетической скрытности узкополосных сигналов систем спутниковой связи с пониженными несущими частотами

Дано: С геостационарного ИСЗ, излучается узкополосный простой сигнал с базой близкой к единице ($B \cong 1$) на несущей частоте, принадлежащей диапазону ПНЧ $f_0 \in 30 \dots 100$ МГц (рис. 1).

Угол α трансионосферного РРВ относительно вертикали (зенитный угол) составляет $1,1344640138$ рад или 65° .

ПРМ радиобнаружения средства РРТР расположен на одной высоте при малом удалении $R_p \leq 10$ км от приемника ЗсСС.

Противоборствующая сторона обладает полным объемом информации о разведываемом сигнале (известны несущая частота f_0 и ширина спектра ΔF_0 разведываемого сигнала), модели распространения радиоволн применительно к радиолинии «ИСЗ-ЗсСС» и актуальных параметрах ионосферы. Кроме того, предполагается, что средством РРТР поиск сигнала разведываемой ССС с ПНЧ по несущей частоте f_0 и в пространстве (по направлению на ИСЗ) уже осуществлен.

В ПРМ радиобнаружения средства РРТР реализована схема оптимальной некогерентной (НК) обработки сигналов с флуктуирующей начальной фазой. Заданные значения вероятности правильного обнаружения $P_{по}$ сигнала ССС и ложной тревоги $P_{лт}$ равны: $P_{по з} = 0,99$, $P_{лт з} = 10^{-4}$. При этом вероятность правильного обнаружения сигнала ССС определяется уравнением обнаружения [18]:

$$P_{по} = Q\left[g_1(h^2, \gamma^2), h_{01}(h^2, \gamma^2, P_{лт})\right], \quad (7)$$

где: $Q(g_1, h_{01})$ – функция Маркума от аргументов g_1 и h_{01} , которые должны быть неотрицательными вещественными числами ($g_1, h_{01} \geq 0$); γ^2 – параметр Райса; h^2 – ОСШ на входе ПРМ радиобнаружения средства РРТР.

Функция Маркума определяется формулой:

$$Q(g_1, h_{01}) = \int_{h_{01}}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2 + g_1^2}{2}\right) I_0(g_1 x) dx, \quad (8)$$

где $I_0(g_1 x)$ обозначает модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка.

Аргументы g_1 и h_{01} функции Маркума в (8) при условии, что в ПРМ обнаружения используется схема оптимальной НК обработки сигналов, зависят от параметров h^2 , γ^2 , $P_{лт}$ следующим образом:

$$g_1(h^2, \gamma^2) = \left[2h^2\gamma^2(1 + \gamma^2 + h^2)^{-1}\right]^{1/2}, \quad (9)$$

$$h_{01}(h^2, \gamma^2, P_{\text{ЛТ}}) = \left[2 \ln(P_{\text{ЛТ}}^{-1}) (1 + \gamma^2) (1 + \gamma^2 + h^2)^{-1} \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Зависимость между параметром Райса γ^2 и среднеквадратическим отклонением (СКО) фазовых сдвигов ($\Delta\varphi_i \sim \Delta N_i / f_0$) проходящих лучей σ_φ в радиоканале с транссионферным распространением радиоволн описывается выражением вида [12]:

$$\gamma^2 = P_p / P_{\text{ФЛ}} = [\exp(\sigma_\varphi^2) - 1]^{-1}. \quad (11)$$

В (11) параметр σ_φ , рад, определяется соотношением:

$$\sigma_\varphi \approx \sqrt[4]{\pi} (80,8 \pi / c) \sqrt{l_s h_3 \sec \alpha} (\sigma_{\Delta N} / f_0), \quad (12)$$

где: $c = 3 \cdot 10^8$ – скорость света, м/с; $l_s \approx 400$ – характерный размер ионосферных неоднородностей, м; $h_3 \approx 2,5 \cdot 10^5$ – эквивалентная толщина ионосферы, м, со средней ЭК, равной ее максимальному значению $\bar{N}(h_m) = \bar{N}_m = (2 \dots 4) \cdot 10^{12}$, эл/м³; $\bar{N}(h_m) = \bar{N}_m$ – максимальная средняя ЭК в слое F ионосферы (на высоте $h = h_m$ максимума ионизации), эл/м³; α – угол транссионферного распространения радиоволн относительно вертикали (зенитный угол), рад; f_0 – несущая частота, Гц; $\sigma_{\Delta N}$ – СКО флуктуаций ЭК в неоднородностях ионосферы, эл/м³, вычисляемое по формуле:

$$\sigma_{\Delta N} = \beta_{\text{и}} \bar{N}_m = 10^{-3} \times (2 \dots 4) \cdot 10^{12} = (2 \dots 4) \cdot 10^9; \quad (13)$$

В формуле (13) $\beta_{\text{и}} = \sigma_{\Delta N} / \bar{N}_m = 10^{-3}$ – интенсивность ионосферных неоднородностей [12].

Требуемая вероятность ошибки приема бита информации в приемнике ЗсСС составляет $P_{\text{ош тр}} = 10^{-5}$.

В приемнике ЗсСС используется пространственно-разнесенный некогерентный (НК) прием сигналов на несколько ($n \geq 2$) антенн. Для упрощения вычислений предполагается, что используется вариант линейного эквидистантного разнесения элементов приемной АС на расстояние $\Delta\rho = 400$ м, причем количество таких элементов $n \in 2, 3, \dots, 10$.

Функциональная зависимость вероятности ошибки приема бита информации в ССС при пространственно-разнесенном НК приеме сигналов на несколько ($n \geq 2$) антенн с квадратичным сложением в условиях релеевских общих замираний сигналов определяется уравнением помехоустойчивости [10, 19]:

$$P_{\text{ош}} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^{2(n-1)}}{\lambda_k + 2} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \frac{\lambda_p + 1}{(\lambda_k - \lambda_p)(\lambda_k + \lambda_p + \lambda_k \lambda_p)}, \quad (14)$$

где λ_k, λ_p – собственные значения корреляционной матрицы KQ , определяемые из решения уравнения:

$$\det(KQ - \lambda I) = 0. \quad (15)$$

Здесь: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – вектор собственных значений матрицы KQ ; I – единичная диагональная матрица. В случае линейного эквидистантного разнесения элементов приемной АС на фиксированное расстояние $\Delta\rho = const$ корреляционная матрица KQ является квадратной, размером $n \times n$:

$$KQ = \bar{h}^2 \begin{pmatrix} 1 & R & R^4 & \dots & R^{(n-1)^2} \\ R & 1 & R & \dots & R^{(n-2)^2} \\ R^4 & R & 1 & \dots & R^{(n-3)^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{(n-1)^2} & R^{(n-2)^2} & R^{(n-3)^2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где: \bar{h}^2 – среднее значение ОСШ в ветвях пространственного разнесения антенн; R – коэффициент пространственной корреляции быстрых замираний в линейно разнесенных на эквидистантный интервал $\Delta\rho$ элементах приемной АС, вычисляемый по формуле [12]:

$$\begin{aligned} R &= \exp\left[-(\Delta\rho/\Delta\rho_k)^2\right] = \exp\left[-(\Delta\rho\sigma_\varphi/l_s)^2\right] = \\ &= \exp\left\{-\left[\Delta\rho^4\sqrt{\pi}(80,8\pi/c)\sqrt{l_s h_3}(\sigma_{\Delta N}/f_0)\sqrt{\sec\alpha}/l_s\right]^2\right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta\rho_k = l_s/\sigma_\varphi$ – интервал пространственной корреляции быстрых замираний принимаемых сигналов, м.

Требуется:

1. Определить значения ОСШ на входе ПРМ радиообнаружения h_{p3}^2 , необходимое для обнаружения с заданным качеством ($P_{по3} = 0,99$, $P_{лт3} = 10^{-4}$) сигнала ССС с на основе численных методов уточнения корня уравнения обнаружения (7) с относительной (процентной) погрешностью не более 10^{-4} %.

2. Определить значение ОСШ на входе ПРМ ЗсСС $h_{тр}^2$, необходимое для обеспечения требуемой помехоустойчивости ($P_{ош тр} = 10^{-5}$) в радиолинии «ИСЗ-ЗсСС», на основе численных методов уточнения корня уравнения помехоустойчивости (14) с относительной (процентной) погрешностью не более 10^{-4} %.

3. По результатам решения задачи по пунктам 1 и 2, провести сравнительную оценку погрешности определения КЭС ССС на основе численных и графоаналитических методов.

2. Постановка и решение частной задачи определения значения отношения сигнал-шум, необходимого для обнаружения с заданным качеством сигнала систем спутниковой связи с пониженной несущей частотой, на основе численных методов

2.1 Постановка частной задачи и анализ возможных подходов к ее решению

Так как в соответствии с формулировкой общей задачи несущая частота сигнала f_0 может, принимать произвольное значение в интервале от 30 до 100 МГц, то для дальнейших расчетов примем $f_0 = 10^8$ Гц.

Дано: $P_{\text{по}} = P_{\text{по з}} = 0,99$, $P_{\text{лт}} = P_{\text{лт з}} = 10^{-4}$, $l_s \approx 400$ м, $h_э \approx 2,5 \cdot 10^5$ м, $\sigma_{\Delta N} = 2 \cdot 10^9$ эл/м³, $\alpha = 65^\circ$, $f_0 = 10^8$ Гц.

Требуется найти все или некоторые корни уравнения (7) относительно аргумента $h^2 = h_{\text{р з}}^2$ – ОСШ на входе ПРМ радиообнаружения.

Решение. Анализ возможных подходов к решению задачи показывает, что по условиям задачи соотношением (7) задана непрерывная функция обнаружения $P_{\text{по}} = \xi(h^2, \gamma^2, P_{\text{лт}})$ аналитической зависимости вероятности правильного обнаружения сигналов ($P_{\text{по}}$) от ОСШ (h^2) на входе ПРМ радиообнаружения средства РРТР, параметра Райса (γ^2) и вероятности ложной тревоги ($P_{\text{лт}}$):

$$P_{\text{по}} = \zeta(h^2, \gamma^2(f_0, \vec{\lambda}, \alpha), P_{\text{лт}}) = Q\left\{g_1\left[h^2, \gamma^2(f_0, \vec{\lambda}, \alpha)\right], h_{01}\left[h^2, \gamma^2(f_0, \vec{\lambda}, \alpha), P_{\text{лт}}\right]\right\}, \quad (18)$$

где: $Q(g_1, h_{01})$ – функция Маркума, определяемая соотношением (8) от аргументов g_1 и h_{01} , вычисляемых по формулам (9) и (10); $\vec{\lambda} = (h_э, \sigma_{\Delta N}, l_s)$ или $\vec{\lambda} = (h_э, \bar{N}_m, \beta_{\text{и}}, l_s)$ – вектор параметров ионосферы.

При этом требуется определить такое значение ОСШ $h_{\text{р з}}^2$, при котором вероятность правильного обнаружения $P_{\text{по}}$ сигнала ССС в ПРМ обнаружения средства РРТР примет заданное значение $P_{\text{по з}} = 0,99$, если $P_{\text{лт з}} = 10^{-4}$:

$$P_{\text{по}} = \zeta(h^2) \Big|_{h^2 = h_{\text{р з}}^2} = P_{\text{по з}}. \quad (19)$$

Очевидно, что уравнение (19) является нелинейным. Поскольку нет возможности получить обратную функцию $\zeta^{-1}\left[P_{\text{по з}}, P_{\text{лт з}}, \gamma^2(f_0, \vec{\lambda}, \alpha)\right]$, т. е. значение $h_{\text{р з}}^2$ нельзя вычислить аналитически, поэтому для его определения необходимо воспользоваться численными методами. Наиболее близкими являются численные методы поиска всех или некоторых корней нелинейного уравнения с одним неизвестным [20-22] вида:

$$f(x) = 0, \quad (20)$$

где $f(x)$ – некоторая непрерывная функция.

Действительно, если принять:

$$f(h^2) = \zeta(h^2) - P_{\text{по з}}, \quad (21)$$

то уравнение (19) можно представить в виде:

$$f(h^2) = 0, \quad (22)$$

или:

$$f(h^2) = P_{\text{по}} - P_{\text{по з}} = \zeta \left[P_{\text{лт з}}, h^2, \gamma^2(f_0, \bar{\lambda}, \alpha) \right] \Big|_{h^2 = h_{\text{р з}}^2} - P_{\text{по з}} = 0. \quad (23)$$

Вычисление функции $f(h^2)$ по формуле (23) реализовано на языке MATLAB в виде программного компонента fh.m (см. приложение ко второй части статьи).

К численным методам поиска корня $h_{\text{р з}}^2$ нелинейного уравнения (7), представленного в виде (23) относятся метод половинного деления, метод хорд, метод Ньютона, комбинированный метод Ньютона-хорд и др. [20-22].

В рамках указанных методов задача поиска корней уравнения (23) относительно аргумента h^2 распадается на несколько подзадач [20]. Во-первых, надо исследовать количество, характер и расположение корней (локализовать корни). Во-вторых, найти приближенные значения корней (получить начальное приближение). В-третьих, выбрать из них интересующие корни и вычислить их с требуемой точностью на основе численных методов.

Первая и вторая подзадачи решаются аналитическими и графическими методами.

В рассматриваемом случае в рамках первой подзадачи на основе аналитических соотношений (7) – (13), (23) и оговоренных ранее исходных данных были рассчитан и построен график функции $f(h^2)$ (рис. 2) при изменении отношения ОСШ h^2 в интервале от 45 до 75.

На рис. 2 видно, что график исследуемой функции $f(h^2)$ пересекает ось абсцисс один раз в промежутке [55, 60]. На концах этого интервала функция $f(h^2)$ имеет разные знаки. Поэтому уравнение (23) имеет один действительный корень приблизительно равный $h_{\text{р з}}^2 \approx 57,5$. В рамках третьей подзадачи выбираем интересующий нас корень $h_{\text{р з}}^2 \approx 57,5$, локализованный на отрезке [55, 60], и уточняем его с требуемой точностью на основе численных методов.

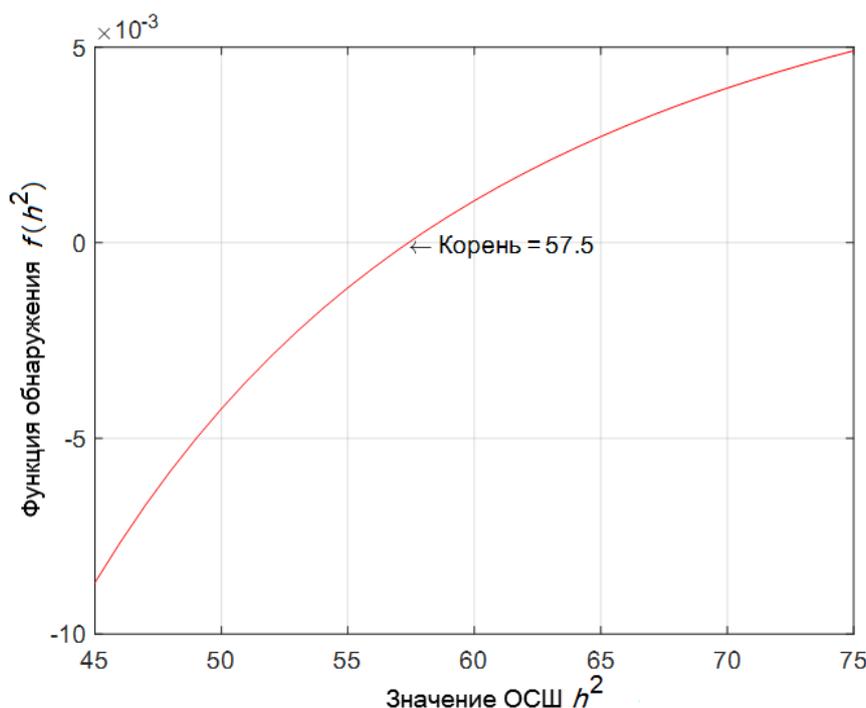


Рис. 2. График функции $f(h^2)$ при $P_{\text{ЛТЗ}} = 10^{-4}$, $l_s \approx 400$ м, $h_3 \approx 2,5 \cdot 10^5$ м, $\sigma_{\Delta N} = 2 \cdot 10^9$ эл/м³, $\alpha = 65^\circ$, $f_0 = 10^8$ Гц

При использовании численных методов для решения сформулированной задачи учтем ее особенности:

- 1) нужно найти всего один корень;
- 2) относительная (процентная) погрешность уточнения корня $|\varepsilon_a|$ должна быть не более 10^{-4} %;
- 3) временные затраты на поиск корня не критичны, но точность и достоверность результата должны быть обеспечены.

Эффективность численных методов будем оценивать по таким критериям, как количество итераций, требуемых для уточнения корня с заданной точностью, фактически достигаемая относительная (процентная) погрешность и усредненные временные затраты уточнения корня.

Для этого рассматриваемые численные методы реализованы на языке MATLAB в виде программных компонентов (приведены в приложении ко второй части статьи). Для их тестирования и контрольных прогонов, а также проведения сравнительной оценки усредненных временных затрат уточнения корня использовался персональный компьютер следующей аппаратно-программной конфигурации: процессор Intel Core i5-4570 3,2 ГГц, объем оперативной памяти 16,00 Гбайт и 64-разрядная операционная система Windows 10.

2.2. Численный метод половинного деления

Постановка частной задачи: в п. 2.1 был отделен единственный корень уравнения (23) приближенно равный $h_{p_3}^2 \approx 57,5$, который заключен в проме-

жутке [55, 60]. Требуется уточнить этот корень методом половинного деления с процентной погрешностью не более $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4} \%$.

Решение. Итерационный процесс половинного деления (его называют также методом бисекций) заключается в следующем [20-22]. До начала итерационного процесса предполагается, что искомый корень локализован на отрезке $[h_l^2, h_u^2]$. Начиная с отрезка $[h_l^2, h_u^2]$, на концах которого функции $f(h^2)$ имеет разные знаки, алгоритм вычисляет среднюю точку этого отрезка:

$$h_r^2 = (h_l^2 + h_u^2) / 2. \quad (24)$$

Если $f(h_r^2) = 0$, корень найден, и алгоритм завершает работу. В противном случае он продолжает поиск корня либо на отрезке $[h_l^2, h_r^2]$, либо на отрезке $[h_r^2, h_u^2]$ – в зависимости от того, на какой из двух половин отрезка функция $f(h^2)$ имеет разные знаки на концах нового отрезка изменения аргумента.

Если требуется найти корень с относительной точностью $|\varepsilon_a|_{\text{треб}}, \%$, то деление отрезка поиска корня пополам продолжается до тех пор, пока на итерации N выполнится следующее неравенство:

$$|\varepsilon_a|_N = \left| \left(h_{rN}^2 - h_{r(N-1)}^2 \right) / h_{rN}^2 \right| 100 \% \leq |\varepsilon_a|_{\text{треб}}, \quad (25)$$

где через $h_{r(N-1)}^2$ обозначена середина отрезка $[h_{l(N-1)}^2, h_{u(N-1)}^2]$ на предыдущей итерации с номером $N-1$. Тогда середина h_{rN}^2 последнего отрезка $[h_{lN}^2, h_{uN}^2]$ на итерации N даст значение корня уравнения (23) с требуемой точностью $|\varepsilon_a|_{\text{треб}}$:

$$h_{rN}^2 = (h_{lN}^2 + h_{uN}^2) / 2. \quad (26)$$

Ход итерационного процесса определения допустимого значения ОСШ методом половинного деления иллюстрирует таблица 2.

Из данных таблицы 2 видно, что итерационный процесс поиска корня уравнения (23) методом половинного деления завершается на восемнадцатой итерации ($N=18$), когда искомый корень принимает значение $h_{r18}^2 = h_{p3}^2 = 57,3887$ с относительной процентной погрешностью вычисления корня $|\varepsilon_a|_{18} = 6,6471 \times 10^{-5} \%$, удовлетворяющей неравенству (25).

Таблица 2 – Пошаговое выполнение метода половинного деления для уравнения (23)

N	Крайняя слева точка, h_l^2	Средняя точка, h_r^2	Крайняя справа точка, h_u^2	Значение ошибки, $ \varepsilon_a $, %	Значение функции, $f(h_r^2)$
1	55	57,5000	60	–	$4,9406 \times 10^{-5}$
2	55	56,2500	57,5000	4,3478	$4,9406 \times 10^{-5}$
3	56,2500	56,8750	57,5000	2,2222	$-5,2609 \times 10^{-4}$
4	56,8750	57,1875	57,5000	1,0989	$-2,3260 \times 10^{-4}$
5	57,1875	57,3438	57,5000	0,5464	$-9,0198 \times 10^{-5}$
6	57,3438	57,4219	57,5000	0,2725	$-2,0051 \times 10^{-5}$
7	57,3438	57,3828	57,4219	0,1361	$1,4763 \times 10^{-5}$
8	57,3828	57,4023	57,4219	0,0681	$-2,6224 \times 10^{-6}$
9	57,3828	57,3926	57,4023	0,0340	$6,0758 \times 10^{-6}$
10	57,3828	57,3877	57,3926	0,0170	$1,7281 \times 10^{-6}$
11	57,3877	57,3901	57,3926	0,0085	$-4,4681 \times 10^{-7}$
12	57,3877	57,3889	57,3901	0,0043	$6,4071 \times 10^{-7}$
13	57,3877	57,3883	57,3889	0,0021	$9,6974 \times 10^{-8}$
14	57,3883	57,3886	57,3889	0,0011	$-1,7491 \times 10^{-7}$
15	57,3886	57,3888	57,3889	$5,3177 \times 10^{-4}$	$-3,8968 \times 10^{-8}$
16	57,3886	57,3887	57,3888	$2,6588 \times 10^{-4}$	$2,9003 \times 10^{-8}$
17	57,3887	57,3887	57,3888	$1,3294 \times 10^{-4}$	$-4,9822 \times 10^{-9}$
18	57,3887	57,3887	57,3887	$6,6471 \times 10^{-5}$	$1,2010 \times 10^{-8}$

Как следует из таблицы 2 скорость сходимости итерационного процесса поиска корня уравнения (23) невелика: за одну итерацию точность увеличивается примерно вдвое, т. е. уточнение трех цифр требует 10 итераций.

Зато точность результата уточнения корня гарантируется. Таким образом, приходим к выводу, что метод половинного деления определения искомого значения ОСШ h_{p3}^2 прост и очень надежен, при этом он устойчив к ошибкам округления.

К недостаткам рассмотренного метода можно отнести то, что до начала расчета надо найти отрезок, на котором исследуемая функция меняет знак. Метод половинного деления реализован на языке MATLAB в виде программного компонента bisect.m (см. приложение ко второй части статьи). Усредненные временные затраты уточнения корня составили 0,022971 с.

2.3. Численный метод хорд

Постановка частной задачи: в п. 2.1 был отделен единственный корень уравнения (23) приближенно равный $h_{p3}^2 \approx 57,5$, который заключен в промежутке [55, 60]. Требуется уточнить этот корень методом хорд с относительной процентной погрешностью не более $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4}$ %.

Решение. Метод хорд, который так же называют метод ложного положения, или по латыни метод – *regula falsi* [20], стали использовать потому, что,

как было показано в п. 2.2, метод половинного деления сходится весьма медленно (за одну итерацию точность корня увеличивается примерно вдвое).

Как и алгоритм метода половинного деления, на каждой N итерации метод хорд получает некоторый отрезок $[h_{lN}^2, h_{uN}^2]$, содержащий корень непрерывной функции $f(h^2)$, которая имеет значения противоположных знаков в точках h_{lN}^2 и h_{uN}^2 . В отличие от метода деления пополам очередное приближение на итерации N вычисляется не как середина отрезка $[h_{lN}^2, h_{uN}^2]$, а как точка пересечения оси абсцисс с прямой линией, проведенной через точки $(h_{lN}^2, f(h_{lN}^2))$ и $(h_{uN}^2, f(h_{uN}^2))$.

Формула для точки пересечения выглядит следующим образом:

$$h_{sN}^2 = [h_{lN}^2 f(h_{uN}^2) - h_{uN}^2 f(h_{lN}^2)] / [f(h_{uN}^2) - f(h_{lN}^2)]. \quad (27)$$

Из (27) следует три возможности:

- 1) если $f(h_{lN}^2)$ и $f(h_{sN}^2)$ имеют различные знаки, то нуль принадлежит интервалу $[h_{lN}^2, h_{sN}^2]$;
- 2) если $f(h_{sN}^2)$ и $f(h_{uN}^2)$ имеют различные знаки, нуль лежит на интервале $[h_{sN}^2, h_{uN}^2]$;
- 3) если $f(h_{sN}^2) = 0$, значит, нулем является h_{sN}^2 .

Так как требуется найти корень с точностью $|\varepsilon_a|_{\text{треб}}$, то итерационный процесс поиска корня продолжается до тех пор, пока на итерации N не выполнится следующее неравенство:

$$|\varepsilon_a|_N = |(h_{sN}^2 - h_{uN}^2) / h_{sN}^2| 100\% \leq |\varepsilon_a|_{\text{треб}}. \quad (28)$$

Применительно к сформулированной задаче ход указанного итерационного процесса определения искомого значения ОСШ методом хорд при $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4}\%$ иллюстрирует таблица 3.

Как видно из данных таблицы 3 вычислительный процесс поиска корня уравнения (23) методом хорд завершается на шестой итерации ($N = 6$), когда искомым корнем принимает значение $h_{s6}^2 = h_{p3}^2 = 57,3887$ с относительной процентной погрешностью вычисления корня $|\varepsilon_a|_6 = 9,9086 \times 10^{-6}\%$, что значительно меньше $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4}\%$.

Таблица 3 – Пошаговое выполнение метода хорд для уравнения (23)

N	Крайняя слева точка, h_{lN}^2	Точка пересечения, h_{sN}^2	Крайняя справа точка, h_{uN}^2	Значение ошибки, $ \varepsilon_a $, %	Значение функции, $f(h_{sN}^2)$
1	55	57,5861	60	–	$8,737117 \times 10^{-5}$
2	55	57,4035	57,5861	0,3181	$6,568805 \times 10^{-6}$
3	55	57,3898	57,4035	0,0238	$4,908097 \times 10^{-7}$
4	55	57,3888	57,3898	0,0018	$3,665542 \times 10^{-8}$
5	55	57,3887	57,3888	$1,3268 \times 10^{-4}$	$2,737462 \times 10^{-9}$
6	55	57,3887	57,3887	$9,9086 \times 10^{-6}$	$2,044358 \times 10^{-10}$

По данным таблиц 2 и 3 на рис. 3 приведены графики динамики сходимости итерационного процесса метода половинного деления и метода хорд к корню уравнения (23).

Проанализировав рис. 3, можно сделать вывод, что сходимость итераций методов половинного деления и хорд не монотонна. Скорость сходимости итерационного процесса половинного деления замедляется от итерации к итерации. Что касается метода хорд, то он сходится со скоростью геометрической прогрессии (при этом говорят, что он имеет линейную скорость сходимости) [20, 21].

Сравнивая между собой данные таблиц 2 и 3, приходим к выводу, что корни уравнения (23), уточненные методом половинного деления и методом хорд, совпали: $h_{p3}^2 = 57,3887$. Используя метод хорд, удалось уточнить этот корень за шесть итераций ($N = 6$), что в три раза меньше чем 18 итераций, потребовавшихся методу половинного деления. При этом относительная процентная погрешность $|\varepsilon_a|_6 = 9,9086 \times 10^{-6}$ % корня, найденного методом хорд, на порядок меньше, чем методом половинного деления $|\varepsilon_a|_{18} = 6,6471 \times 10^{-5}$ %.

К недостаткам рассмотренного метода, как и у метода половинного деления, можно отнести то, что до начала расчета надо найти отрезок, на котором исследуемая функция меняет знак. Кроме того, следует учитывать, что в знаменателе формулы (27) для точки пересечения стоит разность значений функции. Вдали от корня это несущественно, но вблизи корня значения функции $f(h_{sN}^2)$ малы и очень близки (таблица 3). При этом может возникнуть потеря значащих цифр, приводящая к «разболтке» счета (поочередному приближению и удалению от корня) [20, 21]. Например, такое может произойти в случае, если функция $f(h^2)$ в области пересечения с осью абсцисс достаточно пологая. В этом случае очередная хорда может практически лечь на ось абсцисс, то есть полностью попасть в полосу «шумов». В этой ситуации произойдет сильное увеличение ошибки вычислений, так как уже отмечалось ранее, в (27) разность двух близких величин $f(h_{uN}^2) - f(h_{lN}^2)$ стоит в знаменателе. В этом смысле метод

половинного деления значительно устойчивее. Это ограничивает точность, с которой можно уточнить искомый корень, но для простых корней это ограничение невелико. Метод хорд реализован на языке MATLAB в виде программного компонента `regula_falsi.m` (см. приложение ко второй части статьи). Усредненные временные затраты уточнения корня составили 0,013206 с, что в 1,74 раза меньше, чем у метода половинного деления 0,022971 с.

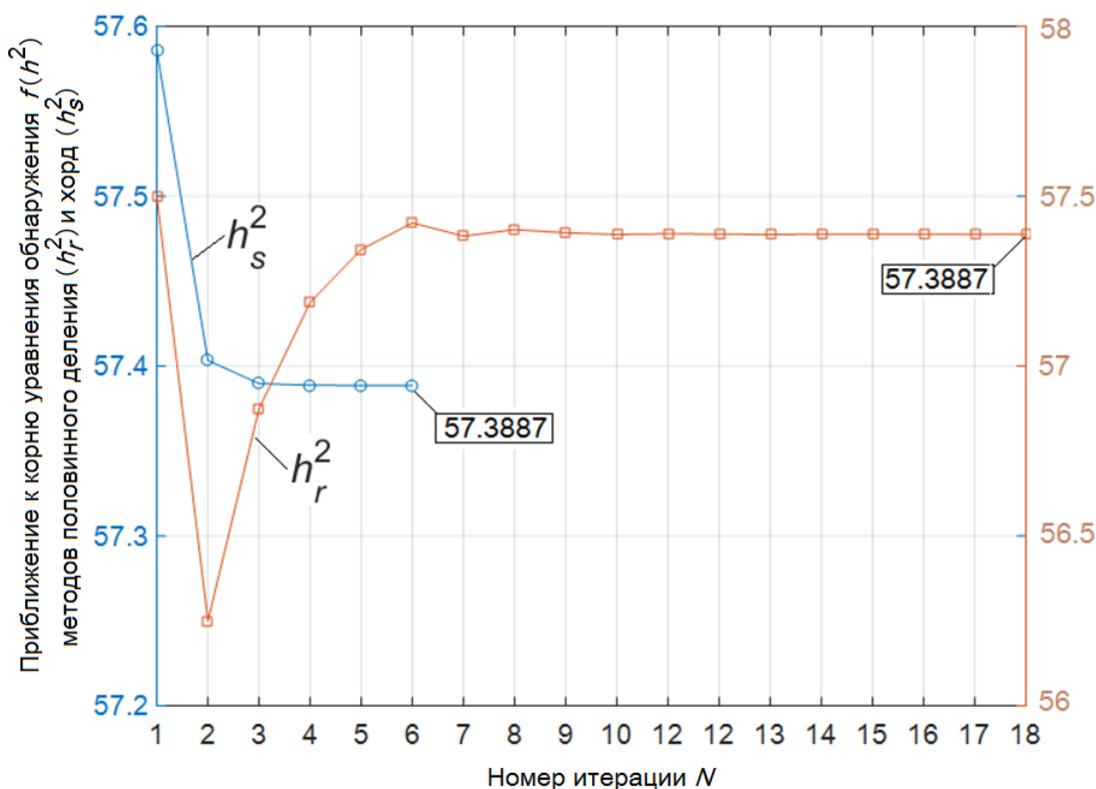


Рис. 3. Динамика сходимости итерационного процесса методов половинного деления (h_r^2) и хорд (h_s^2) к корню уравнения (23)

2.4. Численный метод Ньютона

Постановка частной задачи: в п. 2.1 был отделен единственный корень уравнения (23) приближенно равный $h_{p_3}^2 \approx 57,5$, который заключен в промежутке $[55, 60]$. Требуется уточнить этот корень методом Ньютона с относительной процентной погрешностью не более $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4} \%$.

Решение. Известно [20-22], что метод Ньютона один из наиболее распространенных методов уточнения корней нелинейных уравнений. Его называют также методом Ньютона-Рафсона или методом касательных.

Если h_0^2 начальное приближение корня уравнения (23), то последовательные приближения методом Ньютона применительно к рассматриваемой задаче находят по формуле:

$$h_N^2 = h_{N-1}^2 - f(h_{N-1}^2) / f'(h_{N-1}^2), \quad (29)$$

где: N – номер итерации ($N = 1, 2, \dots$); $f(h_{N-1}^2)$ – значение функции $f(h^2)$ при $h^2 = h_{N-1}^2$; $f'(h_{N-1}^2) = df(h^2)/d(h^2)_{h^2=h_{N-1}^2}$ – значение первой производной функции $f(h^2)$ по параметру ОСШ h^2 при $h^2 = h_{N-1}^2$.

В методе Ньютона начальное приближение корня h_0^2 уравнения (23) выбирают на интервале $[h_l^2, h_u^2]$, руководствуясь следующим правилом: в качестве исходной точки h_0^2 выбирается тот конец интервала $[h_l^2, h_u^2]$, которому отвечает ордината того же знака, что и знак второй производной $f''(h^2)$ [20]:

$$h_0^2 = \begin{cases} h_l^2, & \text{если } f(h_l^2)f''(h_l^2) > 0; \\ h_u^2, & \text{если } f(h_u^2)f''(h_u^2) > 0. \end{cases} \quad (30)$$

Из (29) следует, что для реализации метода Ньютона требуется существование первой непрерывной производной функции $f(h^2)$, т. е. должно выполняться условие: $f'(h_{N-1}^2) \neq 0$. Чтобы не было потери точности, отношение $f(h_{N-1}^2)/f'(h_{N-1}^2)$ надо вычислять достаточно аккуратно. К остальным погрешностям расчета метод Ньютона хорошо устойчив [18].

Так как для вычисления очередного приближения h_N^2 по формуле (29) нужно знать только одно предыдущее значение h_{N-1}^2 , то алгоритм поиска корня методом Ньютона называют одношаговыми. Геометрически итерационный процесс (29) означает замену на каждой итерации графика функции $f(h^2)$ касательной к нему [20-22].

Основным фактором, ограничивающим прикладное использование метода Ньютона, является необходимость вычислять первую и вторую производную функции, что не всегда удобно. Так, применительно к рассматриваемой задаче дифференцированию подлежит функция (23), которую учетом соотношений (7) – (10), можно представить в виде:

$$f(h^2) = \int_0^{\infty} x \exp \left\{ - \frac{p^2 + \left[2h^2\gamma^2(1+\gamma^2+h^2)^{-1} \right]}{2} \right\} \times \\ \times I_0 \left(\sqrt{2h^2\gamma^2(1+\gamma^2+h^2)^{-1}} x \right) dx - P_{\text{поз}}. \quad (31)$$

Из (31) следует, что функция, подлежащая дифференцированию, задана интегралом, содержащим параметр ОСШ h^2 . Причем не только подынтегральное выражение в формуле (31) содержит этот параметр, но и нижний предел интеграла зависит от него. Таким образом, вычисление даже первой производной $f'(h^2) = df(h^2)/dh^2$ предполагает дифференцирование под знаком интеграла в (31), что в рассматриваемом случае представляет достаточно сложную задачу, не говоря уже о второй производной $f''(h^2) = d^2f(h^2)/(dh^2)^2$, не только на этапе получения аналитического выражения для производной, но и на этапе реализации численного алгоритма Ньютона средствами вычислительной техники. Известный НМА оценки скрытности ССС с ПНЧ не содержит известных аналитических решений для вычисления первой $f'(h^2)$ и второй $f''(h^2)$ производной от вероятности правильного обнаружения сигналов ($P_{по}$), выражаемой через Q -функцию Маркума, по параметру ОСШ (h^2).

Известно, что дифференцирование под знаком интеграла, содержащим параметр, упрощается, если интеграл содержит параметр только в подынтегральном выражении [23-25]. В связи с этим воспользуемся альтернативным представлением функции Маркума, приведенным в [26]:

$$Q(\alpha, \beta) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha\beta \cos \tau + \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta \cos \tau + \beta^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta \cos \tau + \beta^2}{2}\right) \right] d\tau \quad (32)$$

Для того чтобы записать выражение для функции, подлежащей дифференцированию согласно методу Ньютона, учтем, что каждый из аргументов α и β функции Маркума (8) зависит от параметра ОСШ h^2 на основании соотношений (3) и (4) следующим образом:

$$\alpha(h^2) \equiv g_1(h^2, \gamma^2) = \left[2h^2\gamma^2(1 + \gamma^2 + h^2)^{-1} \right]^{1/2}; \quad (33)$$

$$\beta(h^2) \equiv h_{01}(h^2, \gamma^2, P_{лт}) = \left[2 \ln(P_{лт}^{-1})(1 + \gamma^2)(1 + \gamma^2 + h^2)^{-1} \right]^{1/2}. \quad (34)$$

Тогда выражение (32) можно переписать следующим образом:

$$f(h^2) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha(h^2)\beta(h^2)\cos \tau + [\beta(h^2)]^2}{[\alpha(h^2)]^2 + 2\alpha(h^2)\beta(h^2)\cos \tau + \beta(h^2)^2} \times \\ \times \left\{ 1 - \exp\left\{-0,5 \left[\alpha(h^2)^2 + 2\alpha(h^2)\beta(h^2)\cos \tau + \beta(h^2)^2 \right]\right\} \right\} d\tau - P_{по3}. \quad (35)$$

Очевидно, теперь дифференцирование под знаком интеграла, содержащим параметр ОСШ h^2 , упрощается, т. к. интеграл в формуле (35) содержит

указанный параметр только в подынтегральном выражении. Введем обозначение:

$$\varphi(\alpha, \beta, \tau) = \frac{\alpha\beta \cos \tau + \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta \cos \tau + \beta^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta \cos \tau + \beta^2}{2}\right) \right]. \quad (36)$$

Также, введем следующие дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha\beta \cos \tau + \beta^2; \quad \nu = \exp\left(-\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta \cos \tau + \beta^2}{2}\right); \\ \nu &= \alpha^2 + 2\alpha\beta \cos \tau + \beta^2; \quad \kappa = \alpha + \beta \cos \tau. \end{aligned} \quad (37)$$

Для вычисления производной $f'(h^2)$ воспользуемся формулой для дифференцирования под знаком интеграла [24, 25]:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \quad (38)$$

и правилом вычисления производной от сложной функции [23]:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (39)$$

где $u = f(x, y, z)$ – функция, определенная в открытой области D , причем каждая из переменных x, y, z в свою очередь является функцией от переменной t в некотором промежутке:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (40)$$

Тогда, взяв производную от функции $f(h^2)$, представленную выражением (35), по параметру ОСШ h^2 получим:

$$\frac{df(h^2)}{d(h^2)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\partial [\varphi(\alpha, \beta, \tau)]}{\partial \alpha} \frac{d\alpha(h^2)}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{\beta(h^2)}{d(h^2)} \right\} d\tau. \quad (41)$$

С учетом (33), (34) и (36)-(38) формулы для расчета производных в подынтегральном выражении (41) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial [\varphi(\alpha, \beta, \tau)]}{\partial \alpha} = A(\alpha, \beta, \tau) + B(\alpha, \beta, \tau) + C(\alpha, \beta, \tau), \quad (42)$$

где:

$$A(\alpha, \beta, \tau) = 2\mu(\nu - 1)\kappa\nu^{-2}; \quad (43)$$

$$B(\alpha, \beta, \tau) = \mu(\nu - 1)\kappa\nu^{-1}; \quad (44)$$

$$C(\alpha, \beta, \tau) = -\beta \cos \tau (\nu - 1)\nu^{-1}. \quad (45)$$

Далее имеем:

$$\frac{\partial [\varphi(\alpha, \beta, \tau)]}{\partial \beta} = D(\alpha, \beta, \tau) + E(\alpha, \beta, \tau) + F(\alpha, \beta, \tau), \quad (46)$$

где:

$$D(\alpha, \beta, \tau) = 2\mu(\nu - 1)(\beta + \alpha \cos \tau)\nu^{-2}; \quad (47)$$

$$E(\alpha, \beta, \tau) = -2(\nu - 1)(2\beta + \alpha \cos \tau)\nu^{-1}; \quad (48)$$

$$F(\alpha, \beta, \tau) = \nu\mu(\beta + \alpha \cos \tau)\nu^{-1}. \quad (49)$$

В свою очередь:

$$\frac{d\alpha(h^2)}{d(h^2)} = \sqrt{2} \left[\frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2 + h^2} - \frac{h^2\gamma^2}{(1 + \gamma^2 + h^2)^2} \right] \left(2\sqrt{\frac{h^2\gamma^2}{1 + \gamma^2 + h^2}} \right)^{-1}; \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(h^2)}{d(h^2)} = & -\sqrt{2} \ln\left(\frac{1}{P_{\text{ЛТ}}}\right) (1 + \gamma^2) \times \\ & \times \left[2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{P_{\text{ЛТ}}}\right) \frac{1 + \gamma^2}{1 + \gamma^2 + h^2} (1 + \gamma^2 + h^2)^2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (51)$$

Расчет первой производной функции $df(h^2)/d(h^2)$ по формулам (41)-(51) реализован на языке MATLAB в виде программного компонента derivative.m (см. приложение ко второй части статьи). После того, как получены соотношения, позволяющие определить значение первой производной $f'(h^2)$ функции $f(h^2)$ для расчетов очередного приближения корня по формуле (29) необходимо определить начальное приближение корня h_0^2 и критерий завершения итерационного процесса по методу Ньютона. Если требуется уточнить корень с процентной погрешностью $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} \%$, то итерации метода Ньютона продолжаются до тех пор, пока на итерации N не выполнится следующее неравенство:

$$|\varepsilon_a|_N = \left| \frac{h_N^2 - h_{N-1}^2}{h_N^2} \right| 100\% \leq |\varepsilon_a|_{\text{треб}}. \quad (52)$$

Для выбора же начального приближение корня h_0^2 согласно (30) необходимо определить вторую производную $f''(h^2)$ функции $f(h^2)$. Для того, чтобы упростить формулы для вычисления второй производной $f''(h^2)$ в дальнейшем условимся использовать следующие обозначения для производных аргументов α и β функции Маркума по параметру ОСШ h^2 : $d\alpha(h^2)/d(h^2) = d\alpha/d(h^2)$ и $d\beta(h^2)/d(h^2) = d\beta/d(h^2)$.

В соответствии с определением второй производной [24, 25], на основании соотношения (41) вторую производную $f''(h^2) = d^2 f(h) / d(h^2)^2$ найдем по формуле:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(h)}{d(h^2)^2} &= \frac{d}{d(h^2)} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] d\tau \right\} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d}{d(h^2)} \left\{ \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] \right\} d\tau = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} \right] + \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (53)$$

Производные $\frac{d}{d(h^2)}[\cdot]$ в подынтегральном выражении (53) определим,

воспользовавшись правилом взятия производной от произведения двух функций [24]:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (54)$$

Тогда, с учетом (54) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} \right] &= \\ &= \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \right] \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{d\alpha}{d(h^2)} \right] = \\ &= \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \right] \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d^2 \alpha}{d(h^2)^2}; \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] &= \\ &= \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \right] \frac{d\beta}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{d\beta}{d(h^2)} \right] = \\ &= \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \right] \frac{d\beta}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d^2 \beta}{d(h^2)^2}. \end{aligned} \quad (56)$$

Определим производную $\frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \right]$, входящую в (55) пользуясь

правилом вычисления производной от сложной функции:

$$\frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \right] = \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha^2} \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \quad (57)$$

С учетом (57) выражение (55) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} \right] &= \left[\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha^2} \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \\ &+ \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d^2 \alpha}{d(h^2)^2} = \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha^2} \left[\frac{d\alpha}{d(h^2)} \right]^2 + \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{d\alpha}{d(h^2)} \frac{d\beta}{d(h^2)} + \\ &+ \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d^2 \alpha}{d(h^2)^2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Определим производную $\frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \right]$, входящую в (56) пользуясь

правилом вычисления производной от сложной функции:

$$\frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \right] = \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta^2} \frac{d\beta}{d(h^2)} \quad (59)$$

С учетом (46) выражение (43) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] &= \left[\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta^2} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] \frac{d\beta}{d(h^2)} + \\ &+ \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d^2 \beta}{d(h^2)^2} = \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} \frac{d\beta}{d(h^2)} + \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta^2} \left[\frac{d\beta}{d(h^2)} \right]^2 + \\ &+ \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d^2 \beta}{d(h^2)^2}. \end{aligned} \quad (60)$$

Подставив (59) и (60) в (53) получим следующее выражение для второй производной $\frac{d^2 f(h)}{dh^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(h)}{d(h^2)^2} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} \right] + \frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] \right\} d\tau = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha^2} \left[\frac{d\alpha}{d(h^2)} \right]^2 + \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{d\alpha}{d(h^2)} \frac{d\beta}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d^2 \alpha}{d(h^2)^2} \right] d\tau - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta^2} \left(\frac{d\beta}{d(h^2)} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta \partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} \frac{d\beta}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d^2 \beta}{d(h^2)^2} \right] d\tau. \quad (61) \end{aligned}$$

В (61) подлежат определению следующие производные: $\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha \partial \beta}$, $\frac{d^2 \alpha}{d(h^2)^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta \partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta^2}$ и $\frac{d^2 \beta}{d(h^2)^2}$. Получим выражение для второй производной $\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha^2}$, взяв производную $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \right]$ с учетом (42):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \right] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [A(\alpha, \beta, \tau) + B(\alpha, \beta, \tau) + C(\alpha, \beta, \tau)] = \\ &= \frac{\partial A(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} + \frac{\partial B(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} + \frac{\partial C(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha}. \quad (62) \end{aligned}$$

Из (43) – (45) следует:

$$\frac{\partial A(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} = A_1(\alpha, \beta, \tau) + A_2(\alpha, \beta, \tau) + A_3(\alpha, \beta, \tau) + A_4(\alpha, \beta, \tau); \quad (63)$$

где, с учетом (37), можем записать:

$$A_1(\alpha, \beta, \tau) = 2\mu(\nu - 1)v^{-2}; \quad (64)$$

$$A_2(\alpha, \beta, \tau) = -2\nu\mu(\alpha + \beta \cos \tau)^2 v^{-2}; \quad (65)$$

$$A_3(\alpha, \beta, \tau) = -8\mu(\alpha + \beta \cos \tau)^2 (\nu - 1)v^{-3}; \quad (66)$$

$$A_4(\alpha, \beta, \tau) = 2\beta(\nu - 1)\kappa v^{-2} \cos \tau; \quad (67)$$

$$\frac{\partial B(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} = B_1(\alpha, \beta, \tau) + B_2(\alpha, \beta, \tau) + B_3(\alpha, \beta, \tau) + B_4(\alpha, \beta, \tau), \quad (68)$$

где:

$$B_1(\alpha, \beta, \tau) = \mu\nu v^{-1}; \quad (69)$$

$$B_2(\alpha, \beta, \tau) = -\mu\nu\kappa^2 v^{-1}; \quad (70)$$

$$B_3(\alpha, \beta, \tau) = -2\mu\nu\kappa^2 v^{-2}; \quad (71)$$

$$B_4(\alpha, \beta, \tau) = \beta \nu \kappa \nu^{-1} \cos \tau. \quad (72)$$

$$\frac{\partial C(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} = C_1(\alpha, \beta, \tau) + C_2(\alpha, \beta, \tau), \quad (73)$$

где:

$$C_1(\alpha, \beta, \tau) = -2\beta(\nu - 1)\kappa \nu^{-2} \cos \tau; \quad (74)$$

$$C_2(\alpha, \beta, \tau) = -\beta \nu \kappa \nu^{-1} \cos \tau. \quad (75)$$

Получим выражение для второй производной $\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta^2}$, взяв производную $\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \right]$ с учетом (46):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \right] &= \frac{\partial}{\partial \beta} [D(\alpha, \beta, \tau) + E(\alpha, \beta, \tau) + F(\alpha, \beta, \tau)] = \\ &= \frac{\partial D(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} + \frac{\partial E(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} + \frac{\partial F(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (76)$$

Из (46)-(48) следует:

$$\frac{\partial D(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} = D_1(\alpha, \beta, \tau) + D_2(\alpha, \beta, \tau) + D_3(\alpha, \beta, \tau) + D_4(\alpha, \beta, \tau), \quad (77)$$

где:

$$D_1(\alpha, \beta, \tau) = 2\mu(\nu - 1)\nu^{-2}; \quad (78)$$

$$D_2(\alpha, \beta, \tau) = -2\mu\nu(\beta + \alpha \cos \tau)^2 \nu^{-2}; \quad (79)$$

$$D_3(\alpha, \beta, \tau) = 4(\nu - 1)\nu^{-2}(\beta + \alpha \cos \tau)^2; \quad (80)$$

$$D_4(\alpha, \beta, \tau) = -8\mu(\nu - 1)\nu^{-3}(\beta + \alpha \cos \tau)^2. \quad (81)$$

$$\frac{\partial E(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} = E_1(\alpha, \beta, \tau) + E_2(\alpha, \beta, \tau) + E_3(\alpha, \beta, \tau), \quad (82)$$

где:

$$E_1(\alpha, \beta, \tau) = 2(\nu - 1)\nu^{-2}(2\beta + \alpha \cos \tau)(\beta + \alpha \cos \tau); \quad (83)$$

$$E_2(\alpha, \beta, \tau) = -2(\nu - 1)\nu^{-1}; \quad (84)$$

$$E_3(\alpha, \beta, \tau) = \nu \nu^{-1}(\beta + \alpha \cos \tau)(2\beta + \alpha \cos \tau). \quad (85)$$

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} = F_1(\alpha, \beta, \tau) + F_2(\alpha, \beta, \tau) + F_3(\alpha, \beta, \tau) + F_4(\alpha, \beta, \tau), \quad (86)$$

где, с учетом обозначений (37), имеем:

$$F_1(\alpha, \beta, \tau) = \nu \mu \nu^{-1}; \quad (87)$$

$$F_2(\alpha, \beta, \tau) = -\nu \mu (\beta + \alpha \cos \tau)^2 \nu^{-1}; \quad (88)$$

$$F_3(\alpha, \beta, \tau) = \nu (\alpha \cos \tau + \beta)(\beta + \alpha \cos \tau)^2 \nu^{-1}; \quad (89)$$

$$F_4(\alpha, \beta, \tau) = -2\nu\mu(\beta + \alpha \cos \tau)^2 \nu^{-2}. \quad (90)$$

В рассматриваемом случае смешанные производные $\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha \partial \beta}$ и $\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta \partial \alpha}$, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой, т. к. выполняется условие их непрерывности:

$$\frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta \partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \right] = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \right]. \quad (91)$$

Соответственно, с учетом (42), можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \right] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} [D(\alpha, \beta, \tau) + E(\alpha, \beta, \tau) + F(\alpha, \beta, \tau)] = \\ &= \frac{\partial D(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} + \frac{\partial E(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} + \frac{\partial F(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (92)$$

Из (47)-(49) следует:

$$\frac{\partial D(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} = G_1(\alpha, \beta, \tau) + G_2(\alpha, \beta, \tau) + G_3(\alpha, \beta, \tau) + G_4(\alpha, \beta, \tau), \quad (93)$$

где:

$$G_1(\alpha, \beta, \tau) = 2\mu(\nu - 1)\nu^{-2} \cos \tau; \quad (94)$$

$$G_2(\alpha, \beta, \tau) = -8\mu(\nu - 1)\kappa\nu^{-3}(\beta + \alpha \cos \tau); \quad (95)$$

$$G_3(\alpha, \beta, \tau) = -2\mu\nu\kappa\nu^{-2}(\beta + \alpha \cos \tau); \quad (96)$$

$$G_4(\alpha, \beta, \tau) = 2\beta(\nu - 1)\nu^{-2}(\beta + \alpha \cos \tau) \cos \tau. \quad (97)$$

$$\frac{\partial E(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} = K_1(\alpha, \beta, \tau) + K_2(\alpha, \beta, \tau) + K_3(\alpha, \beta, \tau), \quad (98)$$

где:

$$K_1(\alpha, \beta, \tau) = 2(\nu - 1)\nu^{-2}(2\beta + \alpha \cos \tau)\kappa; \quad (99)$$

$$K_2(\alpha, \beta, \tau) = (\nu - 1)\nu^{-1} \cos \tau; \quad (100)$$

$$K_3(\alpha, \beta, \tau) = \nu\nu^{-1}(2\beta + \alpha \cos \tau)\kappa. \quad (101)$$

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} = L_1(\alpha, \beta, \tau) + L_2(\alpha, \beta, \tau) + L_3(\alpha, \beta, \tau) + L_4(\alpha, \beta, \tau), \quad (102)$$

где:

$$L_1(\alpha, \beta, \tau) = \nu\nu^{-1}\mu \cos \tau; \quad (103)$$

$$L_2(\alpha, \beta, \tau) = 2\nu\mu\nu^{-2}\kappa(\beta + \alpha \cos \tau); \quad (104)$$

$$L_3(\alpha, \beta, \tau) = \beta\nu\nu^{-1}(\beta + \alpha \cos \tau) \cos \tau; \quad (105)$$

$$L_4(\alpha, \beta, \tau) = -\nu\mu\nu^{-1}(\beta + \alpha \cos \tau)\kappa. \quad (106)$$

Получим выражение для второй производной $\frac{d^2\alpha(h^2)}{d(h^2)^2}$, взяв производную

$\frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{d\alpha(h^2)}{d(h^2)} \right]$ с учетом (50):

$$\frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{d\alpha}{d(h^2)} \right] = H_1(\gamma^2, h^2) + H_2(\gamma^2, h^2), \quad (107)$$

где:

$$\begin{aligned} H_1(\gamma^2, h^2) &= \\ &= -\sqrt{2} \left[\frac{\gamma^2}{(1+\gamma^2+h^2)^2} - \frac{h^2\gamma^2}{(1+\gamma^2+h^2)^3} \right] \left(\frac{h^2\gamma^2}{1+\gamma^2+h^2} \right)^{-1/2}; \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} H_2(\gamma^2, h^2) &= \\ &= -0,25\sqrt{2} \left[\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2+h^2} - \frac{h^2\gamma^2}{(1+\gamma^2+h^2)^2} \right]^2 \left(\frac{h^2\gamma^2}{1+\gamma^2+h^2} \right)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (109)$$

Выражение для второй производной $\frac{d^2\beta(h^2)}{d(h^2)^2}$ получим, взяв производ-

ную $\frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{d\beta(h^2)}{d(h^2)} \right]$ с учетом (51):

$$\frac{d}{d(h^2)} \left[\frac{d\beta(h^2)}{d(h^2)} \right] = I_1(\gamma^2, h^2, P_{\text{ЛТ}}) + I_2(\gamma^2, h^2, P_{\text{ЛТ}}), \quad (110)$$

где:

$$I_1(\gamma^2, h^2, P_{\text{ЛТ}}) = -\frac{\sqrt{2} \ln\left(\frac{1}{P_{\text{ЛТ}}}\right) (1+\gamma^2)}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{P_{\text{ЛТ}}}\right) \frac{1+\gamma^2}{1+\gamma^2+h^2} (1+\gamma^2+h^2)^3}}; \quad (111)$$

$$I_2(\gamma^2, h^2, P_{\text{ЛТ}}) = - \frac{\sqrt{2} \ln\left(\frac{1}{P_{\text{ЛТ}}}\right)^2 (1 + \gamma^2)^2}{4 \left(\ln\left(\frac{1}{P_{\text{ЛТ}}}\right) \frac{1 + \gamma^2}{1 + \gamma^2 + h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (1 + \gamma^2 + h^2)^4}. \quad (112)$$

Теперь, воспользовавшись критерием (30) и полученными соотношениями (53)-(112) для второй производной $f''(h^2)$, определим начальное приближение h_1^2 корня уравнения (23) для метода Ньютона. При этом учтем, что как следует из рис. 2, $f(h_l^2) = f(55) < 0$ и $(h_u^2) = f(60) > 0$.

На рис. 4 приведен график изменения второй производной $f''(h^2)$ при изменении аргумента ОСШ h^2 в промежутке $[h_l^2, h_u^2] = [55, 60]$ уточнения корня уравнения (23).

Как видно на рис. 4 в промежутке $[h_l^2, h_u^2] = [55, 60]$ вторая производная $f''(h^2)$ принимает отрицательные значения. Следовательно, на основании критерия (30) принимаем начальное приближение $h_1^2 = h_l^2 = 55$, т. к. $f(h_l^2) f''(h_l^2) > 0$.

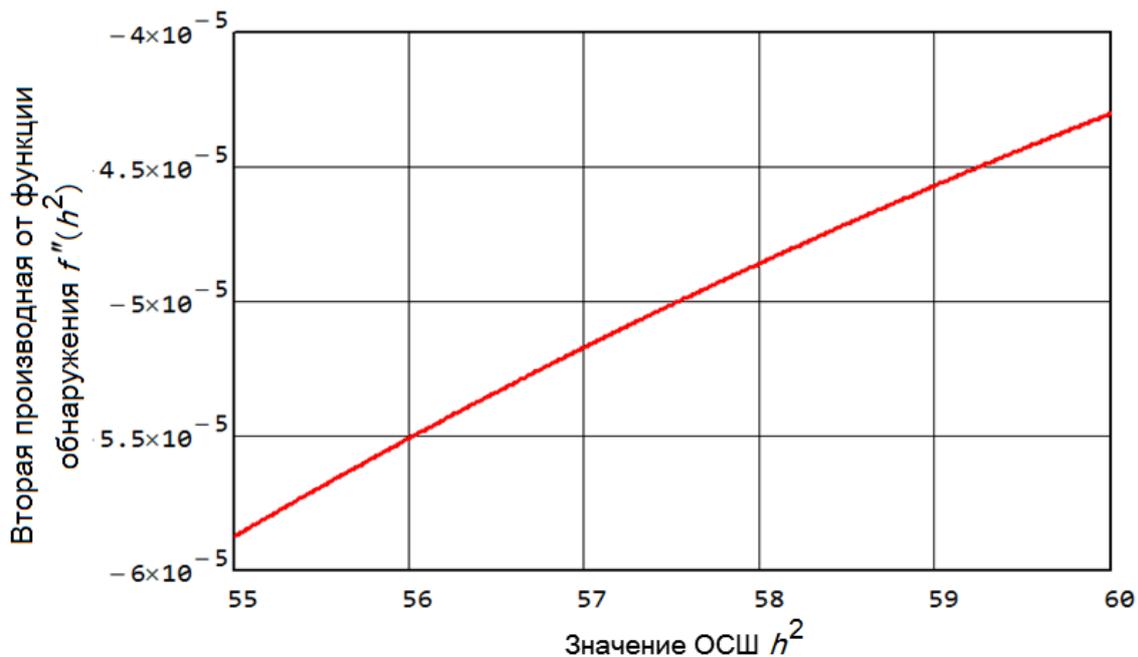


Рис. 4. График изменения второй производной $f''(h^2)$

Ход итерационного процесса уточнения корня уравнения (23) методом Ньютона, т. е. значения ОСШ $h_{p_3}^2$ при выборе начального приближения корня $h_1^2 = 55$, иллюстрирует таблица 4.

Таблица 4 – Пошаговое выполнение метода Ньютона

N	Приближение корня, h_N^2	Значение ошибки, $ \varepsilon_a $, %	Значение функции, $f(h_N^2)$	Значение производной, $f'(h_N^2)$
1	55	–	–0,0011	$5,1977 \times 10^{-4}$
2	57,2124	3,8670	$-7,8983 \times 10^{-5}$	$4,5046 \times 10^{-4}$
3	57,3877	0,3055	$-4,3751 \times 10^{-7}$	$4,4548 \times 10^{-4}$
4	57,3887	0,0017	$-1,3598 \times 10^{-11}$	$4,4545 \times 10^{-4}$
5	57,3887	$5,3193 \times 10^{-8}$	$1,1102 \times 10^{-16}$	$4,4545 \times 10^{-4}$

Сравнивая данные таблиц 2, 3 и 4, приходим к выводу, что корни уравнения (23), уточненные методом половинного деления, методом хорд и методом Ньютона совпали с точностью до четвертого знака после запятой: $h_{p_3}^2 = 57,3887$ (метод Ньютона), $h_{p_3}^2 = 57,3887$ (метод бисекций) и $h_{p_3}^2 = 57,3887$ (метод хорд). Тем самым подтверждается корректность полученных аналитических выражений (41)-(51), (53), (55)-(58), (60)-(112) для вычисления первой $f'(h^2)$ и второй $f''(h^2)$ производной от вероятности правильного обнаружения сигналов ($P_{по}$), выражаемой через Q -функцию Маркума, по параметру ОСШ (h^2), т. к. сами алгоритмы, реализующие эти методы, существенно отличаются.

Используя метод Ньютона, удалось уточнить этот корень за пять итераций ($N = 5$), что на одну итерацию меньше чем при использовании метода хорд ($N = 6$) и более чем в три раза меньше чем 18 итераций ($N = 18$), потребовавшихся методу половинного деления.

Относительная процентная погрешность корня уравнения (23), уточненного методом Ньютона, $|\varepsilon_a|_5 = 5,3193 \times 10^{-8}$ % на два порядка меньше, чем относительная ошибка $|\varepsilon_a|_6 = 9,9086 \times 10^{-6}$ %, корня уточненного методом хорд и на три порядка меньше, чем относительная ошибка метода половинного деления $|\varepsilon_a|_{18} = 6,6471 \times 10^{-5}$ %. Таким образом, приходим к выводу, что метод Ньютона при уточнении корня уравнения (23) предпочтительнее метода половинного деления и метода хорд по критериям количества итераций и точности. К недостаткам рассмотренного метода можно отнести то, что до начала расчета необходимо найти начальное приближение корня, а для этого требуется рассчитать вторую производную $f''(h^2)$ на интервале $[h_l^2, h_u^2] = [55, 60]$ поиска уточненного значения корня.

Усредненные временные затраты уточнения корня составили 1,1439 с, что в 49,79 раза больше, чем у метода половинного деления (0,022971 с) и в 86,62 раза больше, чем у метода хорд (0,013206 с).

Численный метод Ньютона реализован на языке MATLAB в виде программного компонента Newton.m (см. приложение ко второй части статьи).

2.5. Численный метод Ньютона-хорд

Сравнивая между собой данные таблиц 3 и 4, иллюстрирующих пошаговое выполнение метода хорд и метода Ньютона для уравнения (23), приходим к выводу, что метод хорд формирует последовательные приближения к искомому значению корня с избытком \bar{h}_N^2 , а метод Ньютона с недостатком h_N^2 ($N = 1, 2, \dots$). Соединяя способ хорд и метод Ньютона, получаем комбинированный метод Ньютона-хорд или метода касательных-хорд [21], на каждом этапе которого находим значения по недостатку и значения по избытку уточненного корня h_{true}^2 уравнения $f(h^2) = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что цифры, общие для h_N^2 и \bar{h}_N^2 обязательно принадлежат уточненному корню h_{true}^2 [21].

Постановка частной задачи: требуется уточнить корень уравнения (23) приближенно равный $h_{p_3}^2 \approx 57,5$ и заключенный в промежутке $[h_l^2, h_u^2] = [55, 60]$ методом Ньютона-хорд с относительной (процентной) погрешностью не более $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4} \%$.

Решение. Как было показано ранее $f(h_l^2) \cdot f(h_u^2) < 0$, а $f'(h^2)$ и $f''(h^2)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки $f'(h^2) > 0$, $f''(h^2) < 0$ на рассматриваемом отрезке $[h_l^2, h_u^2] = [55, 60]$ локализации корня уравнения (23).

Итерационный процесс метода Ньютона-хорд реализуем на основе выражений:

$$\bar{h}_N^2 = \left[h_{lN}^2 f(h_{uN}^2) - h_{uN}^2 f(h_{lN}^2) \right] \left[f(h_{uN}^2) - f(h_{lN}^2) \right]^{-1}, \quad (113)$$

$$h_N^2 = h_{N-1}^2 - f(h_{N-1}^2) / f'(h_{N-1}^2), \quad N = 1, 2, \dots, \quad (114)$$

полагая, в соответствии с критерием (30), начальное приближение корня для метода Ньютона $h_0^2 = h_l^2 = 55$.

Как показано в [21], особенностью метода Ньютона-хорд является то, что на каждом шаге метод хорд применяется к новому отрезку $[h_N^2, \bar{h}_N^2]$.

Из сказанного выше следует, что $h_N^2 < h_{true}^2 < \bar{h}_N^2$ и

$$0 < h_{true}^2 - h_N^2 < \bar{h}_N^2 - h_N^2. \quad (115)$$

Так как допустимая относительная погрешность приближенного корня h_N^2 задана заранее и равна $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4} \%$, то процесс сближения заканчивается на той итерации, когда будет обнаружено, что

$$|\varepsilon_a|_N = \left| (\bar{h}_N^2 - h_N^2) / \bar{h}_N^2 \right| 100 \% \leq |\varepsilon_a|_{\text{треб}}. \quad (116)$$

По окончании итерационного процесса в соответствии с рекомендациями [21], за истинное (англ. *true*) значение корня h_{true}^2 примем среднее арифметическое полученных последних значений:

$$h_{true N}^2 = (h_N^2 + \bar{h}_N^2) / 2. \quad (117)$$

Ход итерационного процесса уточнения корня уравнения (23) методом Ньютона-хорд иллюстрирует таблица 5.

Таблица 5 – Пошаговое выполнение метода Ньютона-хорд

N	Приближе- ние корня с недостатком, h_N^2	Усредненное приближе- ние корня $h_{true N}^2$	Приближе- ние корня с избытком, \bar{h}_N^2	Значение ошибки, $ \varepsilon_a , \%$	Значение функции, $f(h_{true N}^2)$
1	57,2124	57,3992	57,5861	–	$4,6859 \times 10^{-6}$
2	57,3877	57,3888	57,3898	0,0036	$2,6562 \times 10^{-8}$
3	57,3887	57,3887	57,3887	$1,1284 \times 10^{-7}$	$8,2545 \times 10^{-13}$

Из данных таблицы 5 следует, что вычислительный процесс уточнения корня уравнения (23) завершается за три итерации ($N = 3$). Значение уточненного корня $h_{true N}^2$ в соответствии с (117) принимает значение $h_{true 3}^2 = h_{p 3}^2 = 57,3887$ с относительной процентной погрешностью $|\varepsilon_a|_3 = 1,128425 \times 10^{-7} \%$, что на три порядка меньше, чем $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4} \%$.

Сравнивая между собой данные таблиц 2, 3, 4 и 5, приходим к выводу, что корни уравнения (23), уточненные методом половинного деления, методом хорд, методом Ньютона и методом Ньютона-хорд совпали: $h_{p 3}^2 = 57,3887$.

По данным таблиц 4 и 5 на рис. 5 построены графики динамики сходимости итерационного процесса методом Ньютона и Ньютона-хорд к корню уравнения (23).

Как следует из рис. 5, сходимость итераций метода Ньютона монотонна вблизи корня и немонотонна вдали от него, а вот у метода Ньютона-хорд сходимость монотонна, как вблизи корня, так и вдали от него. При этом скорость сходимости итерационного процесса для простого корня достаточно велика.

Используя метод Ньютона-хорд, удалось уточнить этот корень за три итерации ($N = 3$), что на две итерации меньше чем при использовании метода Ньютона ($N = 5$), в два раза меньше чем при использовании метода хорд ($N = 6$) и в шесть раз меньше чем 18 итераций ($N = 18$), потребовавшихся методу половинного деления.

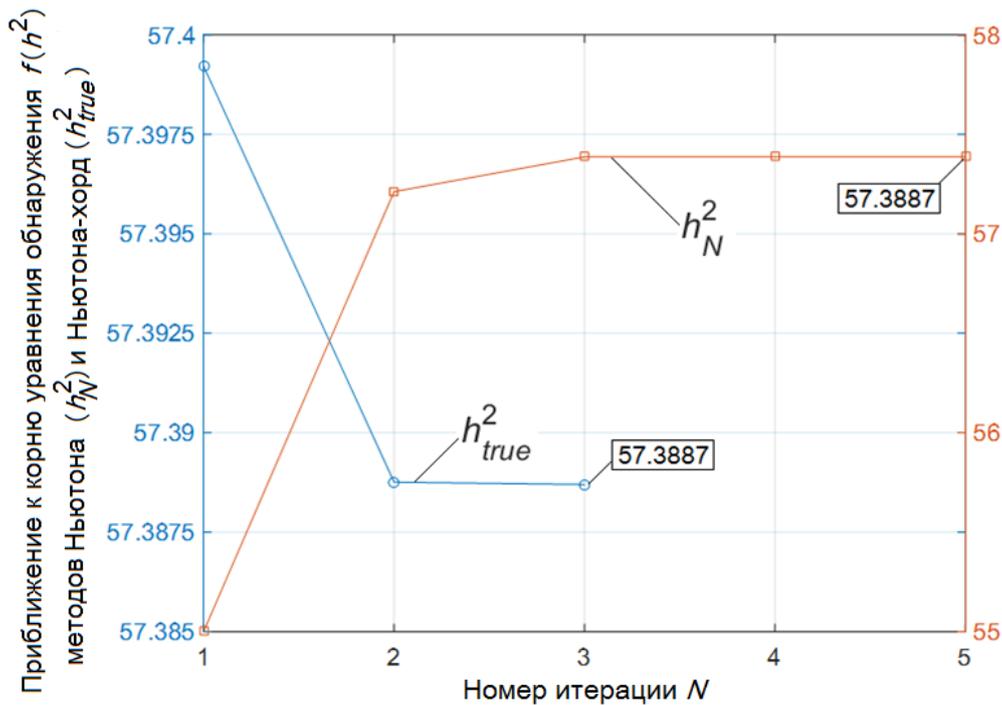


Рис. 5. Динамика сходимости итерационного процесса методов Ньютона (h_N^2) и Ньютона-хорд (h_{true}^2) к корню уравнения (23)

Относительная процентная погрешность корня, уточненного методом Ньютона-хорд, составляет $|\varepsilon_a|_3 = 1,1284 \times 10^{-7} \%$, что сопоставимо с относительной погрешностью корня, уточненного методом Ньютона, $|\varepsilon_a|_5 = 5,3193 \times 10^{-8} \%$. Следовательно, наиболее более эффективным по критериям количества итераций и точности из рассмотренных численных методов уточнения корня уравнения (23) оказался метод Ньютона-хорд. Основным недостатком метода Ньютона-хорд является то, что до начала расчета необходимо найти начальное приближение корня, а для этого требуется рассчитать вторую производную $f''(h^2)$ на интервале его локализации.

Усредненные временные затраты уточнения корня уравнения (23) методом Ньютона-хорд составили 0,17462 с, что в 7,60 раза больше, чем у метода половинного деления (0,022971 с), в 13,22 раза больше, чем у метода хорд (0,013206 с) и в 6,55 раза меньше, чем у метода Ньютона (1,1439 с). Таким образом, приходим к выводу, что из рассмотренных методов самым быстрым методом уточнения корня уравнения (23) является численный метод хорд, а далее, по мере возрастания времени счета, располагаются следующие численные методы: метод половинного деления, Ньютона-хорд и Ньютона.

Численный метод Ньютона-хорд реализован на языке MATLAB в виде программного компонента combi.m (см. приложение ко второй части статьи).

3. Постановка и решение частной задачи определения значения отношения сигнал-шум, необходимого для обеспечения требуемой помехоустойчивости при пространственно-разнесенном приеме сигналов земной станцией спутниковой связи, на основе численных методов

3.1. Постановка частной задачи и анализ возможных подходов к ее решению

В соответствии с постановкой общей задачи функциональная зависимость вероятности ошибки приема бита информации $P_{\text{ош}}$ в ССС при пространственно-разнесенном НК приеме сигналов на несколько ($n \geq 2$) антенн с квадратичным сложением в условиях релеевских общих замираний сигналов определяется уравнением помехоустойчивости (14) и может быть записана в общем виде, как:

$$P_{\text{ош}} = \zeta \left\{ \bar{h}^2, n, R \left[\Delta\rho, \Delta\rho_{\text{к}}(f_0, \vec{\lambda}, \alpha) \right] \right\}. \quad (118)$$

В дальнейшем будем полагать, что в выражении (16) выполняется равенство $\bar{h}^2 = h^2$, т. е. среднее значение ОСШ в ветвях пространственного разнесения антенн \bar{h}^2 равно искомому ОСШ h^2 .

С учетом того, что коэффициент пространственной корреляции быстрых замираний в линейно разнесенных на эквидистантный интервал $\Delta\rho$ элементах приемной АС $R \left[\Delta\rho, \Delta\rho_{\text{к}}(f_0, \vec{\lambda}, \alpha) \right]$, вычисляется по формуле (17), то при заданных исходных данных и фиксированном значении несущей частоты f_0 , принадлежащей диапазону ПНЧ $f_0 \in 30 \dots 100$ МГц, он принимает вполне определенное числовое значение, и в дальнейшем может рассматриваться в качестве константы $R = R \left[\Delta\rho, \Delta\rho_{\text{к}}(f_0, \vec{\lambda}, \alpha) \right] = \text{const}$.

Таким образом, в правой части формулы (118) можно не учитывать зависимость вероятности ошибки приема бита информации $P_{\text{ош}}$ от коэффициента R пространственной корреляции быстрых замираний в линейно разнесенных на эквидистантный интервал $\Delta\rho$ элементах приемной АС, т. е. $P_{\text{ош}} = \zeta(h^2, n)$.

Если, кроме того, по условию общей задачи можно зафиксировать количество ветвей (кратность) пространственного разнесения элементов приемной АС (например $n = 4$), то вместо ОСШ на входе ПРМ (выходе приемной АС) ЗсСС (h^2), можно рассматривать тот же параметр, но с учетом кратности пространственного разнесения элементов приемной АС, т. е. $h^2 \equiv h_n^2$.

Тогда, требуется определить такое значение ОСШ h_n^2 , при котором вероятность ошибки приема бита информации $P_{\text{ош}}$ в ЗсСС при пространственно-разнесенном НК приеме сигналов на n антенн (например $n = 4$) с квадратичным сложением в условиях релеевских общих замираний сигналов, опреде-

лимое уравнением помехоустойчивости (14), примет требуемое значение $P_{\text{ош}} = P_{\text{ош тр}} = 10^{-5}$:

$$P_{\text{ош}} = \zeta(h_n^2) \Big|_{h_n^2 = h_{\text{тр}n}^2} = P_{\text{ош тр}} = 10^{-5}. \quad (119)$$

Анализ уточненной задачи показывает, что уравнение (118) является нелинейным. В настоящее время аналитическое решение уравнения (118) не известно, а, следовательно, для поиска его решения необходимо применить численные методы. При этом наиболее близкими являются численные методы поиска всех или некоторых корней нелинейного уравнения с одним неизвестным [20-22]. Действительно, если принять:

$$f(h_n^2) = \zeta(h_n^2) - P_{\text{ош тр}}, \quad (120)$$

то уравнение (118) можно представить в виде:

$$f(h_n^2) = 0. \quad (121)$$

В развернутом виде уравнение (121) можно записать так:

$$f(h^2) = P_{\text{ош}} - P_{\text{ош тр}} = \zeta \left\{ h^2, f_0, n, R \left[\Delta\rho, \Delta\rho_k(f_0, \bar{\lambda}, \alpha) \right] \right\} \Big|_{h^2 = h_{\text{тр}n}^2} - P_{\text{ош тр}} = 0. \quad (122)$$

Вычисление функции $f(h^2)$ по формуле (122) реализовано на языке MATLAB в виде программного компонента `fh.m` (см. приложение ко второй части статьи).

Таким образом, задачу поиска ОСШ, необходимого для обеспечения требуемой помехоустойчивости при пространственно-разнесенном приеме сигналов в ЗсСС можно конкретизировать следующим образом:

Дано: $P_{\text{ош}} = P_{\text{ош тр}} = 10^{-5}$, $l_s \approx 400$ м, $h_э \approx 2,5 \cdot 10^5$ м, $\sigma_{\Delta N} = 2 \cdot 10^9$ эл/м³, $\alpha = 65^\circ$, $f_0 = 10^8$ Гц, $n = 4$ и $\Delta\rho = 400$ м. *Требуется*, используя численные методы, найти все или некоторые корни уравнения (122) с относительной процентной погрешностью не более $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4}$.

Решение. Как было показано в п. 2, для поиска корня (корней) нелинейного уравнения с одним неизвестным разработан ряд численных методов, не требующих вычисления производной. При этом наиболее известными из них являются метод половинного деления, метод хорд и др.

Как отмечалось в п. 2.1, в рамках указанных методов задача поиска корней нелинейного уравнения с одним неизвестным распадается на несколько подзадач: во-первых, надо исследовать количество, характер и расположение корней (локализовать корни); во-вторых, найти приближенные значения корней (получить начальное приближение); в-третьих, выбрать из них интересующие корни и уточнить их с требуемой точностью на основе численных методов.

Как было показано в п. 2.1, первая и вторая подзадачи решаются аналитическими и графическими методами. В рассматриваемом случае, в рамках первой подзадачи на основе аналитических соотношений (14)-(17) и оговоренных

ранее исходных данных, при $n = 4$, был построен график функции (122) $f(h_{\text{тр}4}^2)$ при изменении ОСШ $h_{\text{тр}4}^2$ в интервале от 154 до 159 (рис. 6).

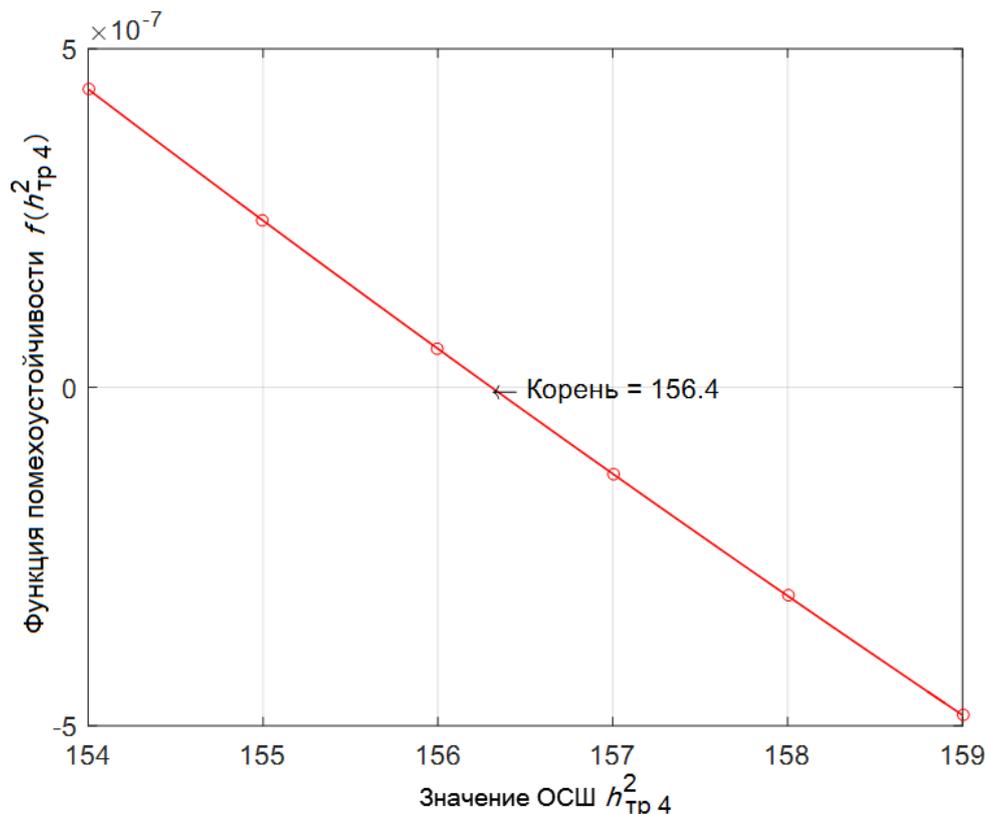


Рис. 6. График функции $f(h_{\text{тр}4}^2)$ при $P_{\text{ош тр}} = 10^{-5}$, $l_s \approx 400$ м, $h_3 \approx 2,5 \cdot 10^5$ м, $\sigma_{\Delta N} = 2 \cdot 10^9$ эл/м³, $\alpha = 1,1344640138$ рад, $f_0 = 10^8$ Гц, $\Delta\rho = 400$ м и $n = 4$

На рис. 6 видно, что график исследуемой функции $f(h_{\text{тр}4}^2)$ пересекает ось абсцисс один раз в интервале значений ОСШ на входе ПРМ ЗС ССС ($h_{\text{тр}4}^2$) от $h_l^2 = 154$ до $h_u^2 = 159$. На концах этого интервала функция $f(h_{\text{тр}4}^2)$ имеет разные знаки. Поэтому уравнение (122) имеет один действительный корень приблизительно равный $h_{\text{тр}4}^2 \approx 156,4$.

В рамках третьей подзадачи выбираем интересующий нас корень $h_{\text{тр}4}^2 \approx 156,4$, локализованный на отрезке $[156, 157]$, и уточним его с требуемой точностью на основе численных методов.

3.2. Численный метод половинного деления

Постановка частной задачи: в п. 3.1 был отделен единственный корень уравнения (122) приблизительно равный $h_{\text{тр}4}^2 \approx 156,4$, который заключен в про-

межутке [156,157]. Требуется уточнить этот корень методом половинного деления с относительной процентной погрешностью не более $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4} \%$.

Решение. Итерационный процесс метода деления пополам (бисекций) был подробно рассмотрен в п. 2.2. Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению хода итерационного процесса определения значения ОСШ $h_{\text{тр}4}^2$ методом половинного деления, который иллюстрирует таблица 6.

Таблица 6 – Пошаговое выполнение метода половинного деления для уравнения (122)

N	Крайняя слева точка, h_l^2	Средняя точка, h_r^2	Крайняя справа точка, h_u^2	Значение ошибки, $ \varepsilon_a $, %	Значение функции, $f(h_r^2)$
1	156	156,5000	157	–	$-3,5937 \times 10^{-8}$
2	156	156,2500	156,5000	0,3195	$-3,5937 \times 10^{-8}$
3	156,2500	156,3750	156,5000	0,1600	$1,0403 \times 10^{-8}$
4	156,2500	156,3125	156,3750	0,0799	$-1,2802 \times 10^{-8}$
5	156,2500	156,2813	156,3125	0,0400	$-1,2080 \times 10^{-9}$
6	156,2813	156,2969	156,3125	0,0200	$4,5955 \times 10^{-9}$
7	156,2969	156,3047	156,3125	0,0100	$1,6932 \times 10^{-9}$
8	156,3047	156,3086	156,3125	0,0050	$2,4243 \times 10^{-10}$
9	156,3047	156,3066	156,3086	0,0025	$-4,8284 \times 10^{-10}$
10	156,3047	156,3057	156,3066	0,0012	$-1,2021 \times 10^{-10}$
11	156,3057	156,3062	156,3066	$6,2478 \times 10^{-4}$	$6,1106 \times 10^{-11}$
12	156,3057	156,3059	156,3062	$3,1239 \times 10^{-4}$	$-2,9554 \times 10^{-11}$
13	156,3059	156,3060	156,3062	$1,5619 \times 10^{-4}$	$1,5776 \times 10^{-11}$
14	156,3059	156,3060	156,3060	$7,8097 \times 10^{-5}$	$-6,8892 \times 10^{-12}$

Из данных таблицы 6 видно, что итерационный процесс уточнения корня уравнения (122) методом половинного деления завершается на четырнадцатой итерации ($N = 14$), когда искомый корень принимает значение $h_{r14}^2 = h_{\text{тр}4}^2 = 156,3060$ с относительной процентной погрешностью $|\varepsilon_a|_{14} = 7,8097 \times 10^{-5} \%$, удовлетворяющей неравенству (25).

При этом следует учесть, что значение коэффициент пространственной корреляции быстрых замираний в линейно разнесенных на эквидистантный интервал $\Delta r = 400$ м элементах приемной АС равен $R = 0,88683$, т. е. является значительным [10], что и приводит к такому большому значению требуемого ОСШ $h_{\text{тр}4}^2$.

Таким образом, метод половинного деления может быть рекомендован для уточнения корня уравнения (122), т. к. он обеспечивает высокую надежность и точность определения значения ОСШ $h_{\text{тр}n}^2$, а скорость сходимости вы-

числительного итерационного процесса в этом случае не велика, но, как отмечалось ранее, этот показатель не является критичным.

Усредненные временные затраты уточнения корня уравнения (122) методом хорд составили 0,025815 с.

3.3. Численный метод хорд

Постановка частной задачи: в п. 3.1 был отделен единственный корень уравнения (122) приближенно равный $h_{\text{тр}4}^2 \approx 156,4$, который заключен в промежутке $[156, 157]$. Требуется уточнить этот корень методом хорд с относительной процентной погрешностью не более $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 0,0001 \%$.

Решение. Итерационный процесс метода хорд был подробно рассмотрен в п. 2.3. Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению хода итерационного процесса определения значения ОСШ $h_{\text{тр}4}^2$ методом хорд, который иллюстрирует таблица 7.

Таблица 7 – Пошаговое выполнение метода хорд для уравнения (122)

N	Крайняя слева точка, h_{lN}^2	Точка пересечения, h_{sN}^2	Крайняя справа точка, h_{uN}^2	Значение ошибки, $ \varepsilon_a , \%$	Значение функции, $f(h_r^2)$
1	156	156,3086	157	–	$-4,7955 \times 10^{-10}$
2	156	156,3060	156,3086	0,0016	$-1,7822 \times 10^{-12}$
3	156	156,3060	156,3060	$6,1181 \times 10^{-6}$	$-6,6240 \times 10^{-15}$

Из данных таблицы 7 следует, что в рассматриваемом случае итерационный процесс завершается на третьей итерации ($N = 3$), когда искомый корень принимает значение $h_{s3}^2 = h_{\text{тр}4}^2 = 156,3060$ с относительной процентной погрешностью $|\varepsilon_a|_3 = 6,1181 \times 10^{-6} \%$, что меньше требуемой $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 10^{-4} \%$.

По данным таблиц 6 и 7 на рис. 7 построен график динамики сходимости итерационного процесса методов метода половинного деления и хорд к корню уравнения (122).

Как следует из рис. 7, скорость сходимости итерационного процесса метода половинного деления уточнения корня уравнения (122), как и в случае поиска корня уравнения (23), невелика: за одну итерацию точность увеличивается примерно вдвое, т. е. уточнение трех цифр требует 10 итераций. При этом точность результата уточнения корня уравнения (122) гарантируется.

На рис. 7 видно, что сходимость итераций метода хорд не монотонна. Скорость сходимости итерационного процесса замедляется от итерации к итерации.

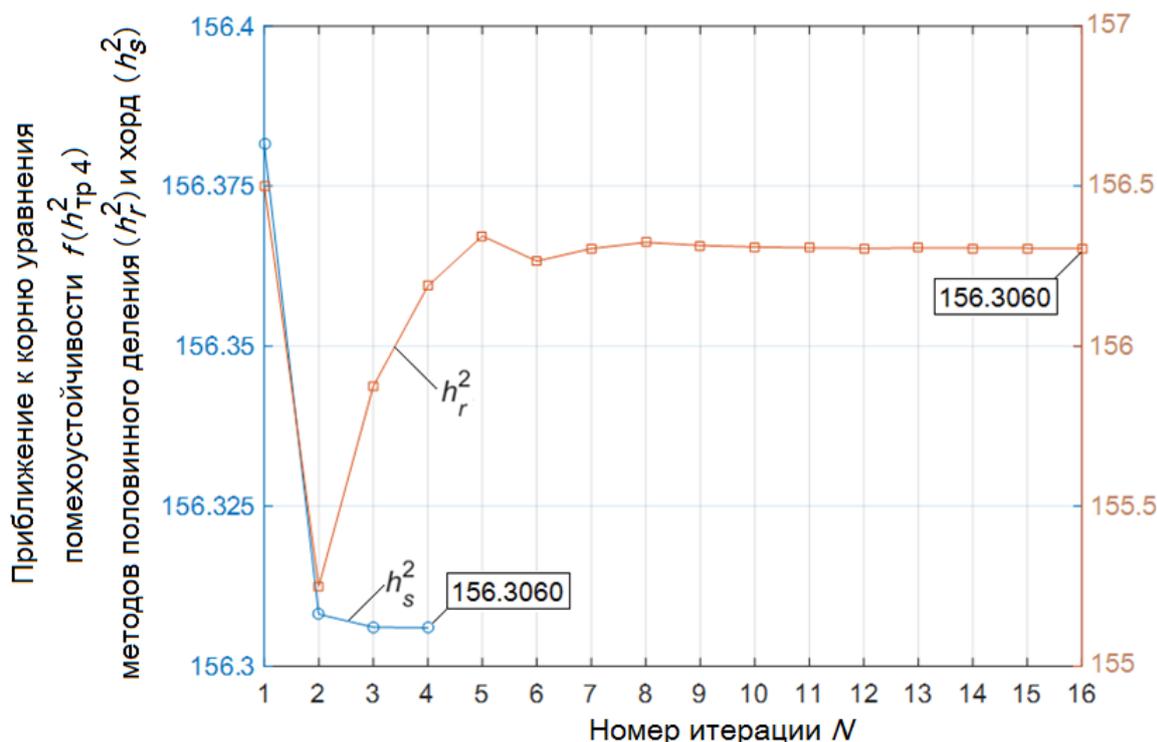


Рис. 7. Динамика сходимости итерационного процесса методов половинного деления (h_r^2) и хорд (h_s^2) к корню уравнения (122)

Сравнивая между собой данные таблиц 6 и 7, приходим к выводу, что корни уравнения (122), уточненные методом половинного деления и методом хорд, совпали: $h_{Tr4}^2 = 156,3060$ (метод половинного деления) и $h_{Tr4}^2 = 156,3060$ (метод хорд), что и показано на рис. 7. Используя метод хорд, удалось уточнить этот корень за четыре итерации ($N = 3$), что в более, чем в четыре раза меньше чем 14 итераций, потребовавшихся методу половинного деления. При этом относительная процентная погрешность $|\varepsilon_a|_3 = 6,1181 \times 10^{-6} \%$ корня, найденного методом хорд, в 12,76 раза меньше, чем у метода половинного деления $|\varepsilon_a|_{14} = 7,8097 \times 10^{-5} \%$.

Таким образом, приходим к выводу, что метод хорд при поиске корня уравнения (122) превосходит метод половинного деления по таким критериям эффективности, как количество итераций и точность. Усредненные временные затраты уточнения корня уравнения (122) методом хорд составили 0,074557 с, что в 2,89 раза меньше, чем у метода половинного деления 0,025815 с. Следовательно, в данном случае самым быстрым также является численный метод хорд.

4. Сравнительная оценка погрешности определения коэффициента энергетической скрытности спутниковой системы связи на основе численных и графоаналитических методов

Для оценки погрешности определения КЭС ССС ($\gamma_{эс}$) по формуле (4) введем следующие обозначения:

$\Delta\gamma_{эс}$ – абсолютная погрешность определения КЭС ССС $\gamma_{эс}$;

$\Delta h_{рз}^2$ – абсолютная погрешность определения параметра $h_{рз}^2$;

$\Delta h_{тр}^2$ – абсолютная погрешность определения параметра $h_{тр}^2$.

При расчетах по формуле (4) погрешность определения КЭС ССС $\Delta\gamma_{эс}$ определяется на основе теоремы о погрешности частного, согласно которой относительная погрешность частного не превышает сумму относительных погрешностей делимого и делителя [21]. На основании следствия из этой теоремы, можно записать:

$$\delta_{\gamma_{эс}} = \delta_{\Delta h_{рз}^2} + \delta_{\Delta h_{тр}^2}, \quad (123)$$

где: $\delta_{\gamma_{эс}} = \Delta\gamma_{эс} / \gamma_{эс}$ – относительная погрешность определения КЭС $\gamma_{эс}$;

$\delta_{\Delta h_{рз}^2} = \Delta h_{рз}^2 / h_{рз}^2$ – относительная погрешность определения параметра $h_{рз}^2$;

$\delta_{\Delta h_{тр}^2} = \Delta h_{тр}^2 / h_{тр}^2$ – относительная погрешность определения параметра $h_{тр}^2$.

Таким образом, для получения сравнительной оценки погрешности определения КЭС ССС $\Delta\gamma_{эс}$ на основе численных и графоаналитических методов необходимо вначале определить относительные погрешности $\delta_{\Delta h_{рз}^2}$ и $\delta_{\Delta h_{тр}^2}$, достигаемые при определении КЭС $\Delta\gamma_{эс}$ графоаналитическим методом и на основе применения численных методов решения нелинейных уравнений (23) и (122). Сравнительная оценка погрешности определения КЭС ССС $\Delta\gamma_{эс}$ на основе численных и графоаналитических методов может быть получена на основе сопоставления относительной погрешности определения значения параметров $\delta_{\Delta h_{рз}^2}$ и $\delta_{\Delta h_{тр}^2}$, найденных, соответственно, на основе численных методов

$\left(\delta_{\Delta h_{рз}^2}\right)_{\text{числ.}}$, $\left(\delta_{\Delta h_{тр}^2}\right)_{\text{числ.}}$ и графоаналитическим методом $\left(\delta_{\Delta h_{рз}^2}\right)_{\text{гр. аналит.}}$, $\left(\delta_{\Delta h_{тр}^2}\right)_{\text{гр. аналит.}}$ по следующей формуле:

$$\eta = \frac{\left(\delta_{\Delta h_{рз}^2}\right)_{\text{гр. аналит.}} + \left(\delta_{\Delta h_{тр}^2}\right)_{\text{гр. аналит.}}}{\left(\delta_{\Delta h_{рз}^2}\right)_{\text{числ.}} + \left(\delta_{\Delta h_{тр}^2}\right)_{\text{числ.}}}, \quad (124)$$

где η – число, показывающее во сколько раз найденная графоаналитическим методом относительная погрешность определения КЭС ССС $\gamma_{эс}$ превосходит аналогичную погрешность, но найденную численными методами решения нелинейных уравнений (23) и (122).

В п. 2 и 3 были использованы аналитические и графическими методы на этапах локализации и получения начального приближения корней нелинейных уравнений (23) и (122) при исходных данных, сформулированных в п. 1 при постановке общей задачи исследования.

Так, для нелинейного уравнения (23) оказалось, что единственный корень локализован на отрезке $[55, 60]$, а начальное приближение корня приближенно равно $h_{p_3}^2 \approx 57,5$ (рис. 2). Аналогично, для нелинейного уравнения (122) установлено, что единственный корень локализован на отрезке $[156, 157]$, а начальное приближение корня составляет $h_{tr4}^2 \approx 156,4$ (рис. 6).

Кроме того, в п. 2 и 3 были использованы одни и те же численные методы для уточнения корней нелинейных уравнений (23) и (122): метод половинного деления и метод хорд. Оказалось, что уточненное значение корня нелинейного уравнений (23) при использовании численного метода половинного деления и метода хорд совпали: $h_{p_3}^2 = 57,3887$. При этом относительная погрешность $|\varepsilon_a|_6 = 9,9086 \times 10^{-6} \%$ корня, уточненного методом хорд за шесть итераций вычислительного процесса, на порядок меньше, чем относительная погрешность метода половинного деления, достигнутая за 18 итераций $|\varepsilon_a|_{18} = 6,6471 \times 10^{-5} \%$.

Соответственно уточненное значение корня нелинейного уравнения (122) при использовании численного метода половинного деления и метод хорд также совпали $h_{tr4}^2 = 156,3060$. При этом относительная погрешность $|\varepsilon_a|_3 = 6,1181 \times 10^{-6} \%$ корня, уточненного методом хорд за три итерации вычислительного процесса, на порядок меньше, чем относительная погрешность метода половинного деления, достигнутая за 14 итераций $|\varepsilon_a|_{14} = 7,8097 \times 10^{-5} \%$.

Учитывая сопоставимость относительных погрешностей уточнения корня нелинейных уравнений (23) и (122) методом половинного деления и методом хорд, сравнительную оценку погрешности определения КЭС ССС на основе численных и графоаналитических методов по формуле (124), проведем для случая уточнения корней этих уравнений, как для метода половинного деления, так для метода хорд. При этом учтем, что числители при вычислениях по формуле (124), как для метода половинного деления, так для метода хорд будут одинаковыми. Тогда, для метода половинного деления имеем:

$$\begin{aligned} \left(\delta_{\Delta h_{p_3}^2} \right)_{\text{гр. аналит.}} &= \frac{\Delta h_{p_3}^2}{h_{p_3}^2} 100 \% = \frac{|57,5 - 57,3887|}{57,3887} 100 \% = \\ &= \frac{0,1113}{57,3887} 100 \% = 0,1939 \% ; \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} \left(\delta_{\Delta h_{\text{гр } n}^2} \right)_{\text{гр. аналит.}} &= \frac{\Delta h_{\text{гр } n}^2}{h_{\text{гр } n}^2} 100 \% = \frac{|156,4 - 156,3060|}{156,3060} 100 \% = \\ &= \frac{0,0946}{156,3060} 100 \% = 6,0138 \cdot 10^{-2} \% ; \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \left(\delta_{\Delta h_{p_3}^2} \right)_{\text{числ.}} &= 6,6471 \times 10^{-5} \% \text{ и} \\ \left(\delta_{\Delta h_{\text{гр } n}^2} \right)_{\text{числ.}} &= 7,8097 \times 10^{-5} \% . \end{aligned} \quad (127)$$

Подставляя (125)-(127) в (124) получим:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(0,1939 + 6,0138 \cdot 10^{-2}) \%}{(6,6471 \times 10^{-5} + 7,8097 \times 10^{-5}) \%} = \frac{0,25404}{14,4568 \times 10^{-5}} = \\ &= 0,0175724 \times 10^5 = 1757,24 . \end{aligned} \quad (128)$$

Как следует из (128), относительная погрешность определения КЭС ССС графоаналитическим методом превосходит аналогичную погрешность численного метода половинного деления уточнения корней нелинейных уравнений (23) и (122) более чем в тысячу раз или на три порядка.

Аналогично, для метода хорд:

$$\begin{aligned} \left(\delta_{\Delta h_{p_3}^2} \right)_{\text{числ.}} &= 9,9086 \times 10^{-6} \% \text{ и} \\ \left(\delta_{\Delta h_{\text{гр } n}^2} \right)_{\text{числ.}} &= 6,1181 \times 10^{-6} \% . \end{aligned} \quad (129)$$

Подставляя (125), (126) и (129) в формулу (124) получим:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(0,1939 + 6,0138 \cdot 10^{-2}) \%}{(9,9086 \times 10^{-6} + 6,1181 \times 10^{-6}) \%} = \frac{0,25404}{16,0267 \times 10^{-6}} = \\ &= 0,01585105 \times 10^6 = 15851,05 . \end{aligned} \quad (130)$$

Как следует из (130), относительная погрешность определения КЭС ССС графоаналитическим методом превосходит аналогичную погрешность численного метода хорд уточнения корней нелинейных уравнений (23) и (122) более чем в 15 тысяч раз или на четыре порядка.

Таким образом, приходим к выводу, что разработанная методика оценки КЭС ССС на основе применения численных методов уточнения корней нелинейных уравнений (23) и (122) позволяет, как минимум, на три порядка уменьшить относительную процентную погрешность определения этого параметра по сравнению с известными графоаналитическими методами.

Заключение

С целью исследования зависимости от значения несущей частоты f_0 отношения сигнал-шум, необходимого для обнаружения с заданным качеством сигнала ССС средством РРТР (h_{p3}^2) и для пространственно-разнесенного приема узкополосных простых сигналов с требуемой вероятностью ошибки приема бита информации в ЗСС на четырехэлементную приемную АС ССС (h_{tr4}^2), были проведены дополнительные расчеты указанных параметров для частот от 30 и до 90 МГц с шагом 10 МГц. Таким образом, в сводной таблице 8 представлены значения этих параметров h_{p3}^2 и h_{tr4}^2 при изменении частоты f_0 от 30 и до 100 МГц с шагом 10 МГц.

Таблица 8 – Значения параметров h_{p3}^2 и h_{tr4}^2 при изменении частоты f_0

f_0 , МГц	30	40	50	60	70	80	90	100
h_{p3}^2 , дБ	29,393	28,527	26,865	24,57	22,134	20,112	18,641	17,588
h_{tr4}^2 , дБ	16,318	16,956	17,858	18,829	19,749	20,572	21,296	21,94

По данным таблицы 8 на рис. 8 построены графики, иллюстрирующие, как изменяются параметры h_{p3}^2 и h_{tr4}^2 при изменении несущей частоты f_0 .

На рис. 8 видно, что указанные графики являются нелинейными. При этом график зависимости h_{p3}^2 с ростом частоты f_0 монотонно убывает от 29,393 до 17,588 дБ, а график зависимости h_{tr4}^2 , наоборот, с ростом частоты f_0 монотонно возрастает от 16,318 до 21,94 дБ. Кроме того, из анализа рис. 8 следует, что эти графики пересекаются в точке, соответствующей значению частоты, примерно равной 78 МГц. Следовательно, на этой частоте значение числителя и знаменателя дроби, представленной выражением (4) для вычисления КЭС ССС, становятся равными друг другу, а сам КЭС принимает значение равное нулю в логарифмических единицах измерения (дБ). Поэтому, для исходных данных, соответствующих формулировке общей задачи, (см. п. 1) энергетическая скрытность рассматриваемой ССС обеспечивается в интервале частот от 30 до 78 МГц, т. к. в этом случае $(\gamma_{эс})_{дБ} > 0$, а начиная с частоты 78 МГц и выше, энергетическая скрытность этой ССС уже не обеспечивается, т. к. для этих частот $(\gamma_{эс})_{дБ} \leq 0$.

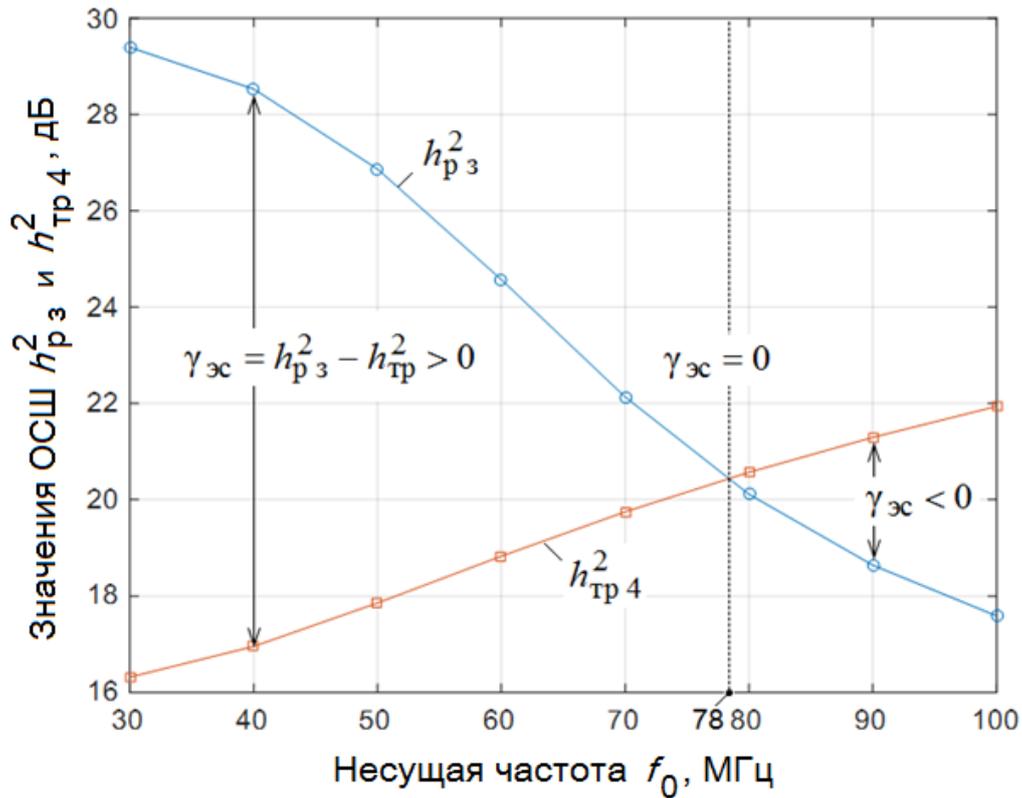


Рис. 8. Графики, иллюстрирующие изменение параметров h_{p3}^2 и h_{tr4}^2 при изменении частоты f_0

Таким образом, анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Задача определения с высокой точностью, когда относительная (процентная) погрешность не превышает $10^{-4} \%$, значения ОСШ, необходимого для обнаружения сигнала ССС ПРМ радиобнаружения средства РРТР с заданным качеством ($P_{по3} = 0,99$ и $P_{лт3} = 10^{-4}$) и значения ОСШ, гарантирующего пространственно-разнесенный прием сигналов на несколько антенн ($n \geq 2$) антенн ССС с требуемой вероятностью ошибки приема бита информации ($P_{ош} = P_{ош\ tr} = 10^{-5}$) была успешно решена на основе численных методов поиска корня нелинейных уравнений (23) и (122) с одним неизвестным: метод половинного деления, метод хорд, метод Ньютона и методом Ньютона-хорд (для уравнения (23)) и методами половинного деления и метода хорд (для уравнения (122)).

2. В рамках проведенных исследований впервые были получены оригинальные аналитические выражения (41)-(51) для вычисления первой $f'(h^2)$ и (53), (55)-(58), (60)-(112) для вычисления второй $f''(h^2)$ производной от вероятности правильного обнаружения сигналов ($P_{по}$), выражаемую через Q -функции Маркума, по параметру ОСШ (h^2) на входе ПРМ обнаружения средства РРТР, что позволило использовать численные методы Ньютона и

Ньютона-хорд применительно к рассматриваемой задаче уточнения корней нелинейного уравнения (23).

3. Хронометраж временных затрат численных методов при определении корня нелинейных уравнений (23) и (122) показал, что самым быстрым является численный метод хорд, а далее по мере возрастания времени счета располагаются: метод половинного деления, метод Ньютона-хорд и метод Ньютона.

4. Разработанный метод оценки КЭС ССС на основе применения численных методов уточнения корней нелинейных уравнений (23) и (122) позволяет, как минимум, на три порядка уменьшить относительную процентную погрешность определения этого параметра по сравнению с известными графоаналитическими методами.

5. Для исходных данных, соответствующих формулировке общей задачи (см. п. 1), энергетическая скрытность рассматриваемой ССС обеспечивается в интервале частот от 30 до 78 МГц, т. к. в этом случае КЭС $(\gamma_{эс})_{дБ} > 0$, а начиная с частоты 78 МГц и выше, энергетическая скрытность ССС уже не обеспечивается, т. к. на этих частотах $(\gamma_{эс})_{дБ} \leq 0$.

Полученные результаты и их новизна. В настоящей статье предложен метод оценки КЭС ССС с ПНЧ, который отличается от известных тем, что он:

1) впервые, на этапе формирования исходных данных для непосредственного вычисления КЭС по формуле (4), использует численные методы половинного деления, хорд, Ньютона и метода Ньютона-хорд, применяемые традиционно для уточнения корня нелинейного уравнения с одним неизвестным, что в результате позволило повысить точность определения значений ОСШ на входе ПРМ ЗсСС $h_{тр}^2$ и на входе ПРМ радиобнаружения станции РТР $h_{рз}^2$, а также повысить точность определения КЭС не менее чем на три порядка и сократить время на проведение таких расчетов с часов до единиц секунд;

2) позволяет оценить этот коэффициент с позиций возможного радиобнаружения сигнала ССС при одновременном обеспечении требуемой помехоустойчивости связи, причем, с учетом того, что в канале радиобнаружения могут возникать райсовские замирания принимаемых сигналов произвольной глубины;

3) учитывает факт наличия пространственной корреляции быстрых замираний сигналов в элементах приемной АС, а также зависимость коэффициента пространственной корреляции этих замираний R от значения несущей частоты f_0 , параметров ионосферы, угла α трансionoсферного распространения радиоволн и расстояния Δr между элементами приемной АС.

Литература

1. Тузов Г. И., Сивов В. А., Прытков В. И., Урядников Ю. Ф., Дергачев Ю. А., Сулиманов А. А. Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 264 с.

2. Борисов В. И., Зинчук В. М., Лимарев А. Е. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов методом псевдослучайной

перестройки рабочей частоты / под ред. В.И. Борисова. – М.: РадиоСофт, 2008. – 512 с.

3. Буга Н. Н. Основы теории связи и передачи данных. Часть 1. – Л.: ЛКВВИА, 1968. – 548 с.

4. Коростелев А. А., Клюев Н. Ф., Мельник Ю. А., Веретягин А. А., Губин В. А., Дулевич В. Е., Зиновьев Ю. С., Петров А. В. Теоретические основы радиолокации / под ред. В.Е. Дулевича. – М.: Советское радио, 1978. – 608 с.

5. Макаренко С. И., Иванов М. С., Попов С. А. Помехозащищенность систем связи с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты: монография. – СПб.: Свое издательство, 2013. – 166 с.

6. Макаренко С. И. Описательная модель системы спутниковой связи MUOS // Системы управления, связи и безопасности. 2019. № 3. С. 89-116. doi: 10.24411/2410-9916-2019-10306.

7. Чипига А. Ф. Анализ энергетической скрытности низкочастотных систем спутниковой связи от обнаружения сигналов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. № 2. С. 209-216.

8. Чипига А. Ф., Сенокосова А. В. Защита информации в системах космической связи за счет изменения условий распространения радиоволн // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 1. С. 59-66.

9. Кириллов Н. Е. Помехоустойчивая передача сообщений по линейным каналам со случайно изменяющимися параметрами. – М.: Связь, 1971. – 256 с.

10. Андронов И. С., Финк Л. М. Передача дискретных сообщений по параллельным каналам. – М.: Советское радио, 1971. – 408 с.

11. Калинин А. И. Распространение радиоволн на трассах наземных и космических радиолиний. – М.: Связь, 1979, 1971. – 296 с.

12. Пашинцев В. П., Солчатов М. Э., Гахов Р. П. Влияние ионосферы на характеристики космических систем передачи информации. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2006. – 191 с.

13. Chipiga A.F., Pashintsev V.P. Procedure for Calculating the Dependence of the Energy Concealment Factor on Carrier Frequency Selection for Low-Frequency Satellite Communications System // Automatic Control and Computer Sciences. 2016. Vol. 50. № 6. P. 408-414.

14. Pashintsev V. P., Chipiga A. F., Tsybmal V. A., Zelenevskiy V. V. Low-Frequency Satellite Communication System Technical Means' Parameters Synthesis by the Requirements for Energetic Concealment and Noise Immunity // Automatic Control and Computer Sciences. 2018. Vol. 52. № 3, P. 243-249.

15. Pashintsev V. P., Chipiga A. F., Anzin I. V. Energetic concealment of low-frequency satellite communication system with arbitrary recession of radiointercepting receiver // REMS 2018. Multidisciplinary Symposium on Computer Science and ICT. Proceedings of the 2018 Multidisciplinary Symposium on Computer Science and ICT, Russia, (October 15, 2018, Stavropol). – Aachen, 2018. CEUR Workshop Proceedings Vol. 2254. P. 237-244.

16. Pashintsev V. P., Chipiga A. F., Kostyuk D. V., Mikhajlichenko R. M. Estimation of energy secrecy of low-frequency satellite communication system with arbitrary number of spatial diversity reception of signals // The 2nd International Scientific and Practical Conference on Innovations in Engineering and Technology

(Veliky Novgorod, 27–28 June 2019). – Bristol, 2019. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Vol. 656. 012041. doi: 10.1088/1757-899X/656/1/012041.

17. Ляхов А. В. Определение зависимости коэффициента энергетической скрытности систем спутниковой связи при обнаружении сигналов от выбора рабочей частоты на основе численных методов решения нелинейных уравнений // Современная наука и инновации. 2017. № 1 (17). С. 42-49.

18. Ляхов А. В., Пашинцев В. П., Белов А. Д., Бессмертный М. Ю. Методика оценки вероятности правильного обнаружения сигналов с райсовскими замираниями // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2012. № 3 (7). С. 21-26.

19. Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: справочник / под ред. Л.М. Финка – М.: Радио и связь, 1981. – 232 с.

20. Калиткин Н. Н., Альшина Е. А. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 304 с.

21. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики: Учеб. пособие для вузов. 3-е изд., испр. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 664 с.

22. Chapra S. C. Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists. – Mcgraw Hill Book Co, Boston MA, 2006. – 584 p.

23. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. I / пред. и прим. А.А. Флоринского. 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 680 с.

24. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II / пред. и прим. А.А. Флоринского. 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.

25. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Т. 2. – Издательство «Наука», 1974. – 479 с.

26. Чучин Е. В. Свойство специальных функций в моделях качества информационных систем // Auditorium: электронный научный журнал Курского государственного университета. 2014. № 1. С. 80-89 – URL: https://api-mag.kursksu.ru/api/v1/get_pdf/1408/ (дата обращения: 15.01.2022).

Reference

1. Tuzov G. I., Sivov V. A., Prytkov V. I., Uryadnikov U. F., Dergachev U. A., Sulimanov A. A. *Pomekhozashchishchennost' radiosistem so slozhnymi signalami* [Noise immunity of radio systems with complex signals]. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1985. 264 p. (in Russian).

2. Borisov V. I., Zinchuk V. M., Limarev A. E. *Pomekhozashchishchennost' sistem radiosviazi s rasshireniem spektra signalov metodom psevdosluchainoi perestroiki rabochei chastoty* [Noise immunity of radio communication systems with the spread of the spectrum of signals by the method of pseudo-random tuning of the operating frequency]. Edited by Borisov V. I. Moscow, RadioSoft Publ., 2008. 512 p. (in Russian).

3. Buga N. N. *Osnovy teorii svyazi i peredachi dannykh. Chast' 1.* [Fundamentals of the theory of communication and data transmission. Part 1]. Leningrad, LRMAEA, 1968. 548 p. (in Russian).

4. Korostelev A. A., Klyuyev N. F., Melnik U. A., Veretiagin A. A., Gubin V. A., Dulevich V. E., Zinov'ev Y. S., Petrov A. V. *Teoreticheskie osnovy radiolokatsii* [Theoretical foundations of radiolocation]. Edited by Dulevich V. E. Moscow, Sov. radio Publ., 1978. 608 p. (in Russian).

5. Makarenko S. I., Ivanov M. S., Popov S. A. *Pomekhozashchishchennost' sistem svyazi s psevdosluchainoi perestroikoii rabochei chastoty* [Noise immunity of communication systems with pseudo-random tuning of the operating frequency]. Saint Petersburg, Svoe izdatel'stvo, 2013. 166 p. (in Russian).

6. Makarenko S. I. Descriptive Model of the MUOS Satellite Communication System. *Systems of Control, Communication and Security*, 2019, no. 3, pp. 89-116. doi: 10.24411/2410-9916-2019-10306 (in Russian).

7. Chipiga A. F. Analiz energeticheskoi skrytnosti nizkochastotnykh sistem sputnikovoi svyazi ot obnaruzheniia signalov [Analysis of energy secrecy of low-frequency satellite communication systems from signal detection]. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2014, no. 2, pp. 209-216. (in Russian).

8. Chipiga A. F., Senokosova A. V. Zashchita informatsii v sistemakh kosmicheskoi svyazi za schet izmeneniia uslovii rasprostraneniia radiovoln [Protection of information in space communication systems by changing the conditions of propagation of radio waves]. *Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 1, pp. 52-59 (in Russian).

9. Kirillov N. E. *Pomekhoustoichivaia peredacha soobshchenii po lineinym kanalim so sluchaino izmeniaiushchimisya parametrami* [Noise-immune messaging over linear channels with randomly changing parameters]. Moscow, Connection, 1971. 256 p. (in Russian).

10. Andronov I. S., Fink L. M. *Peredacha diskretnykh soobshchenii po parallel'nym kanalim* [Transmission of discrete messages over parallel channels]. Moscow, Soviet radio Publ., 1971. 408 p. (in Russian).

11. Kalinin A. I. *Rasprostranenie radiovoln na trassakh nazemnykh i kosmicheskikh radiolinii* [Propagation of radio waves on the paths of surface and space radio links]. Moscow, Svyaz' Publ., 1979, 1971. 296 p. (in Russian).

12. Pashintsev V. P., Solchatov M. E., Gahov R. P. *Vliianie ionosfery na kharakteristiki kosmicheskikh sistem peredachi informatsii* [Influence of the ionosphere on the characteristics of space information transmission systems]. Moscow, Publishing house of physical and mathematical literature, 2006. 191 p. (in Russian).

13. Chipiga A. F., Pashintsev V. P. Procedure for Calculating the Dependence of the Energy Concealment Factor on Carrier Frequency Selection for Low-Frequency Satellite Communications System. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2016, vol. 50, no. 6, pp. 408-414 (in English).

14. Pashintsev V. P., Chipiga A. F., Tsymbal V. A., Zelenevskiy V. V. Low-Frequency Satellite Communication System Technical Means' Parameters Synthesis by the Requirements for Energetic Concealment and Noise Immunity. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2018, vol. 52, no. 3, pp. 243-249 (in English).

15. Pashintsev V. P., Chipiga A. F., Anzin I. V. Energetic concealment of low-frequency satellite communication system with arbitrary recession of radiointercepting receiver. *REMS 2018. Multidisciplinary Symposium on Computer Science and ICT*, Stavropol, 2018, CEUR Workshop Proceedings, vol. 2254, pp. 237-244. (in English).

16. Pashintsev V. P., Chipiga A. F., Kostyuk D. V., Mikhajlichenko R. M. Estimation of energy secrecy of low-frequency satellite communication system with arbitrary number of spatial diversity reception of signals. *The 2nd International Scientific and Practical Conference on Innovations in Engineering and Technology*, Veliky Novgorod, 2019, vol. 656, 012041. doi: 10.1088/1757-899X/656/1/012041. (in English).

17. Lyakhov A. V. Opredelenie zavisimosti koeffitsienta energeticheskoi skrytnosti sistem sputnikovoi svyazi pri obnaruzhenii signalov ot vybora rabochei chastoty na osnove chislennykh metodov resheniia nelineinykh uravnenii [Determination of the dependence of the coefficient of energy secrecy of satellite communication systems upon detection of signals on the choice of operating frequency based on numerical methods for solving nonlinear equations]. *Modern science and innovations*, 2017, no. 1 (17), pp 42-49 (in Russian).

18. Lyakhov A. V., Pashintsev V. P., Belov A. D., Bessmertni M. Y. *Metodika otsenki veroiatnosti pravil'nogo obnaruzheniia signalov s raisovskimi zamiraniiami* [Methodology for estimating the probability of correct detection of signals with Rician fading]. *Radio and telecommunication systems*, 2012, no. 3 (7), p. 21-26 (in Russian).

19. Korzhik V. I., Fink L. M., Shchelkunov K. N. *Raschet pomekhoustoichivosti sistem peredachi diskretnykh soobshchenii: Spravochnik* [Calculation of noise immunity of discrete message transmission systems: a handbook]. Edited by Finn L. M. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1981. 232 p. (in Russian).

20. Kalitkin N. N., Al'shina E. A. *Chislennyye metody: v 2 kn. Kn. 1. Chislennyi analiz* [Numerical methods: in 2 volumes. Vol. 1. Numerical analysis]. Moscow, the Publishing center "Academy", 2013. 304 p. (in Russian).

21. Demidovich B. P., Maron I. A. *Osnovy vychislitel'noi matematiki* [Fundamentals of Computational Mathematics]. Moscow, Science Publ., The main editorial office of physical and mathematical literature, 1966. 664 p. (in Russian).

22. Chapra S. C. *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. Mcgraw Hill Book Co, Boston MA, 2006. 584 p. (in English).

23. Fihtengol'c G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia. V 3 t. T. I* [Differential and Integral Calculus Course. In 3 volumes. Vol. 1]. Intr. and notes by. Florinsky A. A., 8th ed. Moscow, FIZMATLIT, 2003. 680 p. (in Russian).

24. Fihtengol'c G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia. V 3 t. T. II* [Differential and Integral Calculus Course. In 3 volumes. Vol. 2]. Intr. and notes by Florinsky A. A., 8th ed. Moscow, FIZMATLIT, 2003. 864 p. (in Russian).

25. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki* [Higher Mathematics Course, Vol. 2]. Moscow, Science Publ., 1974. 479 p. (in Russian).

26. Chuchin E. V. Svoistva spetsial'nykh funktsii v modeliakh kachestva informatsionnykh sistem [Properties of Special Functions in Information Systems Quality Models]. *Auditorium: electronic scientific magazine of Kursk state university*,

2014, no. 1. Available at: <http://auditorium.kursksu.ru/pdf/001-013.pdf>. (accessed 15 January 2022) (in Russian).

Статья поступила 14 ноября 2022 г.

Информация об авторе

Ляхов Алексей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационная безопасность автоматизированных систем». Северо-Кавказский федеральный университет. Область научных интересов: влияние возмущений ионосферы на показатели качества систем спутниковой связи; математическое моделирование; численные методы и вычислительные эксперименты в MATLAB. E - mail: lyachov_st@mail.ru

Адрес: 355017, Россия, г. Ставрополь, ул. Пушкина, д. 1.

Increasing the energy secrecy of narrow-band signals of satellite communication systems during transionospheric propagation of radio waves through an inhomogeneous ionosphere due to a decrease in carrier frequencies and space-diversified reception

Part 1. Statement of the problem of increasing energy secrecy and its solution

A. V. Lyakhov

*The relevance is due to the fact that the solution of the problem of designing advanced satellite communication systems (SCS) should be based on an integrated approach, which involves taking into account all the parameters and restrictions that provide both the requirements for the efficiency of its operation, including the requirements for both noise immunity and its secrecy from means of radio and electronic intelligence (REI). A known method of increasing the energy secrecy of the SCS with a close placement of the radio detection receiver by lowering the carrier frequency and the use of space-diversified signal reception. As a quantitative criterion of the achieved level of energy secrecy of the SCS, such a generally recognized indicator as the coefficient of energy secrecy (ECS) of the SCS is used. However, the well-known method for determining the ECS is graphic-analytical. Therefore, it does not allow automating the process of determining this indicator using modern computer technology, which makes it difficult to solve the problem of designing promising SCS. In the first part of the article, the numerical methods of bisection, chords, Newton and the Newton-chord method, which are traditionally used to refine the root of a nonlinear equation with one unknown, were considered and adapted to determine the values of the energy signal-to-noise ratio (SNR) at the input of a satellite earth station receiver communication and at the input of the radio detection receiver of the RRTR means. Thus, the necessary prerequisites have been implemented for the implementation of the methodology for the automated assessment of CES SCS, which allows, even at the stage of pre-contract work, to determine the potential energy secrecy of the designed CCC, taking into account the capabilities of the party implementing the RRTR. **The aim of the work** is to analyze the possibility of increasing the energy secrecy of narrow-band signals of satellite communication systems with low carrier frequencies based on the development of a methodology that allows to reduce time costs and improve the accuracy of estimating the ECS of the SCS, by using numerical methods instead of graphical methods to refine the roots of nonlinear detection and noise immunity equations and their implementation in MATLAB. **Results and their novelty.** The developed methodology for evaluating the ECS of satellite communication systems differs from known in that it allows you to reduce the time for assessing this coefficient from hours to units of seconds and at the same time reduce the error of its assessment by at least three orders of magnitude. In addition, for the first*

time, original analytical expressions were obtained for calculating the first and second derivatives of the Marcum Q -function with respect to the signal-to-noise energy ratio parameter, which are necessary for the software implementation of the numerical Newton and Newton-chord methods for refining the roots of the nonlinear detection equation. **The practical significance** is that the developed methodology for evaluating the ECS of satellite communication systems will be useful to technical specialists to substantiate the source data necessary for calculations on clarifying the parameters of promising satellite communication systems, taking into account the simultaneous provision of requirements, both for the required noise resistance and in secretions connections. In addition, this technique may be of interest to scientists and applicants leading scientific research in the field of satellite communication.

Keywords: low-frequency satellite communication system, Rician fading, transionospheric propagation of radio waves, numerical method, energy secrecy coefficient, satellite communication system, Marcum Q -function.

Information about Author

Alexey Vladimirovich Lyakhov – Ph.D. of Engineering Sciences. Associate Professor at the Department of Information Security of Automated Systems. North Caucasus Federal University. Field of research: influence of ionospheric disturbances on the quality indicators of satellite communication systems; mathematical modeling; numerical methods and computational experiments in MATLAB. E-mail: lyachov_st@mail.ru

Address: Russia, 355017, Stavropol, ul. Pushkina, 1.