

УДК 621.372

Функциональное преобразование самоподобного трафика сетей связи на основе многомерной меры близости вероятностных параметров входного и выходного потоков

Линец Г. И., Воронкин Р. А., Говорова С. В.

Постановка задачи: проблема оценки производительности современных телекоммуникационных сетей состоит в отсутствии аналитических моделей, точно описывающих особенности самоподобного трафика. Наиболее развитыми с аналитической точки зрения оказались сети связи, использующие экспоненциальный закон распределения интервалов времени между пакетами входного потока пакетов. **Цель работы:** разработка метода функциональных преобразований, позволяющего минимизировать меру близости вероятностных распределений входного и выходного потока пакетов на основе использования аппарата теории множеств и методов многомерной оптимизации; определение обобщенной аналитической модели функциональных преобразований не зависящей от вероятностных законов распределений входного и выходного потока пакетов. **Используемые методы:** теория вероятностей, теория множеств, методы многомерной оптимизации, дифференциальные и интегральные исчисления, методы системного анализа, методы математического моделирования. **Новизна:** впервые в общем виде представлена аналитический метод функциональных преобразований входного самоподобного потока пакетов, позволяющая определять параметры выходного закона распределения пакетов узлов коммутации за счет использования минимального значения известной априори преметрики. В отличие от результатов, полученных ранее, для случая преобразования самоподобного входного потока пакетов в поток, имеющий экспоненциальный закон распределения, при равенстве их математических ожиданий, с использованием в качестве меры близости дивергенции Кульбака-Лейблера, представлено математическое обоснование, позволяющее получить аналитическое выражение интенсивности выходного потока пакетов. **Результат:** разработан метод функциональных преобразований самоподобного потока пакетов в выходной поток пакетов не имеющий самоподобных свойств; получено строгое математическое обоснование возможности функциональных преобразований самоподобного входного потока пакетов, позволяющее определять интенсивность выходного потока, имеющего экспоненциальный закон распределения без потерь. **Практическая значимость:** разработанные метод и обобщенная аналитическая модель позволяют повысить качество обслуживания в телекоммуникационных сетях связи.

Ключевые слова: самоподобный поток пакетов, оценка производительности, показатель Херста, функциональные преобразования, преметрика, дивергенция Кульбака-Лейблера, научно-методический аппарат, аналитическая модель, телекоммуникационные сети.

Актуальность исследований

При использовании в современных телекоммуникационных сетях связи различных механизмов управления возникают нелинейные зависимости, приводящие к появлению фрактальных свойств сетевой нагрузки [1]. Повышение

Библиографическая ссылка на статью:

Линец Г. И., Воронкин Р. А., Говорова С. В. Функциональное преобразование самоподобного трафика сетей связи на основе многомерной меры близости вероятностных параметров входного и выходного потоков // Системы управления, связи и безопасности. 2022. № 4. С. 38-63. DOI: 10.24412/2410-9916-2022-4-38-63

Reference for citation:

Linets G. I., Voronkin R. A., Govorova S. V. Functional transformation of the self-similar network teletraffic based on the multidimensional measure of similarity between probability parameters of input and output packet flows. Systems of Control, Communication and Security, 2022, no. 4, pp. 38-63 (in Russian). DOI: 10.24412/2410-9916-2022-3-38-63

производительности современных сетей связи является актуальной проблемой ввиду того, что вероятностные свойства потока пакетов описываются довольно сложными вероятностными законами распределения. Очевидно, что при проектировании современных сетей связи ставится задача оптимального распределения ограниченных сетевых ресурсов при удовлетворении требований к показателям качества информационного обмена. Наличие самоподобных свойств потока пакетов приводит к появлению долговременной зависимости, и, как следствие, к ухудшению качества обслуживания и снижению производительности сетей связи [1]. С целью снижения влияния самоподобных свойств потока пакетов на качество обслуживания пользователей разработаны следующие подходы, изложенные в работах [2-6]. Назаровым А.Н. и Сычевым К.И. предложен подход, обеспечивающий управление приоритетным трафиком в узловом оборудовании сетей следующего поколения [2]. Однако, данный подход не обеспечивает снижения влияния самоподобных свойств потока пакетов на качество обслуживания пользователей сети. В работе Millán G. [3] приведена модель управления потоками пакетов компьютерных сетей, учитывающая реальную пропускную способность каналов связи. Однако учета фрактальных свойств сетевого трафика данная модель не предполагает. Иванисенко И. [4] предлагает использовать методы балансировки нагрузки при обслуживании трафика с учетом его мультифрактальных свойств, однако обоснования снижения влияния самоподобных свойств на качество обслуживания и структурной оптимизации выходного потока пакетов, данные методы не предполагают. В работах Ушанева К.В., Макаренко С.И. [5] исследуются вопросы повышения устойчивости сети связи с учетом циркулирующего в ней трафика сложной структуры. Приведены модели функциональных преобразований входного потока пакетов, имеющие самоподобные свойства [5, 6]. Однако в них не приведено строгого математического обоснования меры близости вероятностных распределений входного и выходного потока пакетов, минимизация которой позволила бы при преобразовании получить выходной поток, не имеющий самоподобных свойств.

В работах Линца Г.И., Фомина Л.А., Скоробогатова С.А., Говоровой С.В. [7-11] разработаны: имитационная модель преобразования битового потока ячеек, имеющих плотность распределения длительности временных интервалов по закону Парето, в экспоненциальный закон; имитационная модель определения математического ожидания и дисперсии агрегированного битового потока ячеек, имеющих плотность распределения длительности временных интервалов по закону Вейбулла; способ снижения влияния самоподобности в сетевых структурах и устройство для его осуществления; устройство для преобразования трафика; способ формирования самоподобных импульсных последовательностей и устройство для его осуществления. Однако, эти работы используют эвристический подход на основе равенства математических ожиданий входного и выходного потоков пакетов, математического обоснования целесообразности использования данного подхода не приведено.

Проблема оценки производительности современных телекоммуникационных сетей состоит в недостаточной проработанности аналитических моделей, адекватно описывающих особенности обслуживания самоподобного потока па-

кетов. Наиболее развитыми с аналитической точки зрения оказались сети связи, использующие экспоненциальный закон распределений интервалов времени между пакетами. Для таких сетей имеется достаточно хорошо проработанный научно-методический аппарат (НМА), позволяющий исследовать вероятностно-временные характеристики экспоненциальных сетей. По этой причине преобразование любого известного входного потока пакетов в поток, имеющий экспоненциальный закон, позволит практически применять для выбора требуемых характеристик информационного обмена, хорошо изученный НМА синтеза экспоненциальных сетей теории массового обслуживания. Это позволит ослабить динамически возникающие перегрузки в каналах связи и повысить реальную производительность телекоммуникационных сетей.

В [11] приведен способ преобразования самоподобного входного потока пакетов в пуассоновский поток. В частном случае, при преобразовании потока пакетов, имеющего распределение Парето, в поток, имеющий экспоненциальное распределение, интервалы времени между пакетами выходного потока, определяются следующей формулой [11]:

$$\tau_2 = \frac{\alpha}{\lambda} \ln \frac{\tau_m}{\tau_1}, \quad (1)$$

где: α – коэффициент формы ($\alpha > 0$), τ_m – коэффициент масштаба ($\tau_m > 0$) распределения Парето, τ_1 и τ_2 – интервалы времени между пакетами во входном и выходном потоках. Однако в [11] отсутствует строгое математическое обоснование, каким должно быть значение интенсивности выходного потока λ . Кроме того, в [11] не разработан метод, обеспечивающий наилучшее приближение вероятностных распределений входного и выходного потоков пакетов.

Таким образом, целью статьи является:

1. Разработать обобщенный аналитический метод, позволяющую осуществлять преобразование входного самоподобного потока пакетов в поток пакетов не имеющих самоподобных свойств.
2. Исходя из важности использования экспоненциального закона распределения случайных величин для практического применения, строго обосновать и выбрать меру близости распределений входного (самоподобного) и выходного (имеющего экспоненциальный закон распределения) потоков пакетов.

Постановка задачи

Будем считать, что известны свойства входного самоподобного потока пакетов, имеющего распределение вероятностей величин интервалов между пакетами $f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ с параметрами $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, у которого корреляционная функция имеет вид [1, 11]:

$$R(k) = \frac{\sigma^2}{2} \left((k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right), \quad (2)$$

для любых $k \geq 1$.

Предположим, что показатель Херста входного потока известен $0,5 < H < 1$ и существует однозначная функциональная зависимость, позволяющая определить значения параметров $\theta_i(H)$.

Пусть $g(\tau; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ – распределение вероятностей величин интервалов между пакетами выходного потока не имеющего самоподобных свойств с параметрами $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$. В общем случае количество параметров распределения $f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ входного потока не совпадает с числом параметров распределения g выходного потока.

Будем считать, что распределения f и g принадлежат некоторому метрическому пространству (X, ρ) , где X – множество заданных законов распределений, причем $f \in X$ и $g \in X$, а ρ – некоторая метрика, определяющая близость вероятностных распределений входного и выходного потоков.

Согласно теории множеств, метрика $\rho(g, f)$ должна удовлетворять следующим условиям [12]:

- 1) $\rho(f, g) \geq 0$,
- 2) $\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f \equiv g$, (аксиома тождества),
- 3) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$, (аксиома симметрии),
- 4) $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$, где: $h \in X$ – некоторое распределение (аксиома треугольника).

Исходя из специфики предметной области, требования к метрике $\rho(g, f)$ можно ослабить, используя преметрику $\rho(g, f)$, включающую только условия 1 и 2.

Условием 3 можно пренебречь ввиду того, что функциональные преобразования самоподобного потока пакетов предполагается проводить только в одностороннем порядке. То есть, требуется преобразовать вероятностное распределение интервалов времени входного потока пакетов f в вероятностное распределение интервалов времени выходного потока пакетов g . Обратное преобразование по условию задачи не имеет смысла.

Ограничивающее требование 4 (аксиома треугольника) приведенной выше метрики, можно не учитывать ввиду того, что для проверки условия неравенства треугольника требуется определение нового отдельного класса функций $h \in X$, который при решении данной задачи изначально не задан.

Таким образом, для решения задачи целесообразно использовать преметрику $\rho(f, g)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\rho(f, g) \geq 0$,
- 2) $\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f \equiv g$ (аксиома тождества).

Требуется:

1. Разработать метод функциональных преобразований на основе использования многомерной оптимизации меры близости вероятностных распределений входного самоподобного и выходного потоков пакетов телекоммуникационных сетей связи.

2. Разработать обобщенную аналитическую модель, позволяющую осуществлять преобразование входного самоподобного потока пакетов в поток пакетов не имеющий самоподобных свойств и используемую для определения зависимости параметров $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ выходного распределения g от параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, иными словами:

$$\eta_j = \psi_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

при условии, что величина меры близости распределений $\rho(f, g)$ является минимальной

$$\rho(f, g) \rightarrow \min. \quad (4)$$

3. Для практической реализации обосновать метрику ρ , обеспечивающую получение аналитической зависимости между параметрами самоподобного закона распределения входного потока пакетов и интенсивностью λ выходного потока пакетов.

4. Математически обосновать и доказать правило функциональных преобразований в случае использования в качестве выходного потока экспоненциальный закон распределения.

При ограничениях:

1. Входной поток состоит из пакетов фиксированной длины L_0 , величина которой пренебрежимо мала по сравнению с интервалами времени между пакетами ($L_0 \ll \tau$).

2. Длительность интервала времени τ определяется временем формирования пакета в буфере.

3. Существует однозначная функциональная зависимость между значением показателя Херста H и одним или несколькими параметрами входного потока θ_i .

4. Величина $\rho(f, g)$ дифференцируема по $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ на всей области определения. Иными словами:

$$\forall \eta_j \left| \frac{\partial \rho(f, g)}{\partial \eta_j} \right| < \infty, \text{ где } j = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Решение задачи

Если $\rho(f, g)$ является непрерывной и дифференцируемой на всей области определения, необходимым условием экстремума функции многих переменных является тот факт, что в точке локального минимума градиент метрики $\rho(f, g)$ должен обращаться в нуль, т. е. $\nabla \rho(f, g) = 0$, что приводит к системе уравнений [13, 14]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(f, g)}{\partial \eta_1} = 0, \\ \frac{\partial \rho(f, g)}{\partial \eta_2} = 0, \\ \frac{\partial \rho(f, g)}{\partial \eta_m} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

В общем случае система уравнений (6) представляет систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$. Решив данную систему дифференциальных уравнений, определим требуемые зависимости

$$\eta_j = \psi_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), j = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Однако, не всякое полученное таким образом решение гарантирует нахождение минимума $\rho(f, g)$. Для любой непрерывно дифференцируемой функции, достаточным условием решения системы уравнений (8), приводящее к минимуму значение метрики $\rho(g, f)$, является положительная определенность матрицы Гессе [13, 14]:

$$G(\rho) = \rho''(f, g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_m} \\ \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_2 \partial \eta_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_m \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_m \partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_m^2} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Согласно критерию Сильвестра, для того, чтобы матрица Гессе была положительно определена, необходимо, чтобы все ее угловые миноры были положительными [13, 14]:

$$M_{i=k, j=k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_m} \\ \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_2 \partial \eta_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_m \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_m \partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f, g)}{\partial \eta_m^2} \end{vmatrix} > 0, k = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

Иными словами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1^2} > 0, \\ \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1^2} \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1^2} - \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} = \\ = \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1^2} \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1^2} - \left(\frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \right)^2 > 0, \\ \dots \end{array} \right. \quad (10)$$

Таким образом, метод функциональных преобразований на основе использования многомерной оптимизации меры близости вероятностных распределений входного самоподобного и выходного потоков пакетов телекоммуникационных сетей связи может быть представлен в виде следующей последовательности шагов:

1. Выбрать преметрику $\rho(f,g)$, удовлетворяющую условию дифференцируемости по $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ на всей области определения функции плотности распределения вероятности выходного потока $g(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$.

2. Для каждого $\eta_j, j = 1, 2, \dots, m$ найти частную производную

$$\frac{\partial \rho(f,g)}{\partial \eta_j}. \quad (11)$$

3. Решить систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho(f,g)}{\partial \eta_1} = 0, \\ \frac{\partial \rho(f,g)}{\partial \eta_2} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \rho(f,g)}{\partial \eta_m} = 0; \end{array} \right. \quad (12)$$

получив, таким образом, зависимости

$$\eta_j = \psi_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), j = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

определяющие связь между параметрами $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ вероятностной плотности распределения выходного потока g и параметрами $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ вероятностной плотности распределения входного самоподобного потока f .

Поскольку решения $\psi_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ не гарантируют наличия минимума преметрики $\rho(f,g)$, требуется дополнительная проверка с использованием критерия Сельвестра.

Для этого необходимо построить матрицу Гессе G преметрики $\rho(f,g)$:

$$G(\rho) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_m} \\ \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_2 \partial \eta_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_m \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_m \partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_m^2} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Для полученной матрицы Гессе необходимо найти ее угловые миноры:

$$M_{i=k,j=k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_1 \partial \eta_k} \\ \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_2 \partial \eta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_k \partial \eta_1} & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_k \partial \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \rho(f,g)}{\partial \eta_k^2} \end{vmatrix}, k = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

В случае $M_{i=k,j=k} > 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$, полученные решения $\psi_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ минимизируют выбранную преметрику $\rho(f, g)$, описывая, таким образом, оптимальный вариант функциональных преобразований входного самоподобного потока пакетов f в выходной поток пакетов g , не имеющего самоподобных свойств.

В общем случае решение такой задачи многомерной оптимизации не является тривиальным, и не всегда ее решение может быть получено в аналитическом виде. Для ее решения возможно использовать один из численных методов оптимизации, например, метод градиентного спуска [13, 14]. Однако в ряде случаев аналитическое решение все же может быть получено.

Рассмотрим преобразование входного самоподобного потока пакетов в поток, имеющий экспоненциальное распределение с интенсивностью λ . Определим преметрику $\rho(f, g(\tau; \lambda))$, обеспечивающую аналитическое решение поставленной задачи.

При исследовании близости вероятностных распределений случайных величин нашли применение достаточно большое количество вероятностных метрик, которые используются в задачах аппроксимации [15].

Известна метрика Колмагорова, определяющая расстояние между вероятностными распределениями, которая успешно применяется в задачах о количестве целых точек внутри многомерных эллипсоидов, а также при исследовании асимптотического поведения распределения квадратичных форм от сумм независимых случайных векторов [16]. Однако, ее нельзя использовать в данной задаче в силу того, что данная метрика предполагает тот факт, что функция восходящего характера распределения должна иметь треугольную характери-

стическую функцию $h(t) = (1 + |t|)_+$, что для данной задачи является неприемлемым условием.

Расстояние Леви между функциями распределения F и G определяется точной нижней гранью [16]

$$L(F, G) = \inf \{h \geq 0 : G(x - h) - h \leq F(x) \leq G(x + h) + h, \forall x \in R\}. \quad (16)$$

Однако, при преобразовании самоподобного потока пакетов, требовать выполнения данного выражения не представляется возможным ввиду того, что в [16] показана связь между метриками Колмогорова и Леви:

$$0 \leq L(F, G) \leq P(F, G) \leq 1, \quad (17)$$

которые должны иметь обратное неравенство [16]:

$$\rho(F, G) \leq (1 + L) L(F, G), \quad (18)$$

что для самоподобного потока пакетов является неприемлемым условием. Кроме того, Г. Боманом доказано существование точной верхней границы в предположении, что

$\hat{P}(t) = \frac{2(1 - \cos t)}{t^2}$ является характеристической функцией для

вероятностной треугольной плотности $p(t) = (1 + |t|)_+$, которая для исследуемого процесса таковой не является [17].

Метод Лапласа хорошо приближает распределение гауссианой в точке максимума, но плохо делает приближение в целом, если распределение сильно отличается от гауссианы. В частности, математические ожидания и дисперсии распределения и его приближения Лапласа могут сильно отличаться. Это приводит к сильным смещениям оценки обоснованности [18].

Известна метрика, определяющая расстояние вариации. Очевидно, что сглаженные распределения имеют, как правило, гладкие плотности. В [16] показано, что в силу интегрируемости функция имеет ограниченную вариацию и по этой причине пределы $a(-\infty), a(+\infty)$ существуют и конечны. Однако, при практическом применении данная метрика является чрезвычайно сложно реализуемой и требует значительных вычислительных ресурсов.

Известна метрика Леви-Прохорова $\rho(F, G)$ которую относят к метрикам, определяющим слабую сходимость вероятностных мер [19]. В.В. Юринским в [20] предложена оценка близости вероятностных распределений на R^k с использованием метрики Леви-Прохорова. В дальнейшем, в работах В.А. Абрамова [21] и Ю.А. Зайцева [22, 23] показана возможность использования данной метрики в случае, когда требования гладкости функций F и G были сняты. Однако, эта метрика не получила широкого распространения при решении практических задач в силу слабой сходимости вероятностных мер. Расстояние в метрике L^1 имеет существенные ограничения, и эту метрику обычно связывают с расстоянием Канторовича, когда производится оценка среднего расстояния в исследуемом пространстве. По этой причине использование данной метрики является нецелесообразным. Дальнейшее развитие использования данной метрики представлено в работах А.К.-А. Бёрлинга и К.Г. Эссена [24], которые сузили интервал интегрирования до $[-T, +T]$. Однако, применение метрики L^1 для рассматриваемой задачи является нецелесообразным ввиду того, что в ней

используется ограничивающее требование (аксиома треугольника), которое в данной задаче не используется.

Одной из часто используемых метрик является расстояние Кульбака-Лейблера, которую также называют относительной энтропией или величиной информационной расходимости [16]. Для абсолютно непрерывных вероятностных распределений F и G с плотностями p и q соответственно, расстояние между этими вероятностными распределениями определяется [16]:

$$D_{KL}(F \parallel G) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx. \quad (19)$$

В [16] показано, что в общем случае $0 \leq D_{KL}(F \parallel G) < \infty$, что для условия преобразования входного потока пакетов в требуемый закон распределения не противоречит физической реализуемости системы. Установлено, что этот функционал несимметричен, однако во многих задачах величина $D_{KL}(f \parallel g)$ служит удобной мерой близости G к F [25, 26]. Кроме того, в [16] показана связь $D_{KL}(F \parallel G)$ с классической энтропией. В ряде источников [16, 25, 26] энтропию называют мерой расстояния и делают вывод, что она подобна дисперсии. Дисперсия является адекватной мерой расстояния, поскольку для специальных распределений вероятностей случайных величин, в отличие от дисперсии энтропия не зависит от типа распределения и по этой причине является более предпочтительной характеристикой. Хотя $D_{KL}(f \parallel g)$ не является полноценной метрикой, так как $D_{KL}(f \parallel g) \neq D_{KL}(g \parallel f)$, тем не менее, она удовлетворяет свойствам метрики ρ , приведенной в постановочной части задачи, то есть:

- 1) $D_{KL}(f \parallel g) \geq 0$ (неравенство Гиббса);
- 2) $D_{KL}(f \parallel g) = 0 \Leftrightarrow f \equiv g$ (согласно определению).

Задача может быть также дополнительно упрощена, если в качестве выходного распределения используется экспоненциальное распределение с интенсивностью потока λ , иными словами $g(\tau; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) = g(\tau; \lambda)$. В этом случае $g(\tau; \lambda)$ определена на полуинтервале от 0 и до $+\infty$ и экспоненциальный характер функции упрощает вычисление логарифма в подынтегральном выражении при вычислении значения дивергенции Кульбака-Лейблера.

На основании принятых допущений может быть сформулирована следующая Лемма.

Лемма: Пусть $f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ кусочно-непрерывная функция, задающая распределение вероятностей величин интервалов между пакетами во входном самоподобном потоке с параметрами $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, вида:

$$f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \begin{cases} (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), & \tau \geq t, \\ 0, & \tau < t; \end{cases} \quad (20)$$

где: $t \geq 0$ – является некоторой пороговой величиной, а $(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) > 0$ – непрерывная функция на интервале $(t, +\infty)$.

Выходной поток $g(\tau; \lambda)$ описывает экспоненциальное распределение интервалов времени между пакетами с параметром $\lambda > 0$, значение которого равно интенсивности выходного потока. Иными словами

$$g(\tau; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \tau}, & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Предположим также, что параметры $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ входного потока не зависят от интенсивности выходного потока λ , причем $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ и λ также не зависят от τ . Для всех значений $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ из области определения величина математического ожидания $E(f) < \infty$ и $E(f) \neq 0$.

Требуется доказать, что величина дивергенции Кульбака-Лейблера будет минимальной в случае равенства математических ожиданий распределений f и g .

Доказательство: Согласно свойства функции плотности распределения, для входного потока, получим [1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\tau = \int_t^{+\infty} (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\tau = 1. \quad (22)$$

Также величина математического ожидания интервалов времени между пакетами входного потока может быть получена из выражения:

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\tau = \int_t^{+\infty} \tau (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\tau = \\ &= E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \end{aligned} \quad (23)$$

где: $E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ – некоторая функция, зависящая от параметров входного потока $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

Величина дивергенции Кульбака-Лейблера может быть получена из соотношения:

$$\begin{aligned} D_{KL}(f \parallel g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \frac{\log f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{g(\tau; \lambda)} d\tau = \\ &= H(f, g) - H(f), \end{aligned} \quad (24)$$

где: $H(f)$ – дифференциальная энтропия входного распределения $f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, а $H(f, g)$ – перекрестная энтропия (кроссэнтропия) распределений $f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ и $g(\tau; \lambda)$.

Определим отдельно выражения для дифференциальной энтропии $H(f)$ и кроссэнтропии $H(f, g)$. Для простоты условимся, что энтропия и кроссэнтропия измеряются в натах.

Величина дифференциальной энтропии для входного потока определяется из соотношения:

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \ln[f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)] d\tau =$$

$$= - \int_t^{+\infty} (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \ln [(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)] d\tau = H(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad (25)$$

где: $H(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ – некоторая функция, зависящая от параметров входного потока $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

Тогда величину перекрестной энтропии $H(f, g)$ получим из соотношения:

$$\begin{aligned} H(f, g) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \ln [g(\tau; \lambda)] d\tau = \\ &= - \int_{\max\{t, 0\}}^{+\infty} (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \ln [\lambda e^{-\lambda \tau}] d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку $t \geq 0$, $\max\{t, 0\} = t$. Воспользовавшись свойствами логарифмов $\ln [\lambda e^{-\lambda \tau}] = \ln \lambda + \ln [e^{-\lambda \tau}] = \ln \lambda - \lambda \tau$, получим

$$\begin{aligned} H(f, g) &= - \int_t^{+\infty} (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) (\ln \lambda - \lambda \tau) d\tau = \\ &= \lambda \int_t^{+\infty} \tau (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\tau - \ln \lambda \int_t^{+\infty} (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Ранее было показано, что

$$\int_t^{+\infty} (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\tau = 1, \quad (28)$$

тогда как

$$\int_t^{+\infty} \tau (\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\tau = E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \quad (29)$$

Следовательно, величина кроссэнтропии равна

$$H(f, g) = \lambda E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) - \ln \lambda. \quad (30)$$

Таким образом, значение дивергенции Кульбака-Лейблера может быть получено из соотношения:

$$D_{KL}(f \parallel g) = \lambda E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) - \ln \lambda - H(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \quad (31)$$

Продифференцировав $D_{KL}(f \parallel g)$ по λ , найдем

$$\begin{aligned} \frac{D_{KL}(f \parallel g)}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} [\lambda E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)] - \frac{d}{d\lambda} \ln \lambda - \frac{d}{d\lambda} H(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \\ &= E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) + \lambda \frac{d}{d\lambda} E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) - \frac{1}{\lambda} - \frac{d}{d\lambda} H(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ не зависят от λ , получим

$$\begin{cases} \frac{d}{d\lambda} E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0, \\ \frac{d}{d\lambda} H(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Таким образом,

$$\frac{dD_{KL}(f \parallel g)}{d\lambda} = E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) - \frac{1}{\lambda}. \quad (34)$$

Приравняв правую часть (34) к нулю, получим:

$$E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) - \frac{1}{\lambda} = 0, \quad (35)$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda} = E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \quad (36)$$

Поскольку математическое ожидание экспоненциального распределения

$$E(g) = \frac{1}{\lambda}, \quad (37)$$

то

$$E(g) = E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (38)$$

или

$$E(g) = E(f). \quad (39)$$

Иными словами, величина $D_{KL}(f \parallel g)$ достигает экстремального значения при равенстве математических ожиданий распределений входного f и выходного g потоков, что является необходимым условием.

Для определения и проверки достаточного условия экстремума $D_{KL}(f \parallel g)$ найдем вторую производную дивергенции Кульбака-Лейблера по λ :

$$\frac{d^2 D_{KL}(f \parallel g)}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda} \left[E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) - \frac{1}{\lambda} \right] = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (40)$$

Поскольку в точке экстремума

$$\frac{1}{\lambda} = E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad (41)$$

величина второй производной в этой точке определяется выражением

$$\frac{d^2 D_{KL}(f \parallel g)}{d\lambda^2} = [E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]^2. \quad (42)$$

Следовательно, если $E(f) = E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \neq 0$, тогда

$$\frac{d^2 D_{KL}(f \parallel g)}{d\lambda^2} > 0. \quad (43)$$

Таким образом, при равенстве математических ожиданий распределений $f(\tau; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ и $g(\tau; \lambda)$ величина дивергенции Кульбака-Лейблера является минимальной. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим применение доказанной леммы для частных случаев.

Случай 1. Рассмотрим функциональное преобразование самоподобного потока имеющего распределение Парето в поток, обладающий экспоненциальным распределением. Распределение Парето является двухпараметрическим распределением, плотность которого определяется по формуле [1, 11]:

$$f(\tau) = \begin{cases} \frac{\alpha \tau_m^\alpha}{\tau^{\alpha+1}}, & \tau \geq \tau_m, \\ 0, & \tau < \tau_m; \end{cases} \quad (44)$$

параметрами которого являются коэффициент формы α и коэффициент масштаба τ_m .

Очевидно, что данное распределение удовлетворяет условиям доказанной леммы: $f(\tau)$ – определяется кусочно-непрерывной функцией, для которой величина $t = \tau_m$ и $f(\tau) = \frac{\alpha \tau_m^\alpha}{\tau^{\alpha+1}}$.

Необходимо найти такую функциональную зависимость $\lambda = \psi(\alpha, \tau_m)$, которая приводила бы к минимизации $D_{KL}(f \| g)$.

Используя формулу (24) определим дивергенцию Кульбака-Лейблера:

$$D_{KL}(f \| g) = H(f, g) - H(f), \quad (45)$$

где: $H(f)$ – дифференциальная энтропия закона распределения Парето; $H(f, g)$ – перекрестная энтропия закона распределения Парето и экспоненциального закона распределения.

Для распределения Парето энтропия $f(\tau)$ может быть получена следующим образом:

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \log f(\tau) d\tau. \quad (46)$$

Основание логарифма определяет используемую единицу измерения, для простоты положим, что $H(f)$ и $H(f, g)$ измеряются в натах.

Тогда значение дифференциальной энтропии для распределения Парето:

$$H(f) = - \int_{\tau_m}^{+\infty} \frac{\alpha \tau_m^\alpha}{\tau^{\alpha+1}} \frac{\ln(\alpha \tau_m^\alpha)}{\tau^{\alpha+1}} d\tau = \frac{\ln \tau_m}{\alpha} + \frac{\alpha + 1}{\alpha}. \quad (47)$$

Кроссэнтропию между $f(\tau)$ и $g(\tau)$ получим, используя:

$$H(f, g) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \log g(\tau) d\tau. \quad (48)$$

С учетом принятых допущений, имеем:

$$H(f, g) = - \int_{\tau_m}^{+\infty} \frac{\alpha \tau_m^\alpha}{\tau^{\alpha+1}} \ln(\lambda e^{-\lambda \tau}) d\tau = \frac{\alpha \lambda \tau_m}{\alpha - 1} - \ln \lambda. \quad (49)$$

Таким образом, величина дивергенции Кульбака-Лейблера между $f(\tau)$ и $g(\tau)$ может быть получена из выражения:

$$D_{KL}(f \parallel g) = \frac{\alpha \lambda \tau_m}{\alpha - 1} - \ln \lambda - \frac{\ln \tau_m}{\alpha} - \frac{\alpha + 1}{\alpha}. \quad (50)$$

Преобразование из $f(\tau_1)$ в $g(\tau_2)$ должно обеспечивать минимальное значение $D_{KL}(f \parallel g)$ как меры близости f и g . Продифференцируем $D_{KL}(f \parallel g)$ по λ и приравнявая полученное значение к нулю, имеем:

$$\frac{dD_{KL}(f \parallel g)}{d\lambda} = \frac{\alpha \tau_m}{\alpha - 1} - \frac{1}{\lambda} = 0, \quad (51)$$

откуда

$$\lambda = \frac{\alpha - 1}{\alpha \tau_m}. \quad (52)$$

Полученный результат (52) совпадает с тем, что был получен в [2], однако здесь он имеет аналитическое обоснование. Поэтому можно утверждать, что выполнение функционального преобразования $f(\tau_1)$, имеющего распределение Парето, в $g(\tau_2)$, имеющего экспоненциальное распределение, является наилучшим по критерию минимального значения дивергенции Кульбака-Лейблера $D_{KL}(f \parallel g)$, если математические ожидания f и g совпадают. Этот результат демонстрирует истинность доказанного в лемме утверждения.

Случай 2. Для распределения Парето величина временных интервалов между пакетами $\tau > \tau_m$. Для экспоненциального распределения величина временных интервалов между пакетами $\tau > 0$.

В случае, когда величина временных интервалов между пакетами τ_m достаточно велика, при $\tau_m \rightarrow \infty$, в результате функционального преобразования вероятность $P(\tau \leq \tau_m) \rightarrow 1$.

Если требуется выполнение условия $\tau > \tau_m$ для выходной последовательности пакетов, тогда модифицированный вариант экспоненциального распределения определяется формулой [27]:

$$\hat{g}(\tau, \tau_m) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(\tau - \tau_m)}, & \tau \geq \tau_m, \\ 0, & \tau < \tau_m. \end{cases} \quad (53)$$

Кроссэнтропия $f(x)$ и $\hat{g}(\tau, \tau_m)$ может быть получена, как и в предыдущем случае, с помощью несобственного интеграла:

$$H(f, \hat{g}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \log \hat{g}(\tau, \tau_m) d\tau, \quad (54)$$

или с учетом принятых допущений:

$$H(f, \hat{g}) = - \int_{\tau_m}^{+\infty} \frac{\alpha \tau_m^\alpha}{\tau^{\alpha+1}} \ln \left[\lambda e^{-\lambda(\tau - \tau_m)} \right] d\tau = \frac{\lambda \tau_m}{\alpha - 1} - \ln \lambda. \quad (55)$$

Величина дивергенции Кульбака-Лейблера между $f(\tau)$ и $\hat{g}(\tau, \tau_m)$ равна:

$$D_{KL}(f \parallel \hat{g}) = \frac{\lambda \tau_m}{\alpha - 1} - \ln \lambda - \frac{\ln \tau_m}{\alpha} - \frac{\alpha + 1}{\alpha}. \quad (56)$$

Продифференцировав $D_{KL}(f \parallel \hat{g})$ по λ и приравняв полученное значение к нулю, найдем значение λ , при которой величина дивергенции Кульбака-Лейблера является минимальной:

$$\frac{dD_{KL}(f \parallel \hat{g})}{d\lambda} = \frac{\tau_m}{\alpha - 1} - \frac{1}{\lambda} = 0, \quad (57)$$

откуда

$$\lambda = \frac{\alpha - 1}{\tau_m}. \quad (58)$$

Определим условие, при котором достигается минимальное значение $D_{KL}(f \parallel \hat{g})$. Математическое ожидание для модифицированного экспоненциального распределения равно:

$$E[g] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau g(\tau, \tau_m) d\tau = \int_{\tau_m}^{+\infty} \tau \lambda e^{-\lambda(\tau - \tau_m)} d\tau = \tau_m + \frac{1}{\lambda}. \quad (59)$$

Результат ожидаем, поскольку модифицированное экспоненциальное распределение получается путём сдвига вдоль оси абсцисс обычного экспоненциального распределения на величину τ_m , и, поскольку математическое ожидание для обычного экспоненциального распределения равно $\frac{1}{\lambda}$, математическое ожидание модифицированного экспоненциального распределения равно $\tau_m + \frac{1}{\lambda}$.

Приравнявая математическое ожидание $E[\hat{g}]$ к математическому ожиданию для распределения Парето

$$E[f] = \frac{\alpha \tau_m}{\alpha - 1}, \quad (60)$$

получим

$$\tau_m + \frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha \tau_m}{\alpha - 1}. \quad (61)$$

Откуда

$$\lambda = \frac{\alpha - 1}{\tau_m}. \quad (62)$$

Таким образом, даже при использовании модифицированного экспоненциального распределения, минимальное значение дивергенции Кульбака-Лейблера достигается при равенстве математических ожиданий интервалов времени между пакетами, распределенных по закону Парето на входе и интервалов времени между пакетами, распределенных по модифицированному экспоненциальному закону на выходе устройства, осуществляющего функциональное преобразование.

Случай 3. Рассмотрим функциональное преобразование самоподобного потока пакетов, имеющего распределение Вейбулла в поток, имеющий экспоненциальное распределение.

Распределение Вейбулла является двухпараметрическим распределением, плотность которого описывается формулой [1, 11]:

$$f(\tau) = \begin{cases} \frac{\alpha}{s} \left(\frac{\tau}{s}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{\tau}{s}\right)^\alpha\right], & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (63)$$

параметрами которого являются коэффициент формы α и коэффициент масштаба s .

Очевидно, данное распределение удовлетворяет условиям доказанной леммы: $f(\tau)$ – определяется кусочно-непрерывной функцией, для которой ве-

личина $t = 0$ и $(\tau) = \frac{\alpha}{s} \left(\frac{\tau}{s}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{\tau}{s}\right)^\alpha\right]$.

Необходимо найти такую функциональную зависимость $\lambda = \psi(\alpha, s)$, которая приводила бы к минимуму некоторой меры близости $\rho(f, g)$ распределений g и f , где: $g(\tau)$ – распределение интервалов времени выходного потока пакетов.

Ранее было показано, что величина дивергенции Кульбака-Лейблера определяется:

$$D_{KL}(f \parallel g) = H(f, g) - H(f), \quad (64)$$

где: $H(f)$ – дифференциальная энтропия распределения Вейбулла; $H(f, g)$ – перекрестная энтропия законов распределения Вейбулла и экспоненциального распределения.

Для распределения Вейбулла энтропия $f(\tau)$ может быть получена следующим образом:

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \log f(\tau) d\tau. \quad (65)$$

Значение дифференциальной энтропии для распределения Вейбулла определяется [1, 11]:

$$\begin{aligned} H(f) &= - \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{s} \left(\frac{\tau}{s}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{\tau}{s}\right)^\alpha\right] \ln \left[\frac{\alpha}{s} \left(\frac{\tau}{s}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{\tau}{s}\right)^\alpha\right] \right] d\tau = \\ &= H(\alpha, s). \end{aligned} \quad (66)$$

Определим кроссэнтропию между $f(\tau)$ и $g(\tau)$ с использованием формулы:

$$H(f, g) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \log g(\tau) d\tau. \quad (67)$$

Тогда, с учетом принятых допущений, имеем:

$$H(f, g) = - \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{s} \left(\frac{\tau}{s} \right)^{\alpha-1} \exp \left[- \left(\frac{\tau}{s} \right)^{\alpha} \right] \ln(\lambda e^{-\lambda \tau}) d\tau = \lambda s \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) - \ln \lambda, \quad (68)$$

где: $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (69)$$

Таким образом, величина дивергенции Кульбака-Лейблера между $f(\tau)$ и $g(\tau)$ равна:

$$D_{KL}(f \parallel g) = \lambda s \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) - \ln \lambda - H(\alpha, s). \quad (70)$$

Найдем производную дивергенции Кульбака-Лейблера по параметру выходного потока λ :

$$\frac{dD_{KL}(f \parallel g)}{d\lambda} = s \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\lambda}. \quad (71)$$

Поскольку величина энтропии $H(\alpha, s)$ не зависит от λ , получим

$$\frac{dH(\alpha, s)}{d\lambda} = 0. \quad (72)$$

Приравнявая к нулю значение производной, и решив уравнение (72) относительно λ , определим:

$$\lambda = \frac{1}{s \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)}. \quad (73)$$

Полученный результат совпадает с результатом, который приведен в [11], однако здесь он имеет аналитическое обоснование. Поэтому можно утверждать, что выполнение функционального преобразования $f(\tau_1)$, имеющего распределение Вейбулла в $g(\tau_2)$, имеющего экспоненциальное распределение, является наилучшим с позиции минимального значения дивергенции Кульбака-Лейблера $D_{KL}(f \parallel g)$ при равенстве математических ожиданий потоков f и g .

Выводы

Подводя итоги проведенным исследованиям можно сделать выводы об основных полученных результатах:

1. Разработан метод функциональных преобразований на основе использования многомерной оптимизации меры близости вероятностных распределений входного и выходного потока пакетов, который отличается от известных использованием в качестве критерия преметрики, удовлетворяющей условиям $\rho(f, g) \geq 0$, $\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f \equiv g$ (аксиома тождества). Полученные решения минимизируют выбранную преметрику и определяют оптимальный вариант функциональных преобразований входного самоподобного потока пакетов в выходной поток пакетов, не имеющий самоподобных свойств.

2. Разработана обобщенная аналитическая модель (формулы 6-10), осуществляющая преобразование входного самоподобного потока пакетов в поток пакетов, не имеющий самоподобных свойств, в которой минимизируется величина меры близости распределений, то есть $\rho(f, g) \rightarrow \min$.

3. Показано, что необходимым условием экстремума функции многих переменных в точке локального минимума является обращение в нуль градиента премерики $\nabla \rho(f, g)$. Достаточным условием получения локального минимума является положительная определенность матрицы Гессе и удовлетворение требования положительных значений угловых миноров матрицы, составленной на основе критерия Сельвестра.

4. Для преобразований входного самоподобного потока в поток пакетов, имеющий экспоненциальное распределение с интенсивностью потока λ , в качестве премерики использовано расстояние Кульбака-Лейблера (которое также называется относительной энтропией или величиной информационной расходимости). Установлено, что для непрерывных вероятностных распределений F и G с плотностями $f(\tau)$ и $g(\tau)$ соответственно, преобразование входного потока пакетов в экспоненциальный закон распределения не противоречит физической реализуемости системы преобразований.

5. Доказана лемма о том, что величина дивергенции Кульбака-Лейблера является минимальной при равенстве математических ожиданий распределений самоподобного входного и выходного потока пакетов, имеющего экспоненциальное распределение.

6. Получено аналитическое выражение дивергенции Кульбака-Лейблера (формула 31), входного и выходного потоков пакетов, на основе использования дифференциальной (формула 25) и перекрестной (формула 27) энтропии, определяющих меру удаленности исследуемых распределений.

7. Представлено использование леммы для функциональных преобразований самоподобного потока пакетов с распределениями Парето и Вейбулла в поток, имеющий экспоненциальное распределение.

Таким образом, научная новизна данных исследований заключается в том, что в отличие от результатов, полученных эмпирическим путем в работах [7-11], впервые в общем виде представлена аналитическая модель функциональных преобразований входного самоподобного потока пакетов, позволяющая определять параметры выходного потока пакетов узлов коммутации на основе использования минимального значения известной априори премерики. Представлено математическое обоснование, позволяющее получить аналитическое выражение интенсивности выходного потока пакетов для случая преобразования самоподобного входного потока пакетов в поток, имеющий экспоненциальный закон распределения при равенстве их математических ожиданий, когда в качестве меры близости потоков используется дивергенция Кульбака-Лейблера.

Практическая значимость полученных результатов определяется возможностью использования данного метода для снижения влияния пиковых нагрузок на производительность и качество обслуживания пользователей телеком-

муникационных сетей при обслуживании трафика, имеющего самоподобные и фрактальные свойства.

Теоретическая общность данного метода состоит в том, что полученная аналитическая модель позволяет осуществлять преобразование любого закона распределения входного самоподобного потока пакетов в экспоненциальный закон и на этой основе обеспечить повышение эффективности функционирования телекоммуникационных сетей.

Литература

1. Шелухин О. И., Тенякшев А. М., Осин А. В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях / под ред. О.И. Шелухина. – М.: Радиотехника, 2003. – 479 с.
2. Назаров А. Н., Сычев К. И. Модели и методы расчета показателей качества функционирования узлового оборудования и структурно-сетевых параметров сетей связи следующего поколения. – Красноярск: Поликом, 2010. – 389 с.
3. Millán G., Lefranc G., Osorio-Comparán R. The Associative Multifractal Process: A Novel Model for Computer Network Traffic Flows // Computing Research Repository, 2021. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.14666> (дата обращения 20.06.2022).
4. Иванисенко И., Кириченко Л., Радивилова Т. Методы балансировки с учетом мультифрактальных свойств нагрузки // Information Content and Processing. 2015. Т. 2. № 4. С. 345-367.
5. Ушанев К. В., Макаренко С. И. Аналитико-имитационная модель функционального преобразования трафика сложной структуры // Системы управления, связи и безопасности. 2015. № 2. С. 26-44.
6. Ушанев К. В., Макаренко С. И. Преобразование структуры трафика с учетом требований по качеству его обслуживания // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2015. № 2. С. 74-84.
7. Линец Г. И., Петросян А. С., Дарбинян Е. Б. Имитационная модель преобразования битового потока ячеек, имеющих плотность распределения длительности временных интервалов по закону Парето, в экспоненциальный закон // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009611331. 2009.
8. Фомин Л. А., Жук А. П., Линец Г. И., Калашников С. В. Способ формирования самоподобных импульсных последовательностей и устройство для его осуществления // Патент на изобретение RU 2322756 C1, опубл. 20.04.2008, бюл. № 11. – URL: <http://allpatents.ru/patent/2322756.html> (дата обращения 20.06.2022).
9. Линец Г. И., Петросян А. С. Имитационная модель определения математического ожидания и дисперсии агрегированного битового потока ячеек, имеющих плотность распределения длительности временных интервалов по закону Вейбулла // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008615649. 2008.

10. Линец Г. И., Фомин Л. А., Говорова С. В. Устройство для преобразования трафика // Патент RU 2591649 C1, опубл. 20.07.2016, бюл. № 20. – URL: https://yandex.ru/patents/doc/RU2591649C1_20160720 (дата обращения 20.06.2022).
11. Линец Г. И. Методы структурно-параметрического синтеза, идентификации и управления транспортными телекоммуникационными сетями для достижения максимальной производительности: Монография. Ставрополь: ИИЦ «Фабула», 2014. 383 с.
12. Хаусдорф Ф. Теория множеств – М.: Книга по Требованию, 2021. – 305 с.
13. Кононюк А. Е. Основы теории оптимизации. Безусловная оптимизация. – Киев: Освіта України, 2011. – 544 с.
14. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 823 с.
15. Воронов М. В., Пименов В. И., Суздалов Е. Г. Прикладная математика: технологии применения: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям. – М.: Юрайт, 2019. – 381 с.
16. Бобков С. Г. Близость вероятностных распределений в терминах преобразований Фурье-Стилтьеса // Успехи математических наук. 2016. Т. 71. № 6 (432). С. 37-98. – URL: <https://doi.org/10.4213/rm9749>. (дата обращения 20.06.2022).
17. Bohman H. Approximate Fourier analysis of distribution functions // Arkiv for matematik. 1961. Vol. 4. no. 2. pp. 99-157.
18. Ветров Д. П., Кропотов Д. А. Байесовские методы машинного обучения: учебное пособие. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007. – 127 с.
19. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1967. – 495 с.
20. Юринский В. В. Неравенство сглаживания для оценок расстояния Леви-Прохорова // Теория вероятностей и ее применение. 1975. С. 3-12. – URL: <http://mi.mathnet.ru/tvp2971> (дата обращения 20.06.2022).
21. Абрамов В. А. Оценка расстояния Леви-Прохорова // Теория вероятностей и ее применение. 1976. Т. 21. С. 406-410. – URL: <http://mi.mathnet.ru/tvp3369> (дата обращения 01.07.2022).
22. Зайцев А. Ю. О логарифмическом множителе в неравенствах сглаживания для расстояний Леви и Леви-Прохорова // Теория вероятности и ее применение. 1986. С. 782-784. – URL: <http://mi.mathnet.ru/tvp1686> (дата обращения 01.07.2022).
23. Зайцев А. Ю. Оценки расстояния Леви-Прохорова в терминах характеристических функций и некоторые их применения // Записки научных семинаров ленинградского отделения математического института. 1982. Т. 119. С. 108-127.
24. Esseen C.-G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law // Acta Mathematica. 1945. Vol. 77. 125 p. doi: 10.1007/BF02392223.

25. Кононюк А. Е. Информациология. Общая теория информации. Книга 3. – Киев: Освіта України, 2011. – 412 с.
26. Дулесов А. С., Хрусталева В. И. Определение энтропии как меры информации при сопоставлении прогнозных и фактических показателей предприятия // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 1. С. 151-161.
27. Grimmett G., Stirzaker D. Probability and Random Processes: Fourth Edition. Oxford University Press, 2020. 688 p.

References

1. Shelukhin O. I., Tenyakshev A. M., Osin A. V. *Fraktalnie processy v telekommunikatsiyah* [Fractal Processes in Telecommunications]. Moscow, Radio engineering, 2003. 479 p. (in Russian).
2. Nazarov A. N., Sychev K. I. *Modeli i metody rascheta pokazatelej kachestva funkcionirovaniya uzlovogo oborudovaniya i strukturno-setevykh parametrov setej svyazi sledujushhego pokoleniya* [The Models and the Methods of Measuring of Quality Indicators of Nodal Equipment Functioning and Network Structural Parameters of Next Generation Networks]. Krasnoyarsk, Polykom Publ., 2010. 389 p. (in Russian).
3. Millán G., Lefranc G., Osorio-Comparán R. The Associative Multifractal Process: A Novel Model for Computer Network Traffic Flows. Computing Research Repository, 2021. Available at: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.14666> (accessed 20 June 2022).
4. Ivanisenko I., Kirichenko L., Radivilova T. Metody balansirovki s uchetom mul'tifraktal'nykh svoystv nagruzki [Balancing Methods Taking into ACCOUNT the Multifractal Properties of the Load]. *Information Content and Processing*, 2015, vol. 2, no. 4, pp. 345-367 (in Russian).
5. Ushanev K. V., Makarenko S. I. Analytical-Simulation Model of Functional Conversion of Complex Traffic. *Control Systems, Communications and Security*, 2015, no. 2, pp 26-44 (in Russian).
6. Ushanev K. V., Makarenko S. I. Traffic structure conversion with requirements for the traffic service quality. *Radio and telecommunication systems*, 2015, no. 2, pp. 74-84 (in Russian).
7. Linets G. I., Petrosyan A. S., Darbinyan E. B. Imitacionnaya model preobrazovaniya bitovogo potoka yacheek imeyushchih plotnost raspredeleniya dlitelnosti vremennih intervalov po zakonu Pareto v eksponencialnii zakon. [A Simulation Model for Converting a Bit Stream of Cells with a Distribution Density of the Duration of Time Intervals According to the Pareto Law into an Exponential Law]. The Certificate on Official Registration of the Computer Program in Russia. No. 2009611331, 2009.
8. Fomin L. A., Zhuk A. P., Linets G. I., Kalashnikov S. V. *Sposob formirovaniya samopodobnih impulsnykh posledovatel'nostey i ustroystvo dlya ego osuschestvleniya* [A Method for Generating Self-Similar Pulse Sequences and a Device for Its Implementation]. Patent Russia, no. 2322756, 2006.

9. Linets G. I., Petrosyan A. S. *Imitacionnaya model opredeleniya matematicheskogo ojidaniya i dispersii agregirovannogo bitovogo potoka yacheek imeyuschiy plotnost raspredeleniya dlitelnosti vremennih intervalov po zakonu Veibulla* [Simulation Model for Determining the Mathematical Expectation and Variance of the Aggregated Bit Stream of Cells with a Distribution Density of the Duration of Time Intervals According to the Weibull Law]. Certificate of Official Registration of the Computer Program in Russia. No. 2008615649, 2008.
10. Linets G.I., Fomin L.A., Govorova S.V. *Ustroistvo dlya preobrazovaniya trafika* [A Device for Converting Traffic]. Patent Russia. No. 2591649, 2016.
11. Linets G. I. *Metodi strukturno parametricheskogo sinteza identifikatsii i upravleniya transportnimi telekommunikatsionnymi setyami dlya dostizheniya maksimalnoi proizvoditelnosti. Monografiya* [Methods of Structural-Parametric Synthesis, Identification and Control of Transport Telecommunication Networks to Achieve Maximum Performance. Monography]. Stavropol, IIC Fabula Publ., 2014. 383 p. (in Russian)
12. Hausdorff F. *Teoriya mnojestv* [Set Theory]. Moscow, Book on Demand, 2021. 305 p. (in Russian).
13. Kononyuk A. E. *Osnovi teorii optimizatsii. Bezuslovnaya optimizatsiya* [Fundamentals of Optimization Theory. Unconditional Optimization]. Kyiv, Osvita Ukrainy, 2011. 544 p. (in Ukrainian).
14. Vasiliev F. P. *Metodi optimizatsii* [Optimization Methods]. Moscow, Factorial Press, 2002. 823 p. (in Russian)
15. Voronov M. V., Pimenov V. I., Suzdalov E. G. *Prikladnaya matematika tekhnologii primeneniya uchebnoe posobie dlya studentov visshih uchebnykh zavedenii obuchayuschihsya po estestvennonauchnim napravleniyam* [Applied Mathematics: Technologies of Application: Textbook for Students of Higher Educational Institutions Studying in the Natural Sciences]. Moscow, Yuray Publ.t, 2019. 381 p. (in Russian)
16. Bobkov S. G. Blizost' veroiatnostnykh raspredelenii v terminakh preobrazovaniy Fur'e-Stil'tesa [Proximity of Probability Distributions in Terms of Fourier–Stieltjes Transforms]. *Advances in Mathematical Sciences*, 2016, vol. 71, no. 6 (432), pp. 37-98. Available at: <https://doi.org/10.4213/rm9749> (accessed 20 June 2022) (in Russian).
17. Bohman H. Approximate Fourier analysis of distribution functions. *Arkiv for Matematik*, 1961, vol. 4, no. 2, pp. 99-157.
18. Vetrov D. P., Kropotov D. A. *Baiesovskie metodi mashinnogo obucheniya uchebnoe posobie* [Bayesian Methods of Machine Learning: Textbook]. Moscow, Moscow State University M. V. Lomonosov, 2007. 127 p. (in Russian)
19. Prokhorov Yu. V., Rozanov Yu. A. *Teoriya veroyatnostei Osnovnye ponyatiya. Predelnye teoremi. Sluchainie processy* [Probability Theory: Basic Concepts. Limit Theorems. Random Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 495 p. (in Russian)
20. Yurinskii V. V. Neravenstvo sglazhivaniia dlia otsenok rasstoianiia Levi-Prokhorova [A Smoothing Inequality for Estimates of the L'Ev'y–Prokhorov Distance]. *Teoriya veroiatnostei i ee primenenie* [Probability Theory and Its

Application], 1975, vol. 20, no. 1, pp. 3-12. Available at: <http://mi.mathnet.ru/tvp2971> (accessed 20 June 2022) (in Russian)

21. Abramov V. A. Otsenka rasstoianii Levi-Prokhorova [Estimates for the L'evy-Prokhorov distance]. *Teoriia veroiatnostei i ee primeneniye* [Probability Theory and Its Application], 1976, vol. 21, no. 2, pp. 396-400. Available at: <http://mi.mathnet.ru/tvp3369> (accessed 01 June 2022) (in Russian)

22. Zaitsev A. Yu. O logarifmicheskom mnozhitel' v neravenstvakh sglazhivaniia dlia rasstoianii Levi i Levi-Prokhorova [On the logarithmic factor in smoothing inequalities for L'evi and L'evi-Prokhorov distances]. *Teoriia veroiatnostei i ee primeneniye* [Probability Theory and Its Application], 1986, vol. 31, no. 4, pp. 691-693. Available at: <http://mi.mathnet.ru/tvp1686> (accessed 01 June 2022) (in Russian)

23. Zaitsev A. Yu. Ocenki rasstoyaniya Levi-Prokhorova v terminah harakteristicheskikh funktsii i nekotorye ih primeneniya [Levi-Prokhorov distance estimates in terms of characteristic functions and some of their applications]. *Notes of scientific seminars of the Leningrad branch of the Mathematical Institute*, 1982, vol. 119, pp. 108-127. (in Russian)

24. Esseen C.-G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law, *Acta Mathematica*, 1945, no. 77, 125 p. doi: 10.1007/BF02392223.

25. Kononyuk A. E. *Informaciologiya. Obschaya teoriya informacii* [Informationology. General Information Theory]. Kyiv, Osvita Ukrainy, 2011. 412 p. (in Ukrainian)

26. Dulesov A. S., Khrustalev V. I. *Opredelenie entropii kak meri informacii pri sopostavlenii prognoznih i fakticheskikh pokazatelei predpriyatiya* [Determination of entropy as a measure of information when comparing the forecast and actual indicators of the enterprise]. *Modern problems of science and education*, 2012, no. 1, pp. 151-161 (in Russian).

27. Grimmett G., Stirzaker D. *Probability and Random Processes: Fourth Edition*. Oxford University Press, 2020. 688 p.

Информация об авторах

Линец Геннадий Иванович – доктор технических наук, доцент. Заведующий кафедрой инфокоммуникаций. Северо-Кавказский федеральный университет. Область научных интересов: синтез мультисервисных сетей; исследование влияния свойств самоподобного потока пакетов на количественные и качественные показатели современных инфокоммуникационных сетей; использование беспилотных летательных аппаратов малого класса для определения физико-химических параметров почвы и состояния растений. E-mail: kbytw@mail.ru

Воронкин Роман Александрович – кандидат технических наук, доцент. Доцент кафедры инфокоммуникаций. Северо-Кавказский федеральный университет. Область научных интересов: искусственный интеллект, нейронные сети, генетические алгоритмы, параллельные вычисления, сжатие изображений, потоковая передача данных в условиях виртуальных сетей. E-mail: roman.voronkin@gmail.com

Говорова Светлана Владимировна – старший преподаватель кафедры инфокоммуникаций. Северо-Кавказский федеральный университет. Область научных интересов: синтез мультисервисных сетей; исследование влияния свойств самоподобного трафика на количественные и качественные показатели современных сетей. E-mail: mitnik2@yandex.ru

Адрес: 355017, Россия, г. Ставрополь, ул. Пушкина, д. 1.

Functional transformation of the self-similar network teletraffic based on the multidimensional measure of similarity between probability parameters of input and output packet flows

G. I. Linets, R. A. Voronkin, S. V. Govorova

Statement of the problem. The problem of assessing the performance of modern telecommunication networks is the lack of analytical models that accurately describe the features of self-similar traffic. From an analytical point of view, communication networks that use the exponential distribution of time intervals between packets of the input packet stream turned out to be the most developed from an analytical point of view. **Purpose.** Development of a method of functional transformations, which allows minimizing the measure of proximity of the probability distributions of the input and output packet streams based on the use of set theory and multidimensional optimization methods; definition of a generalized analytical model of functional transformations that does not depend on the probabilistic laws of distributions of the input and output stream of packets. **Methods.** Probability theory, set theory, methods of multidimensional optimization, differential and integral calculus, methods of system analysis, methods of mathematical modeling. **Novelty.** For the first time, an analytical method of functional transformations of the input self-similar packet flow is presented in a general form, which makes it possible to determine the parameters of the output law for the distribution of packets of switching nodes by using the minimum value of a priori known pre-metric. In contrast to the results obtained earlier, for the case of transforming a self-similar input stream of packets into a stream with an exponential distribution law, if their mathematical expectations are equal, using the Kullback-Leibler divergence as a measure of proximity, a mathematical justification is presented that allows one to obtain an analytical expression for the intensity of the output packet stream. **Result.** A method of functional transformations of a self-similar packet stream into an output packet stream that does not have self-similar properties has been developed; a rigorous mathematical substantiation of the possibility of functional transformations of a self-similar input stream of packets is obtained, which makes it possible to determine the intensity of the output stream, which has an exponential lossless distribution law. **Practical significance.** The developed method and generalized analytical model can improve the quality of service in telecommunication networks.

Key words: self-similar packet flow, performance estimation, Hurst exponent, functional transformations, premetric, Kullback-Leibler divergence, scientific and methodological apparatus, analytical model, telecommunication networks.

Information about Authors

Linets Gennady Ivanovich – Dr. habil. of Engineering Sciences, Associate Professor. Head of the Department of Infocommunications. North Caucasus Federal University. Field of research: synthesis of multiservice networks; investigation of the influence of the properties of self-similar packet flow on the quantitative and qualita-

tive indicators of modern infocommunication networks; use of small-class unmanned aerial vehicles to determine the physico-chemical parameters of soil and plant condition. E-mail: kbytw@mail.ru

Voronkin Roman Aleksandrovich – Ph.D. of Engineering Sciences, Associate Professor. Associate Professor at the Department of infocommunications. North Caucasus Federal University. Field of research: artificial intelligence, neural networks, genetic algorithms, parallel computing, image compression, data streaming in virtual networks. E-mail: roman.voronkin@gmail.com

Govorova Svetlana Vladimirovna – Senior Lecturer of Infocommunication Department. North Caucasus Federal University. Field of research: synthesis of multi-service networks; investigation of the influence of the properties of self-similar traffic on the quantitative and qualitative indicators of modern networks. E-mail: mitnik2@yandex.ru

Address: Russia, 355017, Stavropol, Pushkina street, 1.