

УДК 623.62

## Алгоритм расчета вероятности ошибочного приема бита в каналах передачи данных с двумерными сигнально-кодовыми конструкциями под воздействием сигналоподобных помех

Петров А. В., Михалёв В. В., Ключев А. А.

**Постановка задачи.** В задачах по оценке помехоустойчивости каналов передачи информации (КПИ) на фоне сигналоподобных помех (СПП) для вычисления вероятности ошибочного приема бита в КПИ, использующих двумерные сигнально-кодовые конструкции, (СКК) проводится разбиение сигнального пространства на области принятия решений (ОПР) в пользу каждого из вариантов сигналов и вычисляются условные вероятности попадания случайных точек в ОПР. При принятии решения по критерию максимального правдоподобия, границы ОПР состоят из отрезков прямых линий и (или) лучей, а вероятности попадания в ОПР могут быть представлены в виде сумм вероятностей попадания в области пространства, ограниченные лучом или отрезком. Если ОПР имеют сложную конфигурацию эти вычисления целесообразно представить в виде алгоритма и реализовать на ЭВМ. **Цель работы** - разработка алгоритма численного расчета вероятности ошибочного приема бита при когерентном приеме равновероятных сигналов с двумерными СКК, на основе формализации правил определения границ ОПР и представления вероятностей попадания случайной точки в ОПР в виде суммы вероятностей попадания в области, ограниченные лучом или отрезком. **Используемые методы.** Правила разбиения сигнального пространства на ОПР получены на основе геометрической интерпретации взаимодействия сигнала и СПП в когерентном демодуляторе, методов оптимального приема сигналов и аналитической геометрии; при нахождении вероятностей попадания случайных величин в ОПР использовались полученные в ранее опубликованных работах интегралы от плотностей распределения векторов СПП на сигнальной плоскости. **Новизна.** Алгоритм может использоваться, когда разбиение сигнального пространства на ОПР заранее неизвестно; при представлении вероятности попадания случайной точки в ОПР в виде вероятностей попадания в области, ограниченные отрезком и лучом, алгоритм использует информацию о координатах соседних с рассматриваемой ОПР точек СКК, что упрощает вычисление условных вероятностей ошибок. **Результат.** Алгоритм является универсальным и может использоваться для анализа помехоустойчивости каналов с СКК произвольной конфигурации. **Практическая значимость.** Результаты могут быть использованы при проведении сравнительного анализа различных вариантов СПП для СКК заданной конфигурации или для разработки новых вариантов двумерных СКК, с повышенной помехоустойчивостью на фоне заданной СПП.

**Ключевые слова:** квадратурная амплитудная манипуляция, вероятность ошибочного приема бита, функция Оуэна, функция Гаусса, сигналоподобная помеха.

### Библиографическая ссылка на статью:

Петров А. В., Михалёв В. В., Ключев А. А. Алгоритм расчета вероятности ошибочного приема бита в каналах передачи данных с двумерными сигнально-кодовыми конструкциями под воздействием сигналоподобных помех // Системы управления, связи и безопасности. 2021. № 3. С. 1-37. DOI: 10.24412/2410-9916-2021-3-1-37

### Reference for citation:

Petrov A. V., Mikhalev V. V., Klyuev A. A. An Algorithm for Computing the Bit-Error Rate in Data Transmission Channels Using Two-Dimensional Signal-Code Constructions in the Presence of Signal-Like Jamming. Systems of Control, Communication and Security, 2021, no. 3, pp. 1-37 (in Russian). DOI: 10.24412/2410-9916-2021-3-1-37

### Актуальность

В процессе решения задач, связанных с защитой или, наоборот, разрушением информации, передаваемой по КПИ на фоне СПП, а также с обеспечением электромагнитной совместимости (ЭМС) радиоэлектронных средств (РЭС), проводится оценка эффективности функционирования КПИ на фоне помех [1]. В качестве показателя помехоустойчивости, обычно используют вероятность ошибочного приема бита  $\bar{p}_b$ , которая существенно зависит от применяемого вида манипуляции и кодирования в КПИ. В настоящий момент в КПИ, в том числе и военного назначения, в связи с предъявляемыми к ним жесткими требованиями по скорости передачи данных и объему передаваемой информации, используются сигналы с М-КАМ [2-7]. М-КАМ сигнал представляет собой сумму двух синусоидальных колебаний, с заданными амплитудами, сдвинутых относительно друг друга по фазе на  $90^\circ$ . Заданной паре амплитуд соответствует один символ, которому в свою очередь соответствует заранее определенная последовательность битов, поэтому ошибка при приеме символа может привести к ошибочной регистрации сразу нескольких битов. Вероятность ошибочного приема бита при приеме М-КАМ сигналов на фоне помех зависит от количества символов, от того какие уровни амплитуд несущих используются для представления символов, а также от того каким способом устанавливается соответствие между символами и соответствующими им последовательностями битов.

В известных публикациях задачи расчета вероятности ошибочного приема бита в каналах с двумерными СКК на фоне СПП решались для частных случаев СПП, при этом получены аналитические выражения для СКК, для которых разбиение сигнального пространства сводится к небольшому количеству элементарных математических действий, количество вариантов конфигураций областей принятия решений невелико, а сами конфигурации достаточно просты. Например, для М-ФМ сигналов [8, 9], или для наиболее распространенных КАМ сигналов, у которых сигнальные точки расположены в узлах квадратной сетки [10-12]. В этих случаях возможно группирование слагаемых вероятностей и получение компактных аналитических выражений для расчета вероятностей ошибочного приема бита.

Однако имеются сигнальные созвездия, у которых ОПР имеют достаточно сложную конфигурацию, или количество вариантов конфигураций ОПР велико, поэтому даже группирование совпадающих вероятностей не дает существенного уменьшения количества слагаемых вероятностей. Для таких СКК актуальна разработка универсального алгоритма, позволяющего реализовать на ЭВМ, всю последовательность вычисления вероятности ошибочного приема бита, включающую в себя следующие операции: разбиение сигнального пространства на ОПР; вычисление условных вероятностей попадания случайных точек в ОПР; усреднение полученных вероятностей с учетом расстояния Хэмминга. Для разработки такого алгоритма необходимы аналитические соотношения, формализующие последовательность выполнения всех операций по вычислению вероятности ошибочного приема бита.

### Постановка задачи

Для формальной постановки и решения задачи в работе введены обозначения, представленные в таблице 1.

Таблица 1 – Обозначения

| Обозначение                | Физический смысл обозначения                                                                                                                                                                  |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\bar{p}_b$                | - средняя вероятность ошибочного приема бита;                                                                                                                                                 |
| $\bar{p}_s$                | - средняя вероятность ошибочного приема символа;                                                                                                                                              |
| $M$                        | - количество символов в СКК;                                                                                                                                                                  |
| $P_c, P_{\Pi}$             | - пик-фактор сигнала, помехи;                                                                                                                                                                 |
| $\Delta$                   | - половина минимального Евклидова расстояния в СКК;                                                                                                                                           |
| $d_{\min}$                 | - минимальное Евклидово расстояние в СКК;                                                                                                                                                     |
| $P_c, P_{\Pi}$             | - средние мощности сигнала и помехи;                                                                                                                                                          |
| $P_{c \max}, P_{\Pi \max}$ | - пиковые мощности сигнала и помехи;                                                                                                                                                          |
| $q^2$                      | - отношение мощности сигнала к мощности помехи;                                                                                                                                               |
| $p(m/k)$                   | - условная вероятность регистрации символа $m$ , вместо символа $k$ ;                                                                                                                         |
| $H(m, k)$                  | - расстояние Хэмминга между символами $m$ и $k$ ;                                                                                                                                             |
| $p_n(m/k)$                 | - условная вероятность попадания в ОПР в пользу сигнала с номером $m$ случайной точки с центром распределения в точке $k$ в область, ограниченную стороной ОПР, разделяющей точки $m$ и $n$ ; |
| $Q_*(h)$                   | - вероятность попадания случайной точки $(x, y)$ с плотностью распределения $w_*(x, y)$ , в полуплоскость $h \leq x, h > 0$ ;                                                                 |
| $T_*(h, a)$                | - вероятность попадания случайной точки $(x, y)$ с плотностью распределения $w_*(x, y)$ , в область заданную уравнениями $h \leq x \cap y \geq 0 \cap y \leq ax, a \geq 0, h \geq 0$ ;        |
| $U_*(h, a)$                | - вероятность попадания случайной точки $(x, y)$ с плотностью распределения $w_*(x, y)$ , в область заданную уравнениями $h \leq x \cap y \geq ax, a \geq 0, h \geq 0$ ;                      |
| *                          | - обозначение вида СПП и плотности распределения $w_*(x, y)$ при расчете вероятностей $Q_*(h)$ , $T_*(h, a)$ и $U_*(h, a)$ ;                                                                  |

Будем считать, что на длительности одного тактового интервала в КПИ передается один из  $M$  символов двумерной СКК с номером  $k = 0, \dots, M - 1$ . Каждому символу соответствует последовательность из  $\log_2 M$  битов, при этом будем считать, что номер  $k$  передаваемого символа определяется последовательностью соответствующих ему символов. В результате воздействия помехи в канале, приемник с вероятностью  $p(m/k)$  регистрирует символ с номером  $m$ , при этом если  $m = k$ , то регистрируется та же последовательность битов, что и была передана, а, если  $m \neq k$ , то вместо последовательности битов, соответствующих переданному символу, регистрируется последовательность битов,

соответствующая символу  $m$ . Количество ошибочно зарегистрированных битов определяется расстоянием Хэмминга  $H(m, k)$  между символами  $m$  и  $k$ .

При равновероятных символах СКК последовательность вычисления средней по всем возможным символам вероятности  $\bar{p}_b$  определяется выражением:

$$\bar{p}_b = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} H(m, k) p(m/k). \quad (1)$$

Таким образом, для оценки  $\bar{p}_b$  необходимо в общем случае вычислить значения условных вероятностей  $p(m/k)$  для всех возможных символов и расстояние Хэмминга  $H(m, k)$ .

$H(m, k)$  зависит от используемого в канале способа кодирования. Для простого двоичного кода, пользуясь такими же методами, которые использованы в [13] при нахождения расстояния Хэмминга для кода Грея, его можно определить с помощью соотношения:

$$H(m, k) = \sum_{n=1}^{\log_2 M} \left| \text{round} \left[ 2 \left| \frac{m + 3 \cdot 2^{n-2} + 2^{-1}}{2^n} \right| - \text{round} \left( \frac{m + 3 \cdot 2^{n-2} + 2^{-1}}{2^n} \right) \right] \right| - \left| \text{round} \left[ 2 \left| \frac{k + 3 \cdot 2^{n-2} + 2^{-1}}{2^n} \right| - \text{round} \left( \frac{k + 3 \cdot 2^{n-2} + 2^{-1}}{2^n} \right) \right] \right|, \quad (2)$$

где  $\text{round}(x)$  – обозначает округление  $x$  до ближайшего целого значения.

При описании процессов когерентной демодуляции М-КАМ сигналов и нахождения  $p(m/k)$  целесообразно использовать геометрическое представление сигналов в виде точек на плоскости. Координаты точек в декартовой прямоугольной системе координат представляют собой заданные значения амплитуд двух ортогональных несущих передаваемого символа  $k$ . Воздействие помехи интерпретируется как несовпадение положения сигнальной точки с ее заданным местоположением. При принятии решения в качестве оценок координат в таком случае принимаются координаты ближайшей точки сигнального пространства. Геометрическая интерпретация правила принятия решений выглядит как разбиение плоскости на области, окружающие сигнальные точки, а вычисление  $p(m/k)$  заключается в вычислении вероятности попадания случайной точки в область, окружающую точку  $m$ , при условии, что передан символ, соответствующий точке  $k$ . Если принятие решения в условиях помех осуществляется по критерию максимального правдоподобия, то границами ОПР являются многоугольники или ломаные линии. На рис. 1 представлен пример разбиения сигнального пространства, соответствующий случаю когерентной демодуляции 64-КАМ сигнала стандарта MIL-STD-188-110, который в дальнейшем будем использовать для иллюстрации соотношений, используемых при описании алгоритма расчета  $\bar{p}_b$ .

Следует отметить, что  $p(m/m)$  – вероятность регистрации символа  $m$ , при условии того, что этот же символ и был на самом деле передан, т.е. вероятность правильного приема символа. Находя значения обратные  $p(m/m)$

можно определить среднюю вероятность ошибочного приема символа в канале  $\bar{p}_s$ . При равновероятных символах получим:

$$\bar{p}_s = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (1 - p(m/m)). \quad (3)$$

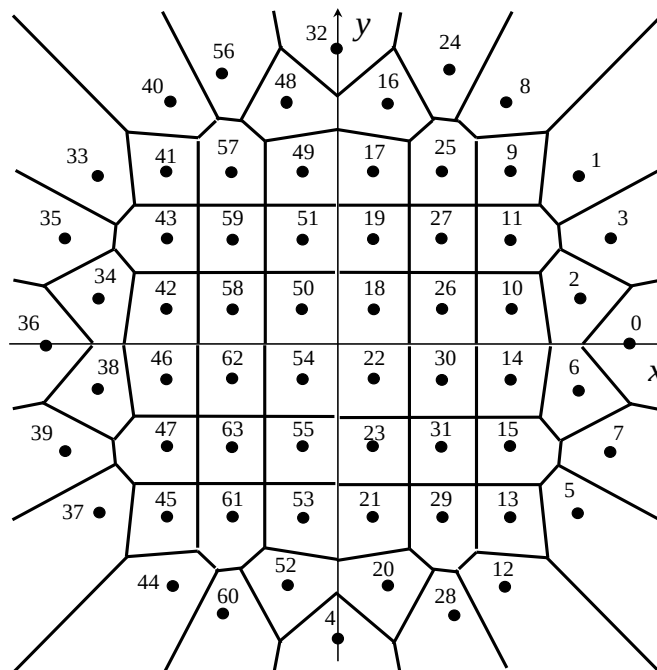


Рис. 1 Разбиение сигнального пространства 64-КАМ сигнала стандарта MIL-STD-188-110

Условные вероятности  $p(m/k)$  будут зависеть от формы, количества и взаимного расположения ОПР, а также от вероятностных характеристик помех, действующих в КПИ. В случаях, когда плотности распределения векторов помехи обладают свойством круговой симметрии (вероятность попадания конца вектора в заданную область не изменяется при повороте координатных осей, выходящих из точки начала вектора), вероятность попадания случайной точки в ОПР  $p(m/k)$ , а, соответственно, и  $\bar{p}_b$ , можно представить в виде суммы вероятностей ее попадания, в области ограниченные отрезками прямых линий и (или) лучами. Как показано в [8], при оценке помехоустойчивости двумерных СКК на фоне аддитивного белого гауссова шума (АБГШ) с использованием ЭВМ, вероятность  $\bar{p}_b$  удобно представлять в виде линейной комбинации функций Оуэна  $\mathbf{T}(h, a)$  и Гаусса  $\mathbf{Q}(h)$ , которые определяются интегралами:

$$\mathbf{T}(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy \quad \text{и} \quad \mathbf{Q}(h) = 2\mathbf{T}(h, \infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (4)$$

Если такие комбинации известны, то для расчета вероятности  $\bar{p}_b$  под воздействием СПП в каналах с двумерными СКК можно использовать подход, который был применен в [9], при расчете  $\bar{p}_b$  в канале с М-ФМ на фоне различных видов СПП. При решении данной задачи в [9] использованы известные



представления для  $\bar{p}_b$  в канале с М-ФМ на фоне АБГШ в виде суммы функций Оуэна и Гаусса. Поскольку плотности распределения  $w_*(x, y)$  случайных точек  $(x, y)$ , отображающих на сигнальной плоскости результат демодуляции СПП, так же, как и в случае, когда помехой является АБГШ, обладают свойством круговой симметричности (линии постоянного уровня плотности распределения представляют собой окружности), представления  $\bar{p}_b$  в виде суммы функций Оуэна и Гаусса можно использовать и для расчета  $\bar{p}_b$  на фоне СПП, заменив в них функции Оуэна и Гаусса интегралами:

$$T_*(h, a) = \int_h^{\infty} \int_0^{ax} w_*(x, y) dx dy \text{ и } Q_*(h) = 2T_*(h, \infty) = \int_h^{\infty} w_*(x) dx, \quad (5)$$

где \* – символ, обозначающий вид помехи.

Интегралы  $T_*(h, a)$  и  $Q_*(h)$  в [9] получены для нескольких видов СПП, что при наличии представлений  $\bar{p}_b$  в виде линейной комбинации функций Оуэна  $T(h, a)$  и Гаусса  $Q(h)$  для СКК заданного стандарта, позволяет проводить расчеты  $\bar{p}_b$  на фоне СПП.

Однако имеются сигнальные созвездия, у которых ОНР имеют достаточно сложную конфигурацию, или количество вариантов конфигураций ОНР велико, поэтому даже группирование совпадающих вероятностей не дает существенного уменьшения количества слагаемых вероятностей. Кроме этого, работы по совершенствованию и разработке новых стандартов СКК проводятся постоянно [14, 15]. Для оценки помехоустойчивости КПИ в таких случаях целесообразно представить в виде алгоритма и реализовать на ЭВМ, всю последовательность вычисления вероятности ошибочного приема бита.

Таким образом, целью работы является разработка алгоритма численного расчета вероятности ошибочного приема бита при когерентном приеме равновероятных сигналов с двумерными СКК, на основе формализации правил, определения границ ОНР и правил представления вероятностей попадания случайной точки в эти области в виде суммы вероятностей попадания в области, ограниченные лучом или отрезком.

Для разработки такого алгоритма необходимы аналитические соотношения, формализующие последовательность операций по вычислению вероятности  $\bar{p}_b$  в соответствии с (1), а именно:

- представление вероятностей попадания случайной точки в ОНР в виде сумм вероятностей попадания в области, ограниченные лучом или отрезком;
- определение границ ОНР в сигнальном пространстве.

### **Формализация правил представления условных вероятностей регистрации символов двумерных СКК в виде сумм функций Оуэна и Гаусса**

Интегралы (4) позволяют находить вероятность попадания двумерной нормальной случайной величины с единичной дисперсией и с центром в точке

О в области, заштрихованные на рис. 2, что дает возможность выразить с их помощью вероятность попадания в область, ограниченную произвольным многоугольником или ломаной линией. Необходимые для этого приемы, методы и математические соотношения подробно описаны в [8]. Там же, показано, что при нахождении вероятностей с помощью функций  $T(h, a)$  и  $Q(h)$  удобно использовать представление о том, что в точке, соответствующей центру распределения, расположен изотропный источник света, а область интегрирования может быть представлена как область «тени», отбрасываемой отрезком (лучом) при освещении из этой точки.

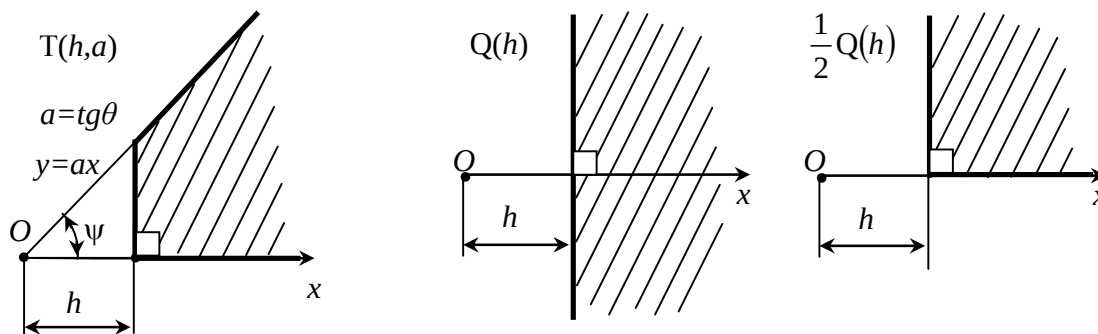


Рис. 2 Области интегрирования двумерного нормального распределения определяющие функции Оуэна и Гаусса

Правила представления вероятности попадания в произвольный многоугольник в виде суммы функций (5), приведенные в [8], проиллюстрируем на примере нахождения вероятности  $p(24/1)$  попадания точки в область, окружающую точку  $m = 24$  вместо области, соответствующей точке  $k = 1$ , при приеме сигнала 64 – КАМ с созвездием, показанным на рис. 1. При расчете  $p(24/1)$ , проводя прямые линии из точки  $k = 1$ , через точки, углы области, ограниченной ломаной линией, являющиеся концами отдельных отрезков и лучей, составляющих границу ОПР, окружающей точку  $m = 24$ , как показано на рис. 3, вероятность попадания внутрь ОПР можно представить в виде суммы и разности вероятностей попадания в области  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , составляющие областям «тени» от отдельных границ ОПР. Таким образом, вероятность попадания в интересующую область может быть представлена в виде суммы вероятности попадания в область  $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$  «тени», «отбрасываемой» лучом, с началом в точке  $C$  и область  $\Omega_4 \cup \Omega_5$  «тени», «отбрасываемой» отрезком  $BC$ , минус вероятность попадания в область  $\Omega_3 \cup \Omega_4$ , ограниченную отрезком  $AB$  и в область  $\Omega_1$ , ограниченную лучом, начинающимся в точке  $A$ .

В свою очередь вероятности попадания в области, ограниченные отдельными сторонами многоугольника могут быть выражены с помощью сумм или разностей функций Оуэна и (или) Гаусса (5). Возможные варианты геометрических соотношений между границами области интегрирования и местоположением точек  $k$  и  $m$  приведены на рис. 4. Как видно в результирующее выражение для вероятности попадания в область  $m = 24$  с положительным знаком

войдут вероятности попадания в области, ограниченные лучом, начинающимся в точке  $C$  (рис. 4, *а*), и отрезком  $BC$  (рис. 4, *б*), а с отрицательным знаком вероятности попадания в область, ограниченную отрезком  $AB$  (рис. 4, *в*) и лучом с началом в точке  $A$  (рис. 4, *г*).

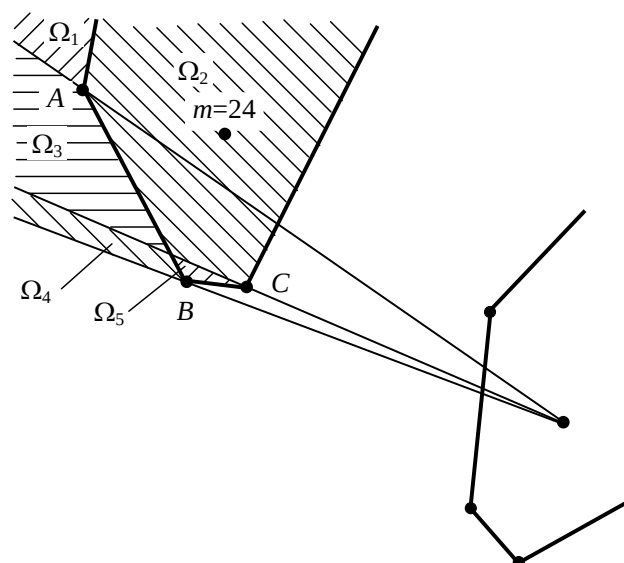


Рис. 3 Разбиение области интегрирования вокруг точки  $m = 24$  на области интегрирования, ограниченные ее сторонами

Для определения знака перед вероятностями попадания в области, ограниченные отдельными сторонами многоугольника в [8] предложены соотношения, полученные на основе анализа направлений векторов, один из которых соответствует нормали, исходящей из центра распределения (точка  $k$  на рис. 4), а второй соответствует отрезку (лучу), составляющему участок границы ОПР, для которого направление задано в порядке обхода периметра ОПР по часовой стрелке. Данное правило довольно сложно формализуемо при реализации расчетов на ЭВМ.

На основе соотношений аналитической геометрии можно предложить более просто формализуемое правило определения знаков, перед вероятностями. Как видно из примеров, представленных на рис. 5, проведя прямую линию через соответствующий отрезок или луч, можно увидеть, что положительный знак перед соответствующей составляющей выбирается, если точки  $m$  и  $k$  лежат по разные стороны относительно этой прямой, а отрицательный, если эти точки лежат по одну сторону от нее. Положение точки относительно прямой легко определить, если записать уравнение этой прямой в виде  $F(x, y) = 0$ . Совпадение знаков выражения  $F(x, y)$ , при подстановке в него координат точек  $m$  и  $k$ , означает, что эти точки лежат по одну сторону от нее.



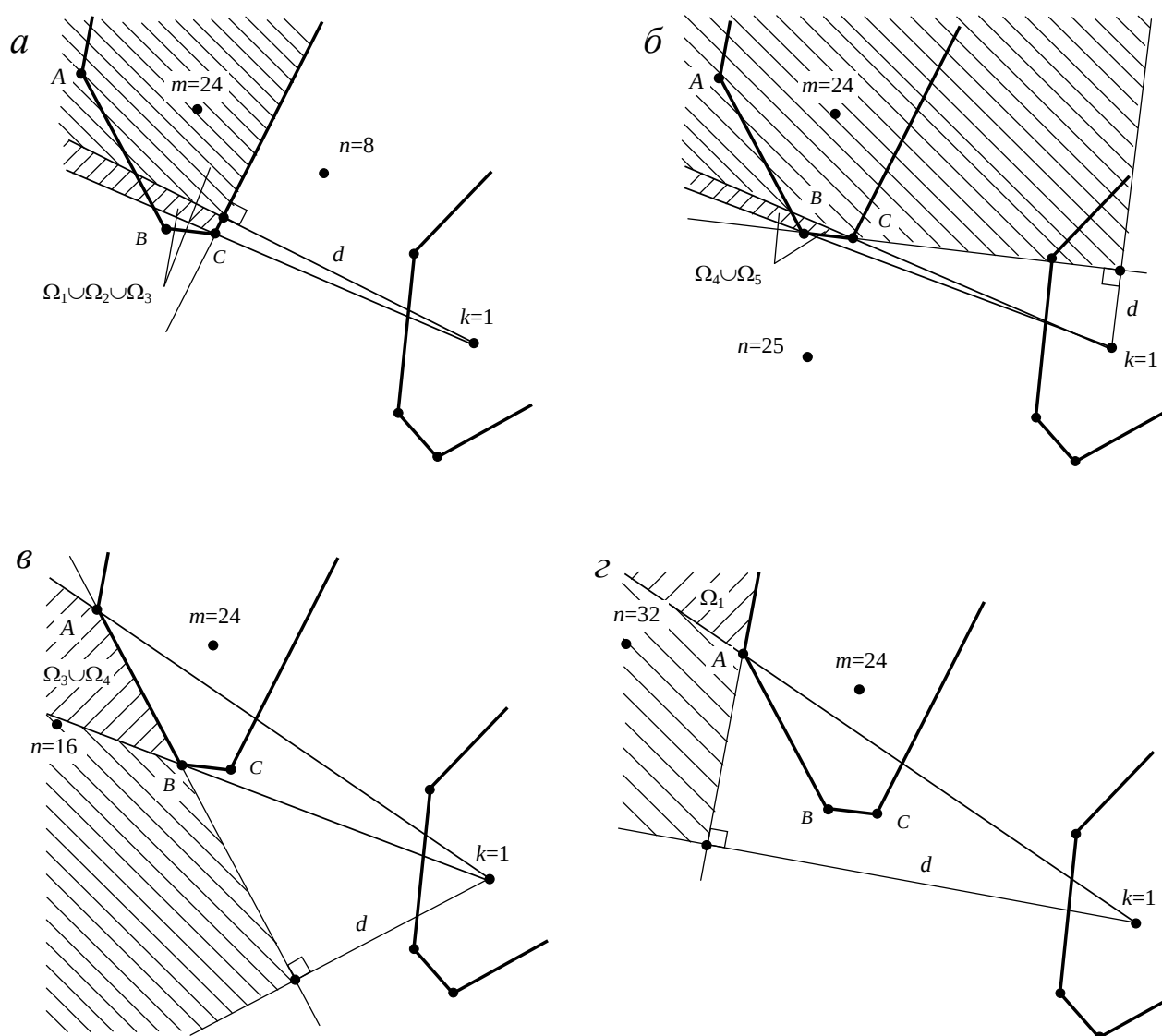


Рис. 4 Пример представления областей интегрирования, ограниченных сторонами многоугольника, окружающего точку  $m = 24$ , на области, позволяющие использовать для нахождения вероятностей функции Оуэна и Гаусса

Для формализации правила определения знака перед вероятностью попадания в область, ограниченную отдельной стороной многоугольника можно предложить следующие соотношения.

При нахождении вероятности попадания в область, ограниченную отрезком или лучом, известна также и точка созвездия с номером  $n$ , которую этот отрезок или луч отделяет от точки  $m$ .

Например, как видно из рис. 4, а, луч, исходящий из точки С, отделяет точку  $m = 24$  от точки  $n = 8$ . Отрезок ВС отделяет  $m = 24$  от  $n = 25$ , отрезок АВ разделяет  $m = 24$  и  $n = 16$ , а луч, с началом в точке А, разделяет  $m = 24$  и  $n = 32$ .

С учетом этого уравнение прямой, проведенной через сторону ОПР, имеет вид:

$$2(x_n - x_m)x + 2(y_n - y_m)y + y_m^2 - y_n^2 + x_m^2 - x_n^2 = 0, \quad (6)$$

где  $x_m, y_m$  и  $x_n, y_n$  – координаты соседних точек  $m$  и  $n$ .

Если точки  $k$  и  $m$  находятся по одну сторону от этой линии, то при подстановке координат этих точек, в уравнение (6), получим значения с одинаковым знаком. Однако, подставив в (6) координаты точки  $m$ , убедимся, что значение выражения (6) всегда отрицательное, так как:

$$-(x_n - x_m)^2 - (y_n - y_m)^2 < 0, \quad (7)$$

поэтому для определения взаимного положения точек  $k$  и  $m$  достаточно найти знак уравнения (6), подставив в него координаты точки  $k$ , тогда, для нахождения вероятности попадания в многоугольник необходимо просуммировать величины:

$$p_n(m/k) \text{sign} [2(x_n - x_m)x_k + 2(y_n - y_m)y_k - y_n^2 + y_m^2 - x_n^2 + x_m^2], \quad (8)$$

где  $p_n(m/k)$  – вероятность попадания в область ограниченную отрезком или лучом, отделяющим точку  $m$ , от точки  $n$ .

В выражении (8):

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ 1, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (9)$$

поэтому, если точка  $k$  лежит на линии (6), то вероятность попадания в область, ограниченную соответствующим лучом (отрезком), в соответствии с (9), равна нулю, и правило (8) сохраняется.

Если вычисляется вероятность попадания в область  $m$  из соседней области ( $k = n$ ) то из (6) получим:

$$(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 > 0,$$

поэтому в этом случае действует то же правило (8), что и для других сочетаний точек  $m$ ,  $n \neq m$  и  $k \neq n \neq m$ .

Исключением будет случай, когда  $k = m$ , т.е. задача заключается в вычислении вероятности  $p(m/m)$  правильного приема символа  $m$ . В этом случае использование (8) дает обратную вероятность – вероятность ошибочного приема символа  $m$ , т.е.  $1 - p(m/m)$ , что необходимо учитывать, если интересует вычисление  $p(m/m)$ .

Также, с использованием методов аналитической геометрии, найдем правило принятия решений при вычислении вероятности попадания в область, ограниченную одной границей многоугольника. Анализ ситуаций, показанных на рис. 4, показывает, что вероятность попадания в область, ограниченной одной стороной многоугольника, представляется в виде суммы или разности двух функций Оуэна, если сторона многоугольника является отрезком, а также в виде суммы или разности половины функции Гаусса и функции Оуэна, если сторона многоугольника является лучом.

Рассмотрим возможные геометрические соотношения между точками  $m$  и  $k$  и разделяющим отрезком, приведенные на рис. 6, а затем аналогичные соотношения для случая разделяющего луча, приведенные на рис. 7.

Рассмотрим ситуации, когда границей между ОНР является отрезок, разделяющий точки  $m$  и  $n$ , концы которого находятся в точках  $t_1$  и  $t_2$ , как показано на рис. 5, и проведем через него прямую линию, определенную уравнением (6). Уравнение перпендикуляра, проведенного из точки  $k$  на эту линию, имеет вид:

$$(x_n - x_m)(y - y_k) - (y_n - y_m)(x - x_k) = 0. \quad (10)$$

Очевидно знак уравнения (10), при подстановке в него координат концов отрезка, точек  $x_{t_1}$ ,  $y_{t_1}$  и  $x_{t_2}$ ,  $y_{t_2}$ , будут разным, если эти точки находятся по разные стороны от перпендикуляра (см. рис. 5, а, в, д) и одинаковым, если точки лежат по одну сторону от перпендикуляра (см. рис. 5, б, з, е).

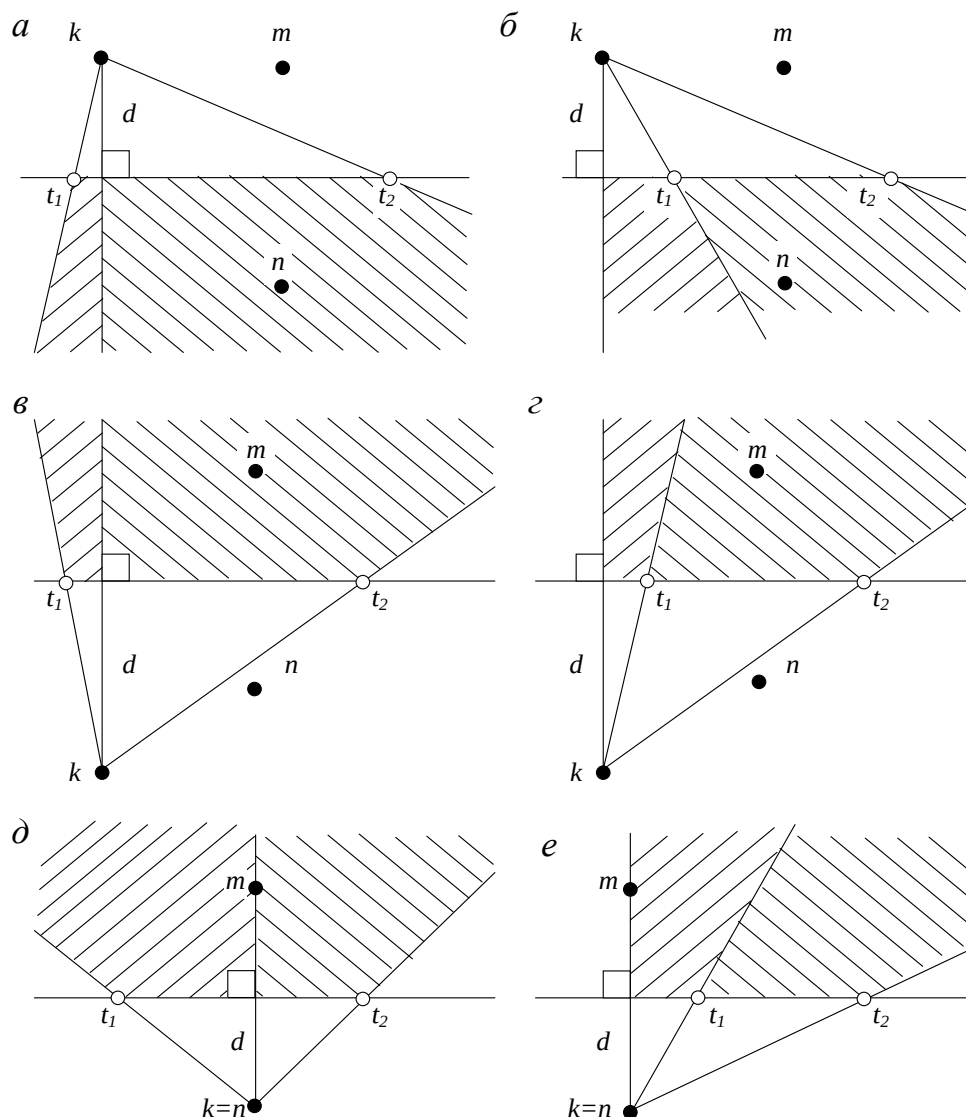


Рис. 5 Возможные варианты взаимного расположения отрезка, ограничивающего область  $m$  и точек  $k$  и  $n$  при нахождении вероятности попадания в область, ограниченную отрезком

Найдем аргументы функции Оуэна: тангенсы углов между перпендикуляром из точки  $k$  на разделяющую линию и линиями, соединяющими точку  $k$  с концами отрезка – точками  $t_1$  и  $t_2$ ,

$$\operatorname{tg}(\theta_1) = \frac{(y_n - y_m)(x_{t_1} - x_k) - (y_{t_1} - y_k)(x_n - x_m)}{(x_n - x_m)(x_{t_1} - x_k) + (y_{t_1} - y_k)(y_n - y_m)}, \quad (11)$$

$$\operatorname{tg}(\theta_2) = \frac{(y_n - y_m)(x_{t_2} - x_k) - (y_{t_2} - y_k)(x_n - x_m)}{(x_n - x_m)(x_{t_2} - x_k) + (y_{t_2} - y_k)(y_n - y_m)}, \quad (12)$$

расстояние от точки  $k$ , до линии, разделяющей точки  $m$  и  $n$  (нормированное по отношению к максимальной амплитуде сигнала)

$$d = \frac{1}{2\sqrt{P_{\text{с max}}}} \frac{|2(x_n - x_m)x_k + 2(y_n - y_m)y_k + y_m^2 - y_n^2 + x_m^2 - x_n^2|}{\sqrt{(y_n - y_m)^2 + (x_n - x_m)^2}}, \quad (13)$$

и, для вычисления вероятности попадания в область, ограниченную отрезком, получим выражение:

$$\begin{aligned} p_n(m/k) = & \operatorname{sign} [2(x_n - x_m)x_k + 2(y_n - y_m)y_k - y_n^2 + y_m^2 - x_n^2 + x_m^2] \times \\ & \times \left\{ T[q \cdot d, \max[|\operatorname{tg}(\theta_1)|, |\operatorname{tg}(\theta_2)|]] - \operatorname{sign} [(x_n - x_m)(y_{t_1} - y_k) - \right. \\ & \left. - (y_n - y_m)(x_{t_1} - x_k)] \operatorname{sign} [(x_n - x_m)(y_{t_2} - y_k) - (y_n - y_m)(x_{t_2} - x_k)] \right\} \times \\ & \times T[q \cdot d, \min[|\operatorname{tg}(\theta_1)|, |\operatorname{tg}(\theta_2)|]], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\max[|\operatorname{tg}(\theta_1)|, |\operatorname{tg}(\theta_2)|]$  и  $\min[|\operatorname{tg}(\theta_1)|, |\operatorname{tg}(\theta_2)|]$  – максимальная и минимальная из двух величин  $|\operatorname{tg}(\theta_1)|$  и  $|\operatorname{tg}(\theta_2)|$ .

Рассмотрим ситуации, когда границей между ОНР является луч с началом в точке  $t$ , показанные на рис. 7. Как и в случае отрезка, через луч можно провести прямую линию, уравнение перпендикуляра к которой из точки  $k$  определяется выражением (10). Из вариантов, представленных на рис. 7, видно, что вероятность попадания в область, ограниченную лучом определяется суммой функции Гаусса и Оуэна, если точка  $s$ , в которой перпендикуляр пересекается с проведенной через луч линией, лежит на луче (см. рис. 6, а, в, д), а разностью функций Гаусса и Оуэна эта вероятность определяется, если точка  $s$  не лежит на луче (см. рис. 5, б, г, е). Для того, чтобы определить лежит эта точка на луче, или нет, рассмотрим два случая, представленных на рис. 7, в каждом из которых определяется вероятность попадания в область, ограниченную лучом, отделяющим точку  $m = 24$  от точки  $n = 8$ , но центр распределения вероятностей находится в разных точках: в первом случае (см. рис. 7, а) в точке  $k = 1$  (при этом точка  $s$  лежит на луче), во втором случае (см. рис. 7, б) центр распределения в точке  $k = 9$  (точка  $s$  на луче не лежит). Как видно из рисунка, решение может быть принято на основе анализа взаимного положения точки  $s$  и линии, проходящей через отрезок, один из концов которого является также и

концом луча, и разделяет точку  $m = 24$  с соседней точкой  $r = 25$ . Из рис. 7 видно, что все точки, лежащие на луче находятся по одну сторону от этой линии, причем, с той же стороны, что и точка  $m$ .

Поскольку уравнение, прямой, разделяющей точки  $m$  и  $r$  имеет вид:

$$2(x_r - x_m)x + 2(y_r - y_m)y + y_m^2 - y_r^2 + x_m^2 - x_r^2 = 0, \quad (15)$$

а, подставляя в него координаты точки  $m$ , получим:

$$-(x_r - x_m)^2 - (y_r - y_m)^2 < 0,$$

то условием того, что точка  $s$  лежит на луче, является отрицательное значение уравнения (15) при подстановке в него координат точки  $s$ .

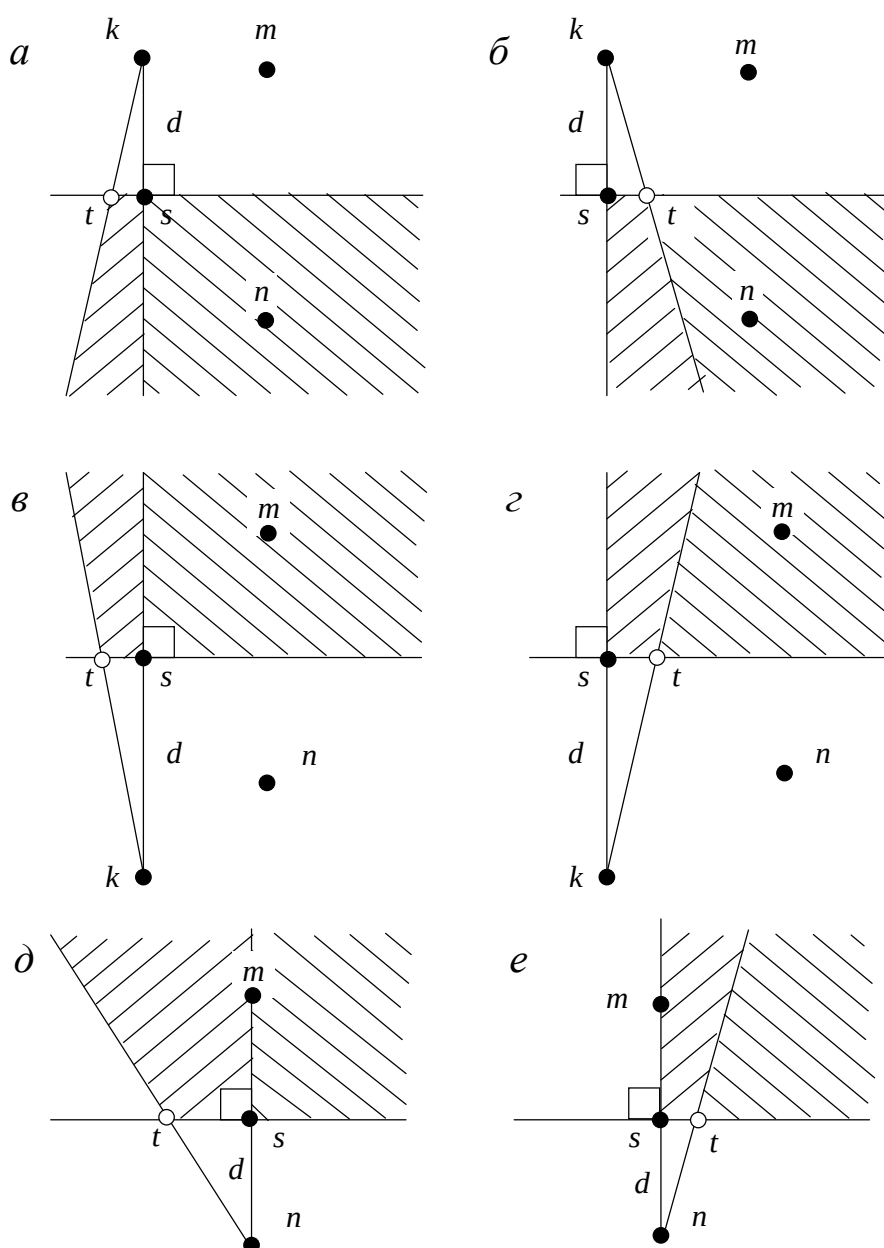


Рис. 6 Возможные варианты взаимного расположения луча, ограничивающего область  $m$  и точек  $k$  и  $m$  при нахождении вероятности попадания в область, ограниченную лучом



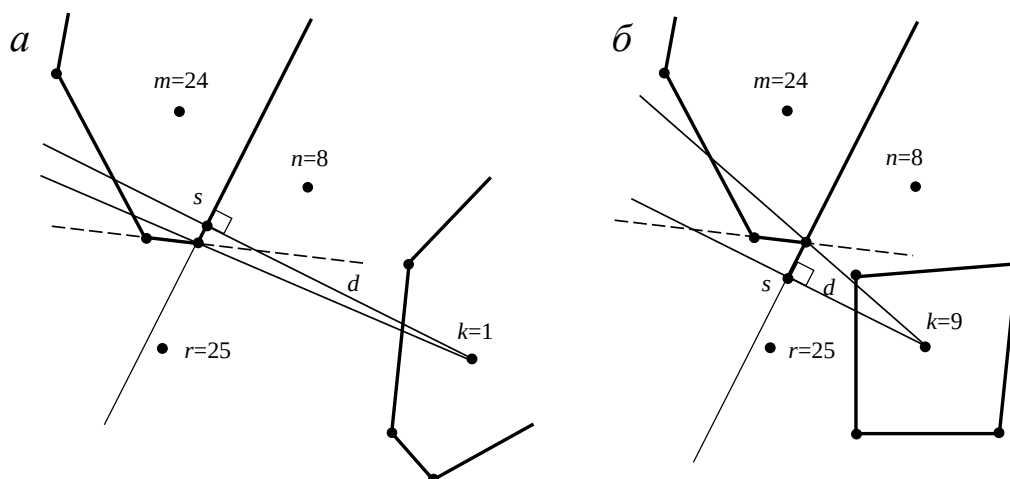


Рис. 7 Правило вычисления вероятности, когда границей областей является луч

Координаты точки пересечения линии, проведенной через луч и перпендикуляра на него из точки  $k$  определяются в соответствии с выражениями:

$$x_s = \frac{1}{2} \frac{(x_n - x_m)(y_n^2 - y_m^2 + x_n^2 - x_m^2)}{(y_n - y_m)^2 + (x_n - x_m)^2} - \frac{1}{2} \frac{2(y_n - y_m)[(x_n - x_m)y_k - (y_n - y_m)x_k]}{(y_n - y_m)^2 + (x_n - x_m)^2}, \quad (16)$$

$$y_s = \frac{1}{2} \frac{(y_n - y_m)(y_n^2 - y_m^2 + x_n^2 - x_m^2)}{(y_n - y_m)^2 + (x_n - x_m)^2} - \frac{1}{2} \frac{2(x_n - x_m)[(y_n - y_m)x_k - (x_n - x_m)y_k]}{(y_n - y_m)^2 + (x_n - x_m)^2}. \quad (17)$$

Окончательно, для вычисления вероятности попадания в область, ограниченную лучом, запишем следующее:

$$p_n(m/k) = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(q \cdot d) - \text{sign}[2(x_r - x_m)x_s + 2(y_r - y_m)y_s + y_m^2 - y_r^2 + x_m^2 - x_r^2] \mathbf{T}(q \cdot d, |\text{tg} \theta|), \quad (18)$$

где

$$\text{tg}(\theta) = \frac{(y_n - y_m)(x_t - x_k) - (y_t - y_k)(x_n - x_m)}{(x_n - x_m)(x_t - x_k) + (y_t - y_k)(y_n - y_m)}, \quad (19)$$

а  $d$  вычисляется в соответствии с (15).

Полученные соотношения позволяют вычислить вероятность попадания двумерной случайной величины в область, ограниченную на плоскости отрезками прямых линий и лучами, представив требуемую вероятность комбинацией функций Оуэна и Гаусса. При вычислении этих функций величина

$$q = \sqrt{2 \frac{E_c}{N_0}}$$

в (14) и (18) представляет собой квадратный корень из отношения максимальной энергии сигнала к спектральной плотности АБГШ [8].

Выражения могут быть использованы при известных геометрических характеристиках точек анализируемого созвездия и границ ОПР решений. В качестве исходных данных используются: координаты точек СКК; количество и вид (отрезок или луч) границ ОПР по каждой из областей; координаты точек, являющихся концами соответствующих лучей и отрезков; номера соседних точек, для каждой из областей.

### Формализация правил определения границ областей принятия решений по критерию максимального правдоподобия

В известной литературе описания полной последовательности правил нахождения границ ОПР, позволяющих решать данную задачу с использованием ЭВМ отсутствуют. В [8] предложен подход, позволяющий определять точки, являющиеся углами ОПР для точки  $m$ , как точки пересечения серединных перпендикуляров треугольников, образованных на основе точки  $m$  и еще двух точек созвездия, находящихся с ней рядом. Два примера использования данного способа при нахождении ОПР для точки с номером  $m = 24$  созвездия 64-КАМ стандарта MIL-STD-188-110 приведены на рис. 8. Как следует из рис. 8, *а*, данный способ дает правильный результат, если рассматривать треугольники, образованные на основе точек с номерами 16, 24, 25 и 16, 24, 25, однако, на рис. 8, *б*, треугольник образован на основе точек 8, 16, 24, при этом точка пересечения серединных перпендикуляров вообще не лежит на границе ОПР. Таким образом для решения задачи нахождения границ ОПР правил, приведенных в [8], не достаточно. Поэтому рассмотрим предлагаемое решение данной задачи, также базирующееся на правилах аналитической геометрии.

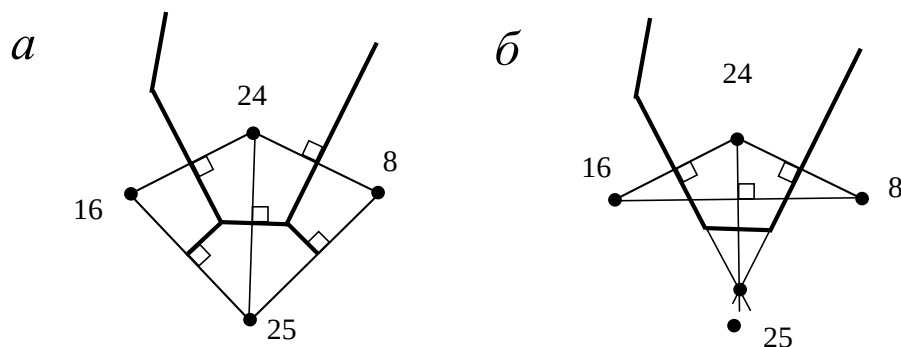


Рис. 8 Нахождение угловых точек ОПР, как точек пересечения серединных перпендикуляров треугольников

Пусть в системе прямоугольных декартовых координат заданы координаты  $M$  точек сигнального созвездия – амплитуды синфазной и квадратурной компонент сигнала:

$$x_m \text{ и } y_m, \text{ где } m = 0, \dots, M - 1. \quad (20)$$

Рассмотрим одну из этих точек – точку  $m$ . Граница между этой точкой и любой другой точкой созвездия  $n \neq m$ , представляет собой прямую линию, яв-

ляющуюся геометрическим местом точек, равноудаленных от точек  $m$  и  $n$ , она перпендикулярна отрезку, соединяющему точки  $m$  и  $n$ , и проходит через его середину. Уравнение этой линии имеет вид:

$$2(x_n - x_m)x + 2(y_n - y_m)y + y_m^2 - y_n^2 + x_m^2 - x_n^2 = 0. \quad (21)$$

Кроме этих двух точек  $m$  и  $n$  в созвездии имеется еще  $M - 2$ , точки, с номерами  $r \neq m \neq n$ . Для каждой из точек с номером  $r$  и точки  $m$  также существует разделяющая линия, определяемая уравнением:

$$2(x_r - x_m)x + 2(y_r - y_m)y + y_m^2 - y_r^2 + x_m^2 - x_r^2 = 0. \quad (22)$$

Линия (21), разделяющая точки  $m$  и  $n$ , может пересекаться или не пересекаться с любой из линий (22), разделяющих точки  $m$  и  $r$ , при этом точка пересечения линии (21) с каждой из линий (22) с координатами:

$$x_{m,n,r} = \frac{1}{2} \frac{(y_m^2 + x_m^2)(y_n - y_r) + (y_r^2 + x_r^2)(y_m - y_n)}{x_m(y_n - y_r) + x_r(y_m - y_n) + x_n(y_r - y_m)} + \frac{1}{2} \frac{(y_n^2 + x_n^2)(y_r - y_m)}{x_m(y_n - y_r) + x_r(y_m - y_n) + x_n(y_r - y_m)}, \quad (23)$$

$$y_{m,n,r} = \frac{1}{2} \frac{(y_m^2 + x_m^2)(x_n - x_r) + (y_r^2 + x_r^2)(x_m - x_n)}{y_m(x_n - x_r) + y_r(x_m - x_n) + y_n(x_r - x_m)} + \frac{1}{2} \frac{(y_n^2 + x_n^2)(x_r - x_m)}{y_m(x_n - x_r) + y_r(x_m - x_n) + y_n(x_r - x_m)}, \quad (24)$$

может оказаться концом одной из границ области  $m$ , а линия (21), соответственно, может оказаться частью отрезка или луча, разделяющего точки  $m$  и  $n$ , при этом сами точки будут иметь общую границу.

Условием существования точки пересечения является неравенство нулю знаменателей в выражениях (23) и (24)

$$\begin{aligned} x_m(y_n - y_r) + x_r(y_m - y_n) + x_n(y_r - y_m) &\neq 0, \\ y_m(x_n - x_r) + y_r(x_m - x_n) + y_n(x_r - x_m) &\neq 0, \end{aligned} \quad (25)$$

так как в противном случае линии (21) и (22) параллельны.

Для того чтобы точка с координатами  $x_{m,n,r}$  и  $y_{m,n,r}$  могла считаться концом разделяющего отрезка, или луча, эта точка и центр области  $m$  с координатами  $x_m$  и  $y_m$  должны лежать по одну сторону относительно прямой, или на прямой, разделяющей точку  $m$  с любой другой из точек созвездия. Это можно проверить, определяя знак уравнения (22) при подстановке в него координат  $x_{m,n,r}$  и  $y_{m,n,r}$ . При этом для всех линий разделяющих точку  $m$  с точками под номерами  $v \neq m \neq n \neq r$  должно выполняться условие:

$$\begin{aligned} y_m^2 + 2y_{m,n,r}(y_v - y_m) - y_v^2 + x_m^2 + 2x_{m,n,r}(x_v - x_m) - x_v^2 &\leq 0, \\ \forall v \neq m \neq n \neq r, \end{aligned} \quad (26)$$

поскольку при подстановке в уравнение разделяющей линии (21) или (22) координат самой точки  $m$ , получаем отрицательное значение.

Последовательно выполняя вышеперечисленные операции для всех точек созвездия  $m = 0, \dots, M - 1$  можно выявить для каждой точки  $m$  перечень всех точек  $n$ , потенциально имеющих общую границу с  $m$ , и для каждой из точек  $n$ , линии (21), проходящие через эту границу.

С использованием (23) и (24) находятся координаты точек, определяющих концы границ между ОНР точек  $m$  и  $n$ . Если таких точек две, то граница представляет собой отрезок, а если одна, то луч или вырождается в точку.

Рассматривая каждый из концов границы ОНР, отметит, что возможны случаи, подобные случаю показанному на рис. 9, когда в одной и той же точке, пересекаются несколько линий, разделяющих точку  $m$  и различные точки с номерами  $r \neq n \neq m$ , которые в данном случае находятся на одинаковом расстоянии от точки пересечения.

На рис. 9, *a* показан случай, когда линия, разделяющая точки  $m$  и  $n$  (сплошная) пересекается в одной точке  $A$  с линиями (штриховыми), разделяющими точку  $m$  и точки  $r_1$  и  $r_2$ , а также с линией (штрих-пунктирной), разделяющей точки  $m$  и  $r_3$ . При этом, одна из линий, разделяющих точки  $m$  и  $r_k$ ,  $k > 1$ , так же, как и линия, разделяющая точки  $m$  и  $n$ , является частью отрезка, или луча, ограничивающего ОНР точки  $m$ . Выявить эту линию и соответствующую ей точку  $r_k$  можно определив расстояния между точкой  $m$  и линией, разделяющей ее с каждой из точек  $r_k$

$$d_k = \frac{1}{2} \sqrt{(x_m - x_{r_k})^2 + (y_m - y_{r_k})^2}, \quad k > 1. \quad (27)$$

Искомой линии соответствует минимальное из этих расстояний, при этом обе границы ОНР точек  $m$ ,  $n$  и точек  $m$ ,  $r$  имеют общую точку  $A$ .

Таким образом, для заданной точки  $m$  путем последовательного перебора всех точек с номерами  $n \neq m$ , для которых выполняются условия (25) и (26) можно выявить номер единственной точки  $r$ , ОНР которой примыкает к ОНР точек  $m$  и  $n$ , границы этих трех ОНР имеют общую точку, и могут являться частями отрезков или лучей, ограничивающих ОНР точки  $m$ .

Следует отметить, что для заданных точек  $m$  и  $n$  условия (25) и (26) выполняются также и в случае, если граница между их ОНР представляет собой единственную точку. Пример такого случая приведен на рис. 10, *a*. Сплошная линия на рисунке разделяет точки  $m$  и  $n$ , а штрих-пунктирная и штриховые разделяют точку  $m$  и точки  $r_1$  и  $r_2$ ,  $r_3$  соответственно. Так же, как и в предыдущем случае, из множества  $r_k$ ,  $k > 1$  выявить номер единственной точки  $r$ , ОНР которой имеет общую границу с ОНР точки  $m$  можно измеряя и сравнивая расстояния (27). Однако в данном случае ОНР точек  $m$  и  $n$  общей границы в виде отрезка или луча не имеют, поэтому, в отличие от случая, проиллюстрированного рис. 9, *a*, точка  $n$  в перечень точек, имеющих общую границу с точкой  $m$  входить не должна.

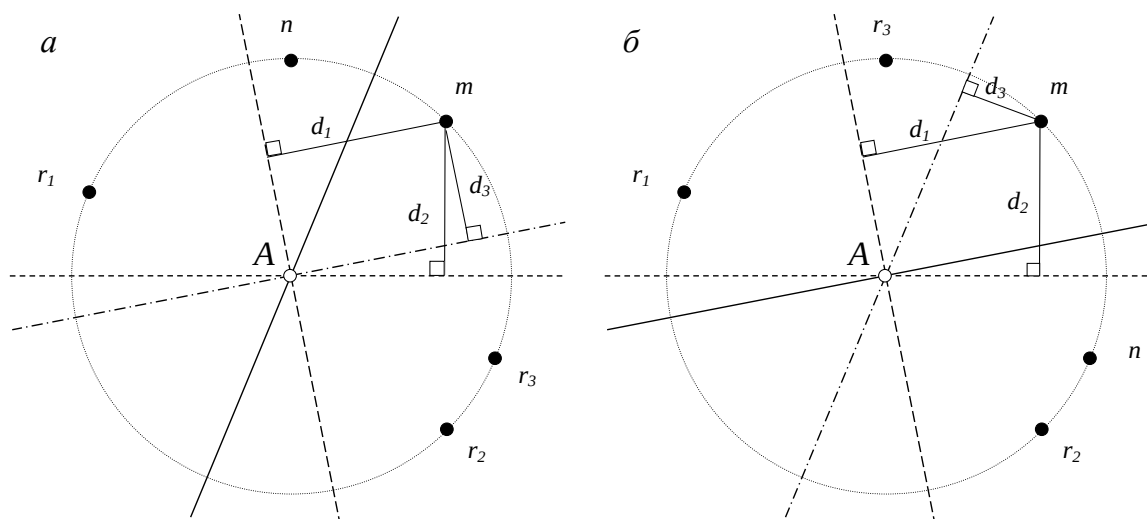


Рис. 9. Пример случая, когда линию, разделяющую точки  $m$  и  $n$  пересекают в одной точке несколько линий, разделяющих точку  $m$  и точки  $r_k$

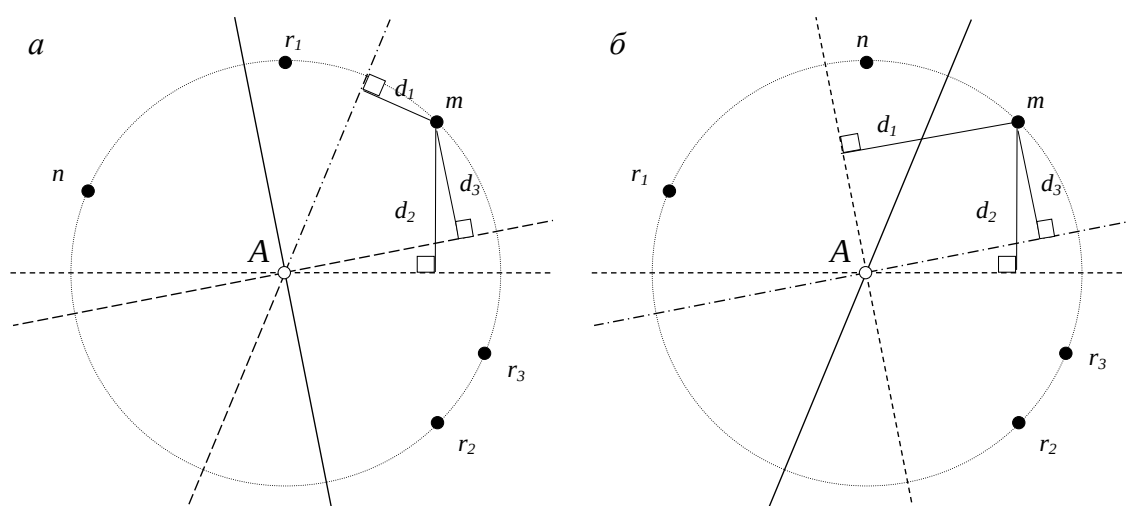


Рис. 10. Пример случая, когда граница между ОПР точек  $m$  и  $n$  представляет собой точку

Исключить из дальнейшего рассмотрения случаи, когда граница ОПР точек  $m$  и  $n$  представляет собой точку можно на основе анализа результатов последовательного перебора всех точек с номерами  $n \neq m$ , для которых выполняются условия (25) и (26). В процессе такого перебора в качестве точки  $n$  последовательно рассматриваются все точки, ранее обозначавшиеся номерами  $r_k$ . При этом, как видно из рис. 9, б, на котором в качестве точки  $n$  рассматривается точка, ранее обозначенная на рис. 9, а, как  $r_3$ , в результате анализа расстояний от точки  $m$  до точек  $r_k$  в качестве точек, ОПР которых образуют общую границу с ОПР точки  $m$  будет выбрана та же пара точек, что и в ситуации, показанной на рис. 9, а. Из рис. 10, б, видно, что если в качестве точки  $n$  рассматривать точку, обозначенную на рис 10, а, как  $r_1$ , то пара точек, выбранных в ситуациях показанных на рис. 10, а и 10, б не совпадет.

В результате решения задачи нахождения единственной точки с ОПР примыкающей к ОПР точек  $m$  и  $n$  для заданной точки  $m$  определяются не-

сколько точек с номерами  $n$  которым соответствуют несколько точек номерами  $r$  (по одному на каждую  $n$ , в случае, если граница между  $m$  и  $n$  точка или луч и по два на  $n$ , если граница отрезок). При этом в точку вырождаются границы ОПР точки  $m$  с границами ОПР точек  $n$ , номера которых в перечне точек с номерами  $r$  отсутствуют. Данные точки из дальнейшего анализа исключаются.

Рассмотренные правила и соотношения позволяют формализовать последовательность нахождения границ ОПР в сигнальном пространстве.

### Алгоритм численного расчета вероятности ошибочного приема бита

На основе предложенной формализации правил определения границ ОПР и правил представления вероятностей попадания случайной точки в эти области в виде суммы вероятностей попадания в области, ограниченные лучом и отрезком разработан алгоритм численного расчета вероятности ошибочного бита при когерентном приеме равновероятных сигналов с двумерными СКК. Рассмотрим основные этапы этого алгоритма.

Исходными данными для определения границ ОПР в сигнальном созвездии является количество точек в созвездии  $M$ , а также номера точек созвездия  $m = 0, \dots, M-1$ , и их координаты  $x_m$  и  $y_m$ .

1. Для каждой точки с номером  $0 < m < M$  выявляются номера точек  $n \neq m$ , ОПР которых имеют общую границу с ОПР точки  $m$ . Выявление таких точек осуществляется в следующей последовательности.

1.1. При заданном номере точки  $m$  последовательно считываются координаты каждой точки с номером  $0 < n \neq m < M$  для предварительной оценки возможности наличия между ОПР точек  $m$  и  $n$  общей границы.

1.1.1. При заданном номере точки  $n$  последовательно считываются координаты каждой точки с номером  $0 \leq r \neq n \neq m < M$ .

1.1.1.1. Для выбранной точки  $r$  проверяется условие (25) наличия точки пересечения прямых, определяемых уравнениями (21) и (22). При невыполнении условия (25) считываются координаты следующей точки  $r$ .

1.1.1.2. Для точки с номером  $r$ , для которой выполняется условие (21), в соответствии с выражениями (23) и (24) рассчитываются координаты  $x_{m,n,r}$ ,  $y_{m,n,r}$  точки пересечения прямых (21) и (22), последовательно считываются координаты точек с номерами  $0 \leq v \neq r \neq n \neq m < M$  и проверяется выполнение условия (26).

1.1.1.3. Номер точки  $r$  и координаты  $x_{m,n,r}$ ,  $y_{m,n,r}$ , определенные на этапе 1.1.1.2 сохраняются для дальнейшего анализа если условие (26) выполняется для всех точек с номерами  $v$  и не сохраняются в противном случае.

1.1.2. Для заданной точки  $n$  определяется количество  $j$ , номера  $r$  и координаты  $x_{m,n,r}$ ,  $y_{m,n,r}$  точек, для которых выполняются условия (25) и (26).

1.2. При заданном номере точки  $m$  для каждой точки с номером  $0 < n \neq m < M$  последовательно анализируются результаты, полученные на этапе 1.1, для определения формы (отрезок, луч или точка) общей границы между ОПР точек  $m$  и  $n$ , при ее наличии ( $j \neq 0$ ).



1.2.1. Если при заданной точке  $n$  только для одной точки  $r$  выполняются условия (25) и (26) ( $j = 1$ ), то граница между заданной точкой и точкой  $m$  однозначно представляет собой луч с концом в точке  $x_{m,n,r}$ ,  $y_{m,n,r}$ , а если эти условия выполняются для нескольких точек с номерами  $0 \leq r \neq n \neq m < M$ , ( $j > 1$ ), то проводится уточнение формы границы, которое включает следующие шаги.

1.2.2. Для каждой точки  $r$  осуществляется последовательное сравнение координат  $x_{m,n,r}$ ,  $y_{m,n,r}$  точки пересечения линии (22), разделяющей точки  $r$  и  $m$ , с линией (21), разделяющей точки  $n$  и  $m$ .

1.2.2.1. При совпадении координат  $x_{m,n,r}$ ,  $y_{m,n,r}$  для нескольких точек с номерами  $r$ , на основе расчета и сравнения расстояний между ними и точкой  $m$ , определяемых выражением (27), сохраняется та из точек с номером  $r$ , которая ближе к точке  $m$ .

1.2.2.2. Для точек с номерами  $r$ , у которых одна из координат  $x_{m,n,r}$  или  $y_{m,n,r}$  не совпадает выполнение шага 1.2.2.1 осуществляется по отдельности.

1.2.3. Запоминаются выявленные в результате выполнения этапов 1.2.1 и 1.2.2 для каждой точки  $n$  количество концов (один или два) границы, отделяющей ОПР этой точки от ОПР точки  $m$ , и номера точек  $r$ , определяющие координаты  $x_{m,n,r}$ ,  $y_{m,n,r}$  этих концов, или признак отсутствия общей границы.

1.3. При заданном номере точки  $m$  из перечня, выявленных на этапе 1.2, точек  $n$ , ОПР которых имеют общую границу с ОПР точки  $m$ , исключаются те, для которых граница вырождается в точку.

Результатом первого этапа алгоритма является сформированный для каждой точки  $m$  созвездия перечень точек,  $n$  ОПР которых имеют общую границу с точкой,  $m$ , количество концов каждой из границ, определяющих ее вид (отрезок или луч) и координаты концов, а также номера точек  $r$ , границы ОПР которых имеют общую точку с границами ОПР точек  $m$  и  $n$ .

Эти результаты являются исходными данными для второй части алгоритма, обеспечивающей вычисление условных вероятностей  $p(m/k)$  регистрации символа с номером  $m$  вместо символа с номером  $k$ . Рассмотрим основные этапы данного алгоритма.

2. При заданном значении  $k$  считываются параметры ОПР для точки  $m$ , и последовательно для каждой из границ ОПР точки  $m$  выполняются следующие операции.

2.1. Определение вида границы (луч или отрезок).

2.1.1. В случае если граница представляет собой отрезок, вероятность попадания в ограниченную им область определяется в соответствии с выражением (14), а аргументы функции Оуэна вычисляются в соответствии с выражениями (11) – (13).

2.1.2. Если граница представляет собой луч, то вычисление вероятности осуществляется в соответствии с выражением (18), а аргументы функций Оуэна и Гаусса вычисляются в соответствии с выражениями (13) и (19).

2.2. Результаты расчета для каждой отдельной границы суммируются с учетом знака перед вероятностями в соответствии с выражением (8).

Полученные на втором этапе условные вероятности используются на завершающем этапе для расчета средней по равновероятным символам вероятности ошибочного приема бита.

3. Окончательный этап заключается в расчете средней вероятности ошибочного приема бита в соответствии с выражением (1).

Данный алгоритм реализован в системе Mathcad 15 и использовался для расчетов вероятности ошибочного приема бита КАМ сигналов стандарта MIL-STD-188-110 на фоне сигналоподобных помех.

### **Результаты расчета вероятностей ошибочного приема бита М-КАМ сигналов стандарта MIL-STD-188-110 на фоне СПП**

Алгоритм определения границ ОПР, реализованный в системе Mathcad-15, с использованием приведенных соотношений позволил получить разбиение сигнального пространства на ОПР для СКК КАМ сигналов стандарта MIL-STD-188-110. В качестве исходных данных использовались координаты точек сигнальных созвездий КАМ сигналов данного стандарта с количеством символов  $M$  равным 16, 32, 64, 256 [5-8]. Созвездия и геометрические соотношения между точками, при максимальной амплитуде сигналов равной единице, представлены на рис. 11, а в таблице 2 приведены значения пик-фактора сигнала  $P_c$  и параметра  $\Delta$ , равного половине минимального Евклидова расстояния между точками СКК  $d_{\min}$ . Номерам точек соответствуют последовательности битов, получаемые с помощью простого двоичного кода.

Полученные с использованием разработанного алгоритма разбиения сигнального пространства на ОПР показаны на рис. 12. При  $M = 16$  и  $M = 32$  полученные разбиения совпадают с приведенными в [8], что подтверждает достоверность полученных результатов.

Вероятности  $\bar{p}_b$  на фоне различных видов СПП рассчитывались на основе полученных разбиений (см. рис. 12), представления вероятностей попадания в ОПР, в соответствии с предложенными соотношениями, в виде сумм функций  $T(h, a)$  и  $Q(h)$ , и замены этих функций интегралами  $T_*(h, a)$  и  $Q_*(h)$ , (знак \* обозначает вид СПП), полученными в [9]. Интеграл  $T_*(h, a)$  для СПП определяется соотношением:

$$T_*(h, a) = \frac{1}{2} Q_*(h) - U_*(h, a). \quad (28)$$

Возможность такой замены как в [9], так и в данном случае обусловлена тем, что оценка помехоустойчивости сигнала с заданной мощностью  $P_c$  проводилась в отсутствие шумов, а только на фоне СПП с заданной мощностью  $P_{\Pi}$ . При этом результат воздействия такой помехи на сигнальной плоскости интерпретируется как вектор, с началом в точке, соответствующей какой-либо из точек сигнального созвездия. Конец вектора помехи представляет собой случайную точку на плоскости.

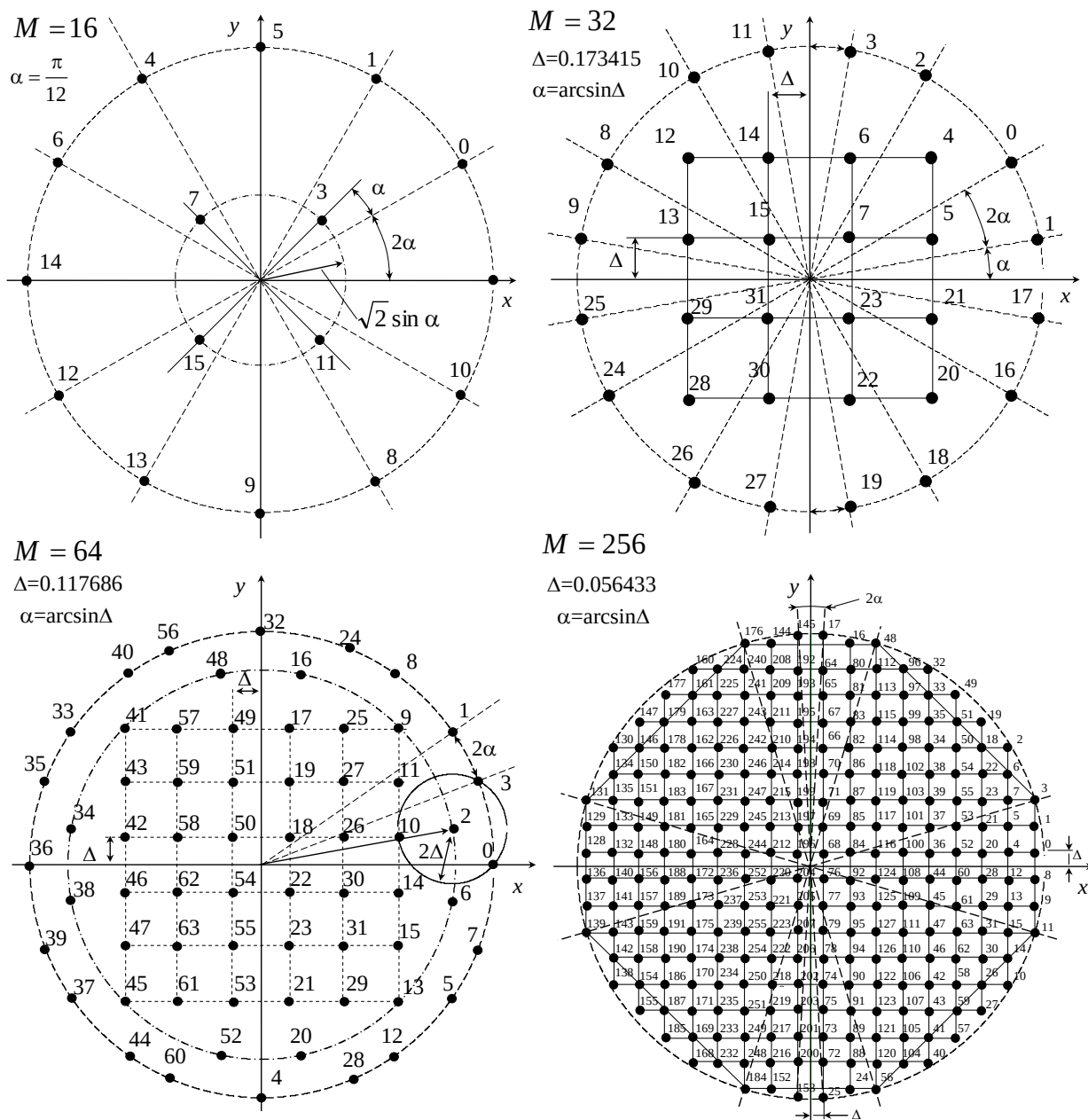


Рис. 11. Созвездия M-KAM сигналов стандарта MIL-STD-188-110

Таблица 2 – Параметры M-KAM сигналов стандарта MIL-STD-188-110

| $M$                           | 16                                     | 32                                      | 64                                                                                                                        | 256                                        |
|-------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\Pi_c$                       | $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3+2\Delta^2}}$ | $\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{1+10\Delta^2}}$ | $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5+218\Delta^2+2\Delta\left(5+\sqrt{\frac{10\Delta-10\Delta^2-1}{26\Delta^2-10\Delta+1}}\right)}}$ | $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{1+10126\Delta^2}}$ |
| $\Delta = \frac{d_{\min}}{2}$ | $\sin \frac{\pi}{12}$                  | 0.173415                                | 0.117686                                                                                                                  | $\frac{1}{\sqrt{314}}$                     |

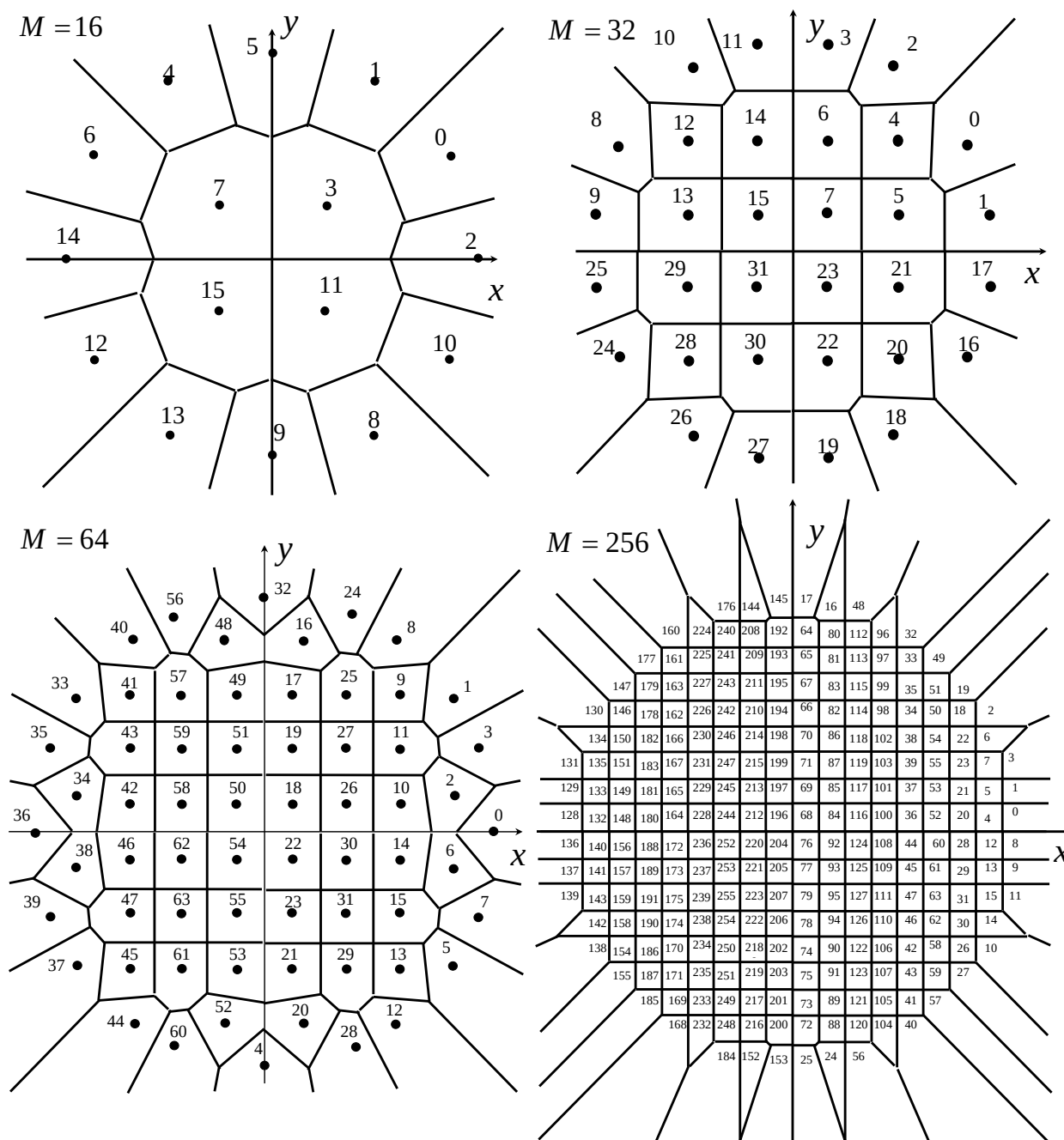


Рис. 12. Разбиение сигнального пространства М-КАМ сигналов стандарта MIL-STD-188-110 на области принятия решений

Для всех видов СПП, рассмотренных в [9], плотность распределения данной точки  $w_*(x, y)$  не является нормальной, но обладает свойством круговой симметрии (линии постоянного уровня плотности распределения представляют собой концентрические окружности, центр которых лежит в центре распределения, т.е. совпадает с сигнальной точкой созвездия). Аналогичным свойством обладает двумерная гауссова плотность распределения, которая используется для нахождения функций Оуэна и Гаусса. Данное свойство позволяет использовать интегралы с такими же пределами интегрирования, которые используются при нахождении функций Оуэна и Гаусса, но вместо гауссовых плотностей распределения интегрировать плотности распределения, определяемые структурами СПП. При этом интегралы не будут зависеть от поворота системы координат относительно центра

распределения. Это общее свойство интегралов от плотностей распределения, обладающих круговой симметрией, может быть использовано как при оценке помехоустойчивости сигналов на фоне АБГШ, так и на фоне СПП. Поскольку соотношение длин векторов сигнала и СПП на сигнальной плоскости зависит от соотношения мощностей помехи и сигнала, то и аргументы функций  $T_*(h, a)$  и  $Q_*(h)$  в случае СПП определяются соотношениями мощностей СПП и сигнала. Приведем рассмотренные в [9] виды СПП и соответствующие им аналитические выражения для расчета интегралов  $T_*(h, a)$  и  $Q_*(h)$ .

Гармоническая помеха (ГП) – синусоидальное колебание с постоянной частотой, равной частоте сигнала и равномерно распределенной начальной фазой. Для ГП:

$$Q_{ГП}(h) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin(h), & \text{при } 0 < h < 1, \\ 0, & \text{при } h < 0, 1 < h, \end{cases}$$

$$U_{ГП}(h, a) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arccotg}(a) - \arcsin(h)}{2\pi}, & \text{при } 0 < h^2(1 + a^2) < 1, \\ 0, & \text{при } h^2(1 + a^2) < 0, 1 < h^2(1 + a^2). \end{cases} \quad (29)$$

Фазоманипулированная помеха (ФМП) – последовательность радиоимпульсов с частотой высокочастотного (ВЧ) заполнения равной частоте сигнала, длительности радиоимпульсов помехи  $T_{\Pi}$  совпадают с длительностями тактовых интервалов сигнала  $T_c$ , начальная ВЧ заполнения от импульса к импульсу равномерно принимает значение из интервала от 0, до  $2\pi$ , при этом моменты начала (окончания) очередного радиоимпульса помехи не совпадают с тактовыми моментами сигнала. Для ФМП:

$$Q_{ФМП}(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - h), & \text{при } 0 < h < 1, \\ 0, & \text{при } h < 0, 1 < h, \end{cases}$$

$$U_{ФМП}(h, a) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 - h^2(1 + a^2)} [\operatorname{arccotg}(a) - \\ - h F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1 - h^2(1 + a^2), h^2\right)], & \text{при } 0 < h^2(1 + a^2) < 1, \\ 0, & \text{при } h^2(1 + a^2) < 0, 1 < h^2(1 + a^2). \end{cases} \quad (30)$$

где  $F_2(a, b, b'; c, c'; w, z)$  – функция Аппеля [16].

Хаотическая импульсная помеха с экспоненциальным распределением длительностей радиоимпульсов (ХИП-эксп) – отличается от ФМП тем, что длительности радиоимпульсов помехи  $T_{\Pi}$  от импульса к импульсу изменяются по экспоненциальному закону, с заданным средним значением  $\bar{T}_{\Pi}$ . Для ХИП-эксп:

$$\mathbf{Q}_{\text{ХИП-эксп}}(h) = \left[ \mathbf{Q}_{\text{ГП}}(h) + \frac{T_c}{T_{\Pi}} \mathbf{Q}_{\text{ФМП}}(h) + \left( \frac{T_c}{T_{\Pi}} \right)^n \mathbf{Q}_{\text{ХИП-эксп-}n}(h) \right] e^{-\frac{T_c}{T_{\Pi}}}, \quad (31)$$

$$\mathbf{U}_{\text{ХИП-эксп}}(h, a) = \left[ \mathbf{U}_{\text{ГП}}(h, a) + \frac{T_c}{T_{\Pi}} \mathbf{U}_{\text{ФМП}}(h, a) + \left( \frac{T_c}{T_{\Pi}} \right)^n \mathbf{U}_{\text{ХИП-эксп-}n}(h, a) \right] e^{-\frac{T_c}{T_{\Pi}}} \quad (32)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{ХИП-эксп-}n}(h) = \begin{cases} \frac{1-h}{2n!} - \frac{1}{2(n-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\pi k} \right)^{n+1} \sin(\pi k h) \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+n-1)!}{m!} J_{2m+n}(\pi k), \text{ при } 0 < h < 1, \\ 0, \text{ при } h < 0, 1 < h, \end{cases} \quad (33)$$

$$\mathbf{U}_{\text{ХИП-эксп-}n}(h, a) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-1)!} \int_{h\sqrt{1+a^2}}^1 R \left[ \operatorname{arccotg}(a) - \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) \right] \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m {}_2F_1\left(1-n-m, m+1; 1; R^2\right) dR, \text{ при } 0 < h^2(1+a^2) < 1, \\ 0, \text{ при } h^2(1+a^2) < 0, 1 < h^2(1+a^2). \end{cases} \quad (34)$$

где  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  – гипергеометрическая функция [16].

Хаотическая импульсная помеха с постоянной длительностью радиоимпульсов (ХИП-пост) – отличается от ФМП тем, что длительности радиоимпульсов помехи  $T_{\Pi}$  постоянны, но не равны длительностям тактовых интервалов сигнала  $T_c$ . Для ХИП-пост:

при  $T_c < T_{\Pi}$ :

$$\mathbf{Q}_{\text{ХИП-пост}}(h) = \left( 1 - \frac{T_c}{T_{\Pi}} \right) \mathbf{Q}_{\text{ГП}}(h) + \frac{T_c}{T_{\Pi}} \mathbf{Q}_{\text{ФМП}}(h),$$

$$\mathbf{U}_{\text{ХИП-пост}}(h, a) = \left( 1 - \frac{T_c}{T_{\Pi}} \right) \mathbf{U}_{\text{ГП}}(h, a) + \frac{T_c}{T_{\Pi}} \mathbf{U}_{\text{ФМП}}(h, a). \quad (35)$$

при  $T_{\Pi} < T_c$ :

$$\mathbf{Q}_{\text{ХИП-пост}}(h) = \frac{1-h}{2} - \frac{T_c}{T_{\Pi}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi r h)}{(\pi r)^2} J_0^{n-1} \left( \pi r \frac{T_{\Pi}}{T_c} \right) \left[ J_0 \left[ \left( 1 - n \frac{T_{\Pi}}{T_c} \right) \pi r \right] \times \right.$$

$$\left. \sin \left( \frac{T_{\Pi}}{T_c} \pi r \right) + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \left[ J_m \left[ \left( 1 - n \frac{T_{\Pi}}{T_c} \right) \pi r \right] J_{m+2k+1} \left[ \frac{T_{\Pi}}{T_c} \pi r \right] - \right.$$



$$- J_m \left[ \frac{T_{\Pi}}{T_c} \pi r \right] J_{m+2k+1} \left[ \left( 1 - n \frac{T_{\Pi}}{T_c} \right) \pi r \right] \right], \text{ при } 0 < h < 1,$$

$$\mathbf{Q}_{\text{ХИП-пост}}(h) = 0, \text{ при } h < 0, 1 < h, \quad (36)$$

где  $J_s(x)$  функция Бесселя порядка  $s$  [17],  $n = \left\lfloor \frac{T_c}{T_{\Pi}} \right\rfloor$  – округление  $\frac{T_c}{T_{\Pi}}$  до

ближайшего целого значения в меньшую сторону;

при  $n = 1$ ,  $h\sqrt{1+a^2} < 0$  и  $1 < h\sqrt{1+a^2}$ :  $\mathbf{U}_{\text{ХИП-пост}}(h, a) = 0$ ;

при  $n = 1$ ,  $2\frac{T_{\Pi}}{T_c} - 1 < h\sqrt{1+a^2} < 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\text{ХИП-пост}}(h, a) = & \frac{T_c}{T_{\Pi}} \frac{1}{\pi^2} \int_{h\sqrt{1+a^2}}^1 \left[ \text{arcctg}(a) - \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) \right] \times \\ & \times \left[ \frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \arcsin\left(\frac{2\frac{T_{\Pi}}{T_c}-1}{R}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{R \frac{T_c}{T_{\Pi}}} \times \right. \\ & \times \left. \mathbf{K} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(1-\frac{T_{\Pi}}{T_c}\right)^2 - \left(R-\frac{T_{\Pi}}{T_c}\right)^2}{\frac{T_{\Pi}}{T_c} R}} \right] \right] dR, \end{aligned} \quad (37)$$

при  $n = 1$ ,  $0 < h\sqrt{1+a^2} < 2\frac{T_{\Pi}}{T_c} - 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\text{ХИП-пост}}(h, a) = & \frac{T_c}{T_{\Pi}} \frac{1}{2\pi} \int_{h\sqrt{1+a^2}}^{2\frac{T_{\Pi}}{T_c}-1} \left[ \text{arcctg}(a) - \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) \right] \frac{R}{\sqrt{1-R^2}} dR + \\ & + \frac{T_c}{T_{\Pi}} \frac{1}{\pi^2} \int_{2\frac{T_{\Pi}}{T_c}-1}^1 \left[ \text{arcctg}(a) - \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) \right] \frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \arcsin\left(\frac{2\frac{T_{\Pi}}{T_c}-1}{R}\right) dR + \\ & + \frac{T_c}{T_{\Pi}} \frac{1}{2\pi^2} \int_{2\frac{T_{\Pi}}{T_c}-1}^1 \left[ \text{arcctg}(a) - \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) \right] \sqrt{R \frac{T_c}{T_{\Pi}}} \times \end{aligned}$$

$$\times \mathbf{K} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{T_{\Pi}}{T_c}\right)^2 - \left(R - \frac{T_{\Pi}}{T_c}\right)^2}{\frac{T_{\Pi}}{T_c} R}} \right] dR, \quad (38)$$

где  $\mathbf{K}(k)$  – полный эллиптический интеграл [16],  
при  $n > 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\text{ХИП-пост}}(h, a) &= \frac{T_c}{T_{\Pi}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{h\sqrt{1+a^2}}^1 \left[ \text{arctg}(a) - \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) \right] R J_0(R\rho) dR \times \\ &J_0^{n-1}\left(\frac{T_{\Pi}}{T_c} \rho\right) \left\{ J_0 \left[ \left(1 - n \frac{T_{\Pi}}{T_c}\right) \rho \right] \sin\left(\frac{T_{\Pi}}{T_c} \rho\right) + \right. \\ &+ 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \left[ J_m \left[ \left(1 - n \frac{T_{\Pi}}{T_c}\right) \rho \right] J_{m+2k+1} \left[ \frac{T_{\Pi}}{T_c} \rho \right] - \right. \\ &\left. \left. - J_m \left[ \frac{T_{\Pi}}{T_c} \rho \right] J_{m+2k+1} \left[ \left(1 - n \frac{T_{\Pi}}{T_c}\right) \rho \right] \right] \right\} d\rho, \text{ при } 0 < h^2(1+a^2) < 1. \\ \mathbf{U}_{\text{ХИП-пост}}(h, a) &= 0, \text{ при } h^2(1+a^2) < 0, 1 < h^2(1+a^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Хаотическая импульсная помеха с кратной длительностью радиоимпульсов (ХИП-крат) – отличается от ХИП-пост тем, что длительности радиоимпульсов помехи  $T_{\Pi}$  кратны длительностям тактовых интервалов сигнала  $T_c$ . Для ХИП-крат:

при  $T_c < T_{\Pi}$ ,  $\frac{T_{\Pi}}{T_c} = n$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{ХИП-крат}}(h) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{Q}_{\text{ГП}}(h) + \frac{1}{n} \mathbf{Q}_{\text{ФМП}}(h), \\ \mathbf{U}_{\text{ХИП-крат}}(h, a) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{U}_{\text{ГП}}(h, a) + \frac{1}{n} \mathbf{U}_{\text{ФМП}}(h, a). \end{aligned} \quad (40)$$

при  $T_{\Pi} < T_c$ ,  $\frac{T_{\Pi}}{T_c} = \frac{1}{n}$ :

$$\mathbf{Q}_{\text{ХИП-крат}}(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-h) - n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^2} \sin(\pi k h) \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) J_0^{n-1}\left(\frac{\pi k}{n}\right), \text{ при } 0 < h < 1, \\ 0, \text{ при } h < 0, 1 < h, \end{cases}$$

$$U_{\text{ХИП-крат}}(h, a) = \begin{cases} \frac{n}{2\pi} \int_0^\infty \sin\left(\frac{\rho}{n}\right) J_0^{n-1}\left(\frac{\rho}{n}\right) \times \\ \times \int_{h\sqrt{1+a^2}}^1 \left[ \text{arcctg}(a) - \arcsin\left(\frac{h}{R}\right) \right] \times \\ \times R J_0(R\rho) dR d\rho, \text{ при } 0 < h^2(1+a^2) < 1, \\ 0, \text{ при } h^2(1+a^2) < 0, 1 < h^2(1+a^2). \end{cases} \quad (41)$$

На рис. 13 и рис. 14 сплошными линиями изображены зависимости  $\bar{p}_b$  в канале стандарта MIL-STD-188-110 от отношения мощности помехи к мощности сигнала (отношения помеха/сигнал) для случая воздействия на КПИ ГП и ФМП.

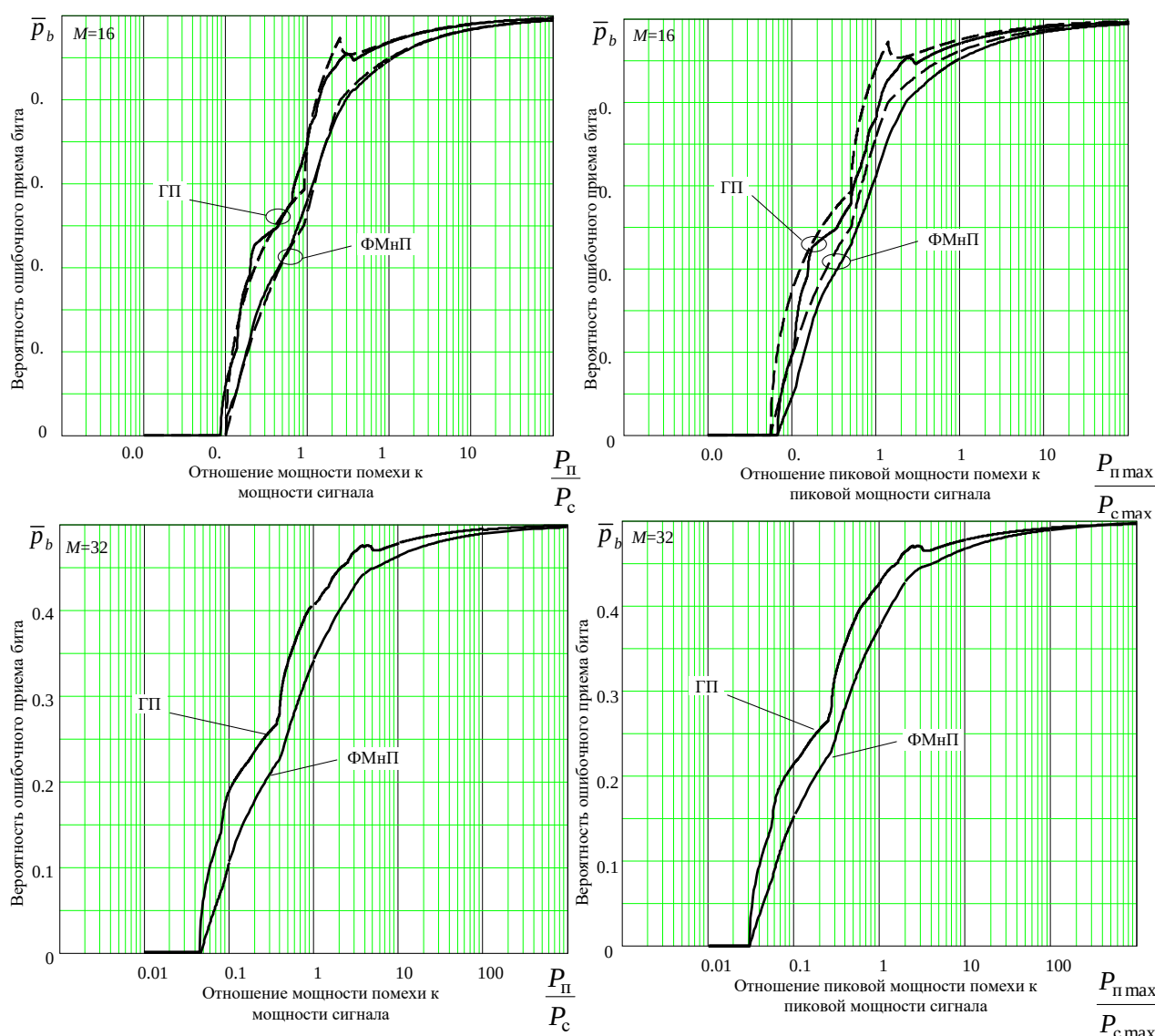


Рис. 13. Зависимости вероятности ошибочного приема бита сигналов 16-КАМ и 32-КАМ от отношения помеха/сигнал

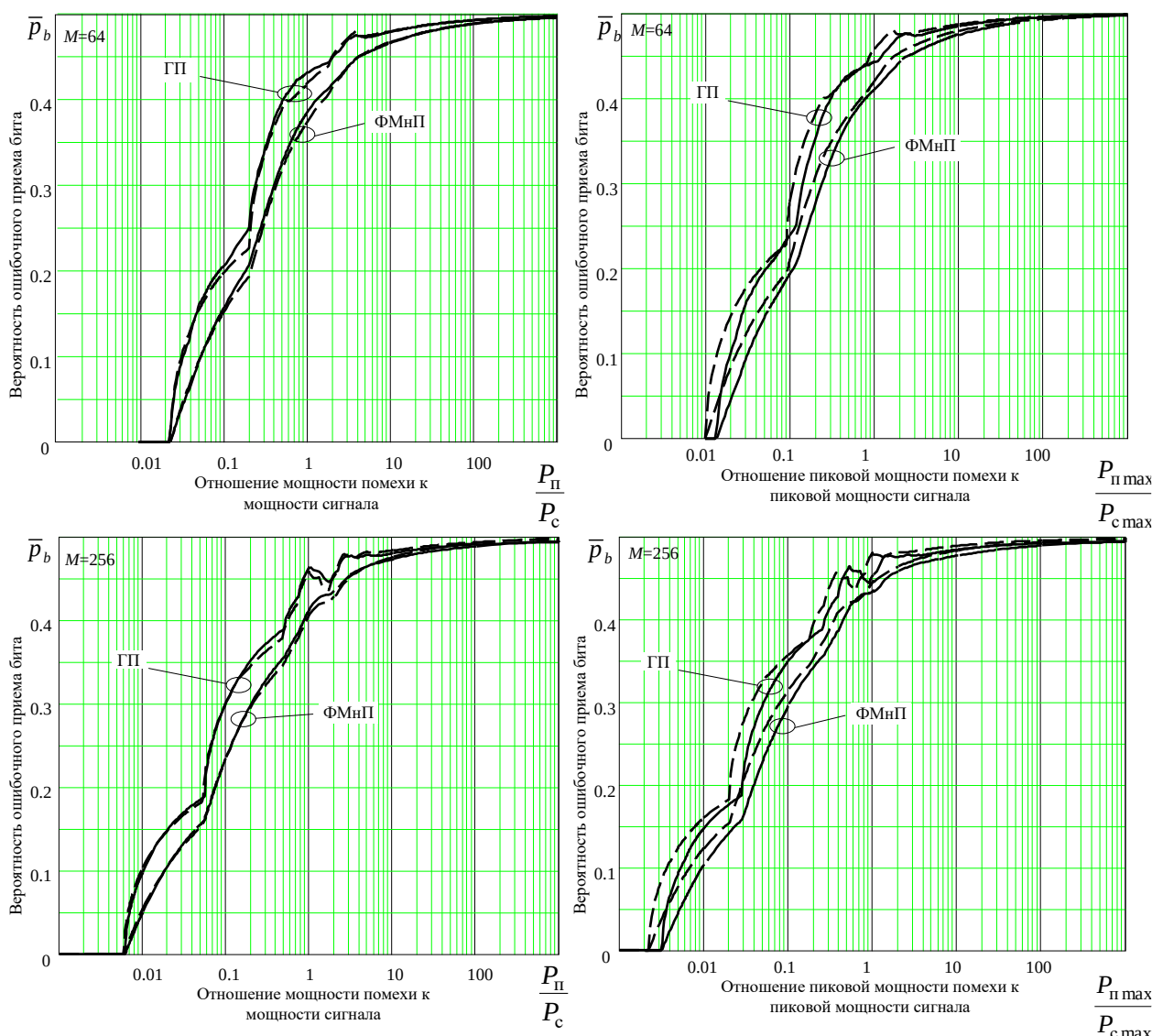


Рис. 14. Зависимости вероятности ошибочного приема бита сигналов 64-КАМ и 256-КАМ от отношения помеха/сигнал

Величина  $q$  в аргументе  $h = q \cdot d$  функций  $T_*(h, a)$  и  $Q_*(h)$  в расчетах, при заданном отношении средних мощностей определялись  $q = \frac{P_c}{P_{\Pi}} \sqrt{\frac{P_c}{P_{\Pi}}}$ , где  $P_{\Pi} = \sqrt{2}$  – пик-фактор помехи, а при заданном отношении пиковых мощностей как  $q = \sqrt{\frac{P_{c \max}}{P_{\Pi \max}}}$ . На этих же рисунках штриховыми линиями изображены аналогичные зависимости, но для сигналов М-КАМ с квадратными СКК, с таким же количеством сигнальных точек, как и у сигналов MIL-STD-188-110, за исключением случая  $M = 32$ , так как М-КАМ сигнала с квадратным созвездием и таким количеством точек не существует.

Зависимости для М-КАМ сигнала с квадратным созвездием рассчитаны с использованием полученного в [16] аналитического выражения:

$$\bar{p}_b = \frac{2}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{i=0}^{\sqrt{M}-1} (-1)^{\left\lfloor i \frac{2^{k-1}}{\sqrt{M}} \right\rfloor} \times \\ \times \left( 2^{k-1} - \left\lfloor i \frac{2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \mathbf{Q}[q \cdot (2i+1)\Delta], \quad (42)$$

с заменой в нем функции Гаусса на  $\mathbf{Q}_*(h)$ , а также с учетом того, что для М-КАМ сигнала с квадратным созвездием минимальное Евклидово расстояние и пик-фактор определяются выражениями:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{M}-1)} \text{ и } \Pi_c = \sqrt{2} \sqrt{3 \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}+1}}. \quad (43)$$

Как видно из приведенных на рис. 13 и рис. 14 зависимостей, для всех вариантов СКК, вероятность ошибочного приема бита на фоне СПП при заданном отношении средних мощностей помехи и сигнала у сигналов стандарта MIL-STD-188-110 и М-КАМ сигналов с квадратной СКК примерно одинакова. Поэтому при приближенной оценке помехоустойчивости сигналов стандарта MIL-STD-188-110 можно использовать компактные аналитические соотношения, применяемые для оценки вероятности ошибочного приема бита М-КАМ сигналов с квадратной СКК, за исключением сигналов с  $M = 32$ , поскольку с таким количеством символов сигналов с квадратными СКК не существует. При заданном отношении пиковых мощностей помехи и сигнала видно, что помехоустойчивость КАМ сигнала стандарта MIL-STD-188-110 выше, чем КАМ сигнала с квадратной СКК, при этом для достижения примерно таких же значений вероятности ошибочного приема бита у сигналов стандарта MIL-STD-188-110 как у КАМ сигнала с квадратной СКК требуется увеличение пиковой мощности помехи более, чем на 20%, при  $M = 16$ , более чем на 35%, при  $M = 64$ , и более чем на 43%, при  $M = 256$ . Также зависимости  $\bar{p}_b$  от отношения помеха/сигнал на фоне ГП (наличие локальных максимумов и минимумов) показывают, что принцип соответствия большему расстоянию Хэмминга большего расстояния Евклида для при отображении кодовых символов в сигнальные точки в полной мере не выполняется для сигналов обоих стандартов.

На рис. 15 и рис. 16 показаны зависимости вероятности ошибочного приема бита в каналах с М-КАМ стандарта MIL-STD-188-110 под воздействием ХИП различными длительностями радиоимпульса от отношения длительности радиоимпульса помехи  $T_{\Pi}$  (средней  $\bar{T}_{\Pi}$  для ХИП-эксп) к длительности тактового интервала сигнала при заданном отношении сигнал/помеха по средней мощности  $q^2$ . Сплошными линиями обозначено воздействие ХИП-эксп, штриховыми линиями воздействие ХИП-пост, на которых точками показаны значения вероятностей ошибок для случаев, когда длительности тактовых интервалов сигнала и помехи находятся в кратном соотношении.

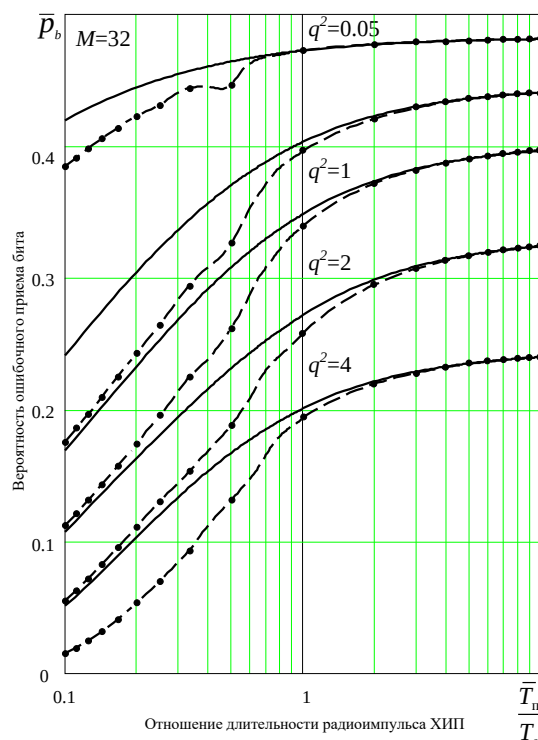
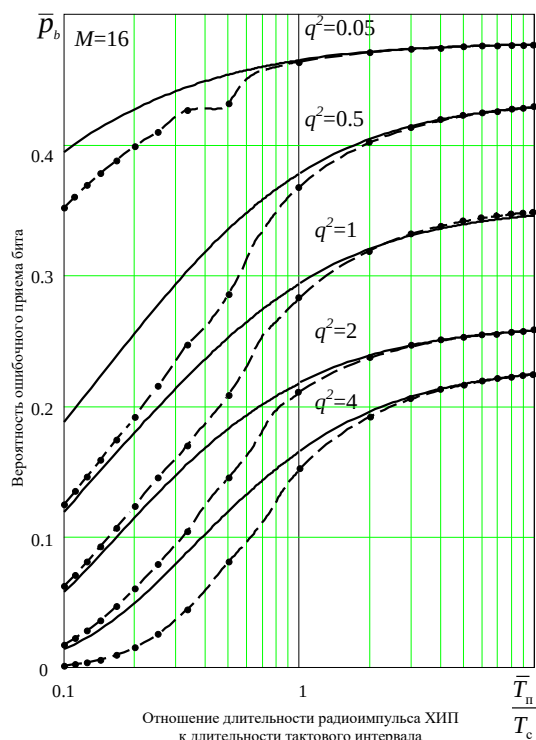


Рис. 15. Зависимости вероятностей ошибочного приема бита сигналов 16-КАМ и 32-КАМ от отношения длительности радиоимпульса помехи к длительности тактового интервала сигнала под воздействием ХИП с различной длительностью радиоимпульса при заданном отношении сигнал/помеха

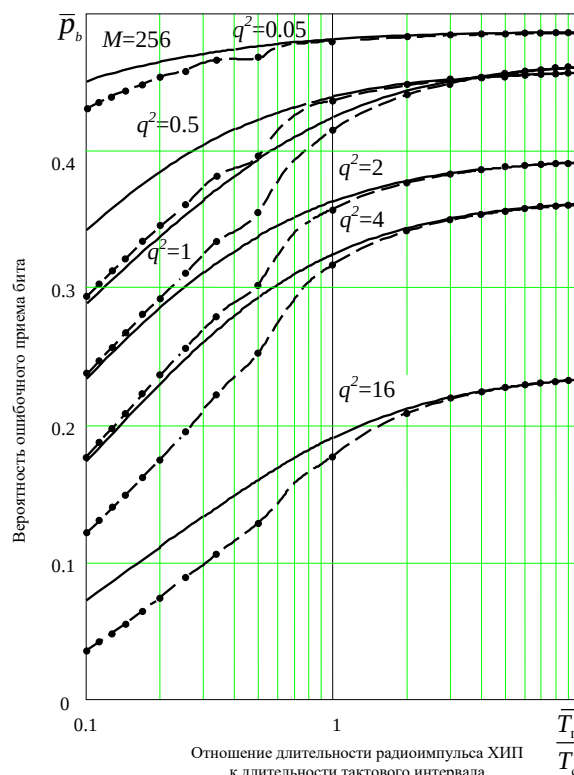
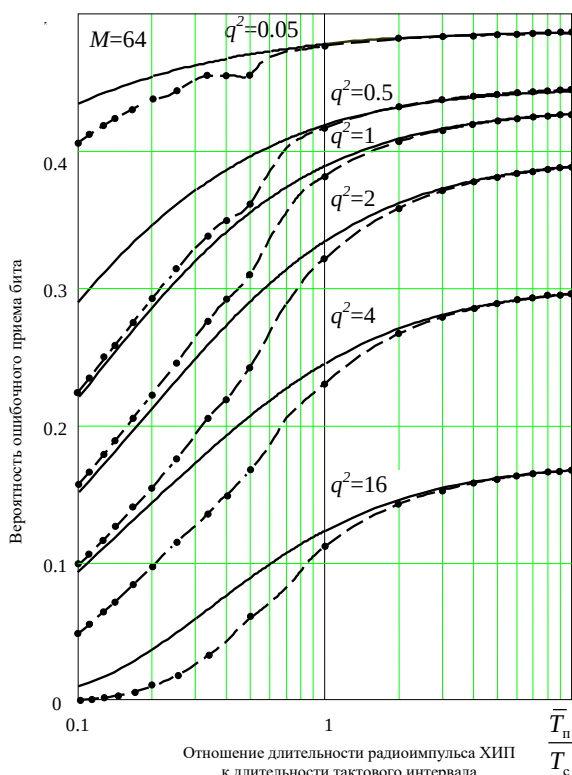


Рис. 16. Зависимости вероятностей ошибочного приема бита сигналов 64-КАМ и 256-КАМ от отношения длительности радиоимпульса помехи к длительности тактового интервала сигнала под воздействием ХИП с различной длительностью радиоимпульса при заданном отношении сигнал/помеха



Из полученных зависимостей на рис. 15 и рис. 16 видно увеличение степени мешающего воздействия как ХИП-эксп, так и ХИП-пост с увеличением длительности радиоимпульса помехи. С уменьшением длительности радиоимпульса при воздействии ХИП-пост до значений меньших длительности тактового интервала сигнала ее мешающее воздействие резко уменьшается, и более плавно это снижение происходит, если помеха представляет собой ХИП-эксп. При этом приближенная оценка помехоустойчивости КПИ под воздействием ХИП-пост может проводиться с использованием более простых соотношений, полученных для помехи ХИП-крат.

### Выводы

Разработан алгоритм численного расчета вероятности ошибочного приема бита при когерентном приеме равновероятных сигналов с двумерными СКК, на основе формализации правил, определения границ ОПР и правил представления вероятностей попадания случайной точки в эти области в виде суммы вероятностей попадания в области, ограниченные лучом или отрезком.

В отличие от известных алгоритмов расчета вероятности ошибочного приема бита в каналах с двумерными СКК под воздействием помех предлагаемый алгоритм реализует разбиение пространства сигналов на ОПР, что позволяет использовать его для расчетов в случаях, когда такое разбиение заранее неизвестно; при представлении вероятности попадания случайной точки, в многоугольник, окружающий заданную точку СКК, в виде вероятностей попадания в области, ограниченные отрезком и лучом, разработанный алгоритм использует информацию о координатах соседних с рассматриваемой областью точек СКК, что существенно упрощает вычисление условных вероятностей ошибок.

Разработанный алгоритм численного расчета вероятности ошибочного приема бита при когерентном приеме сигналов с двумерными СКК является универсальным и может быть применен для анализа помехоустойчивости каналов с двумерными СКК произвольной конфигурации. В качестве примера использования алгоритма проведен расчет вероятности ошибочного приема бита для частного случая двумерной СКК (КАМ сигналов стандарта MIL-STD-188-110), при этом проведен расчет ОПР, вероятности попадания случайной точки в ОПР представлены в виде сумм вероятностей попадания случайной точки в области, ограниченные отрезком и лучом, рассчитаны зависимости вероятности ошибочного приема бита на фоне СПП от параметров сигналов и помех.

Полученные результаты могут быть использованы для оценки помехоустойчивости сигналов с двумерными СКК произвольной конфигурации, например СКК, предложенных в работах [17, 18], в интересах проведения сравнительного анализа разных вариантов СКК на фоне заданной СПП, или для оценки степени мешающего воздействия различных СПП на СКК заданной конфигурации. Не исключена возможность использования разработанного алгоритма для разработки новых вариантов двумерных СКК, с повышенной помехоустойчивостью на фоне заданной помехи.

## Литература

1. Современная радиоэлектронная борьба. Вопросы методологии / под ред. В. Г. Радзиевского. – М.: Радиотехника, 2006. – 424 с.
2. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. – 1104 с.
3. Прокис Дж. Цифровая связь. – М.: Радио и связь, 1991. – 905 с.
4. International Telecommunication Union. Radio Communication Study Group 9 Draft Modification of Recommendation ITU-R F.763-5. Data transmission over HF circuits using phase shift keying or quadrature amplitude modulation, 2005. – 52 p.
5. MIL-STD-188-110 B. Military Standard - Interoperability and Performance Standards for Data Modems. – U. S. Department of Defense, 2000. – 135 p.
6. MIL-STD-188-110 C. Interoperability and Performance Standards for Data Modems. – U. S. Department of Defense, 2011. – 247 p.
7. Standardization Agreement 4539. Technical standards for non-hopping HF Communications Waveforms. – North Atlantic Treaty Organization, Edition 1, 2005. – 51p.
8. Савищенко Н. В. Специальные интегральные функции, применяемые в теории связи. – СПб.: ВАС, 2012. – 560 с.
9. Михалев В. В. Расчет вероятности ошибочного приема бита и вероятности ошибочного приема символа в каналах передачи информации с фазовой манипуляцией на фоне сигналоподобных помех // Информационно-экономические аспекты стандартизации и технического регулирования. 2020. № 5 (57). С. 114-123.
10. Ложкин К. Ю., Петров А. В., Прожеторко С. С. Аналитические зависимости средней вероятности искажения бита М-КАМ сигнала на фоне гармонической или фазоманипулированной помех // Электромагнитные волны и электронные системы. 2018. № 5. С. 32-41.
11. Ложкин К. Ю., Петров А. В., Миронов В. А., Михалев В. В., Прожеторко С. С. Аналитические зависимости средней вероятности искажения бита М-КАМ-сигнала на фоне гармонической или фазоманипулированной помехи с учетом замираний // Радиотехника. 2020. № 4 (8). С. 27–35.
12. Петров А. В., Михалев В. В. Вероятность ошибочного приема бита в цифровом канале передачи данных на фоне хаотической импульсной помехи со случайной длительностью радиоимпульса // Системы управления, связи и безопасности. 2019. № 3. С. 33-50.
13. Lassing J., Strom E. G., Ottosson T. Computation of the exact bit-error rate of coherent M-ary PSK with Gray code bit mapping // IEEE Transactions on Communication. 2003. Vol. 51. No. 11. P. 1758-1760.
14. Дворников С. В., Пшеничников А. В., Эконом В. П. Метод оценки помехоустойчивости сигнальных конструкций квадратурной модуляции с трансформированными констелляционными диаграммами // Радиопромышленность. 2017. № 1. С. 51-56.
15. Дворников С. В., Пшеничников А. В., Формирование спектрально-эффективных сигнальных конструкций в радиоканалах передачи данных

контрольно-измерительных комплексов // Известия вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 3. С. 221–228.

16. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т.3. Специальные функции. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.

17. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т.2. Специальные функции. – М.: Физматлит, 2003. – 664 с.

18. Cho K., Yoon D. On the general BER Expression of One-and Two-Dimensional Amplitude Modulations // IEEE Transactions on Communication. 2002. Vol. 50. No. 7. P. 1074-1080.

## References

1. *Sovremennaya radioelektronnaya bor'ba. Voprosy metodologii* [Modern electronic warfare. Methodology issues]. Edited by V. G. Radzievsky. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2006. 424 p. (in Russian).

2. Sklyar B. *Digital communications. Fundamentals and applications*. Prentice Hall, 2001. 1079 p.

3. Proakis J. G. *Digital communications*. McGraw-Hill, 1995. 905 p.

4. *International Telecommunication Union. Radio Communication Study Group 9 Draft Modification of Recommendation ITU-R F.763-5. Data transmission over HF circuits using phase shift keying or quadrature amplitude modulation*, 2005. 52 p.

5. *MIL-STD-188-110 B. Military Standard - Interoperability and Performance Standards for Data Modems*. U. S. Department of Defense, 2000. 135 p.

6. *MIL-STD-188-110 C. Interoperability and Performance Standards for Data Modems*. U. S. Department of Defense, 2011. 247 p.

7. *Standardization Agreement 4539. Technical standards for non-hopping HF Communications Waveforms*. North Atlantic Treaty Organization, Edition 1, 2005. 51p.

8. Savishchenko N. V. *Special'nye integral'nye funktsii, primenyaemye v teorii svyazi*. [Special integral functions used in communication theory]. Saint-Petersburg, Military academy of communications Publ., 2012. 560 p. (in Russian).

9. Mihalev V. V. Raschet veroyatnosti oshibochnogo priema bita i veroyatnosti oshibochnogo priema simvolav kanalah peredachi informacii s fazovoj manipulyaciej na fone signalopodobnyh pomekh [Calculation of the bit-error rate and symbol-error rate in a transmitting channel with phase shift keying against the background of signal-like interference]. *Information and economic aspects of standardization and technical regulation*, 2018, no. 5 (57), pp. 114-123 (in Russian).

10. Lozhkin K. YU., Petrov A. V., Prozhetskoy S. S. Analiticheskie zavisimosti srednej veroyatnosti iskazheniya bita M-KAM signala na fone garmonicheskoy ili fazomanipulirovannoy pomekh [Analytical dependences of bit distortion average probability M-QAM of a signal against harmonic or PSK interference]. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy*, 2018, no. 5, pp. 32-41 (in Russian).

11. Lozhkin K. YU., Petrov A. V., Mironov V. A., Mihalev V. V., Prozhetskoy S. S. Analiticheskie zavisimosti srednej veroyatnosti iskazheniya bita M-KAM signala na fone garmonicheskoy ili fazomanipulirovannoy pomekh s uchedom zamiraniy. [Analytical dependences of bit distortion average probability M-QAM of a

signal against harmonic or PSK subject to fading]. *Radiotekhnika*, 2020, no. 4(8), pp. 27-35 (in Russian).

12. Petrov A. V., Mikhalev V. V. Veroyatnost' oshiboch'nogo priema bita v cifrovom kanale peredachi dannyh na fone haoticheskoy impul'snoj pomekhi so sluchajnoj dlitel'nost'yu radioimpul'sa [Bit-Error Rate in a Digital Data Transmitting Channel at Chaotic Impulse Noise with Random Radio-Pulse Duration Action]. *Systems of Control, Communication and Security*, 2019, no. 3, pp. 33-50 (in Russian).

13. Lassing J., Strom E. G., Ottosson T. Computation of the exact bit-error rate of coherent M-ary PSK with Gray code bit mapping. *IEEE Transactions on Communication*, 2003, vol. 51, no. 11, p. 1758-1760.

14. Dvornikov S. V., Pshenichnikov A. V., Econom V. P. Method of evaluation of immunity of quadrature modulation signal structures with transformed constellation diagrams. *Radio industry*, 2017, no. 1, pp. 51-56 (in Russian).

15. Dvornikov S. V., Pshenichnikov A. V. Design of spectral-efficient signal construction in radio data transmission control and measuring complexes // *Journal of Instrument Engineering*, 2017, vol. 60, no. 3, pp. 221-228 (in Russian).

16. Prudnikov A. P., Brychkov YU. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Special'nye funktsii* [Integrals and series. Special functions]. Vol. 3. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 688p. (in Russian).

17. Prudnikov A. P., Brychkov YU. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Special'nye funktsii* [Integrals and series. Special functions]. Vol. 2. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 664p. (in Russian).

18. Cho K., Yoon D. On the general BER Expression of One-and Two-Dimensional Amplitude Modulations. *IEEE Transactions on Communication*, 2002, vol. 50, no. 7, p. 1074-1080.

Статья поступила 23 апреля 2021 г.

### Информация об авторах

*Петров Андрей Викторович* – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры боевого применения средств радиоэлектронной борьбы (с наземными системами управления). Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж). Область научных интересов: статистические методы синтеза оптимальных помех и оценка эффективности функционирования систем радиосвязи в условиях помех произвольной структуры. E-mail: andviktpetrov@yandex.ru

*Михалёв Валерий Вадимович* – соискатель ученой степени кандидата технических наук. Адъюнкт кафедры боевого применения средств радиоэлектронной борьбы (с наземными системами управления). Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж). Область научных интересов: статистические методы синтеза оптимальных помех и оценка эффективности функ-



ционирования систем радиосвязи в условиях помех произвольной структуры. E-mail: vajierka@mail.ru

Клюев Александр Александрович – инженер-конструктор лаборатории прикладной электроники. АО Межрегиональная группа компаний «Инновационные технологии и робототехнические системы». Область научных интересов: статистические методы синтеза оптимальных помех и оценка эффективности функционирования систем радиосвязи в условиях помех произвольной структуры. E-mail: shura-klyuev36vip@mail.ru

Адрес: 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А.

---

## An Algorithm for Computing the Bit-Error Rate in Data Transmission Channels Using Two-Dimensional Signal-Code Constructions in the Presence of Signal-Like Jamming

A. V. Petrov, V. V. Mikhalev, A. A. Klyuev

**Problem statement.** When estimating the anti-jamming robustness of data transmission channels (DTCs) under signal-like jamming (SLJ) environment a signal space is partitioned into decision regions (DR) for each variant of a signal in order to compute the bit-error rate (BER) in DTCs using two-dimensional signal-code constructions (2DSCC). Additionally, conditional probabilities of random points to fall within DRs are calculated. If a decision is made with the help of the maximum-likelihood criterion the boundaries of DRs are composed of straight line segments and (or) half rays while probabilities of falling within a DR can be represented as sums of probabilities of falling within space regions bounded by a half ray or line segment. If DR configurations are complex it is advisable to present computations in the form of an algorithm and implement it on a PC. **The aim of the work** is to develop an algorithm for the BER computation in case of coherent reception of equiprobable 2DSCC signals based on formalization of rules for determination of DR boundaries and rules for representation of probabilities of a random point to fall within DRs as a sum of probabilities of falling within regions bounded by a half ray or segment. **Methods used.** The rules for partitioning the two-dimensional signal space into DRs were defined based on a geometric interpretation of interaction of signals and SLJ in a coherent demodulator as well as the optimal signal reception and analytical geometry methods. When evaluating the probabilities of random variables to fall within DRs the integrals were used of distribution densities of SLJ vectors on a signal plane taken in the previous works. **Novelty.** The algorithm can be used when the partition of a signal space into DRs is unknown in advance. In representation of the probability of a random point to fall within a DR as probabilities of falling within DRs bounded by a segment or half ray the algorithm uses the information about coordinates of adjacent SCC points thus significantly simplifying the computation of the conditional probabilities of errors. **Result.** The algorithm is universal and can be used to analyze the anti-jamming robustness of channels using two-dimensional signal-code constructions of arbitrary configuration. **Practical significance.** The results can be used to compare different variants of SLJs for a given SCC configuration or to elaborate new variants of 2D SCCs with the increased anti-jamming robustness against preassigned jamming.

**Keywords:** quadrature amplitude manipulation, bit error rate, Owen function, Gaussian function, signal-like jamming.

### Information about Authors

*Andrey Viktorovich Petrov* – Ph.D. of Engineering Sciences, Docent, Associate Professor at the Department of Combat Use of the Electronic Warfare Assets (against ground control systems). Military Educational and Scientific Center of the Air Force “N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin Air Force Academy” (Voronezh). Research interests: statistical methods for optimal interference synthesis and evaluation of the performance of radio communication systems in arbitrary interference environment. E-mail: andviktpetrov@yandex.ru

*Valeriy Vadimovich Mikhalev* – Doctoral Student, Postgraduate Student of the Department of Combat Use of the Electronic Warfare Assets (against ground control systems). Military Educational and Scientific Center of the Air Force “N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin Air Force Academy” (Voronezh). Research interests: statistical methods for optimal interference synthesis and evaluation of the performance of radio communication systems in arbitrary interference environment. E-mail: vajieпка@mail.ru

*Aleksandr Aleksandrovich Klyuev* – Design Engineer of the Applied Electronics Laboratory. Interregional Holding Company “Intehros”. Research interests: statistical methods for optimal interference synthesis and evaluation of the performance of radio communication systems in arbitrary interference environment. E-mail: shura-klyuev36vip@mail.ru

Address: Russia, 394064, Voronezh, ul. Staryh Bolshevikov, 54A.