УДК 621.391

Теорема о представлении непрерывного многопараметрического сигнала с ненулевой дисперсией дискретными отсчетами

Иванов С. А., Стародубцев Ю. И.

Постановка задачи. *Экспоненциальный рост генерации нагрузки на инфокоммуникационные системы обуславливает постоянно растущие потребности в развитии соответствующей инфраструктуры, методов и способов эффективной передачи данных, подходов к обработке исходных сигналов (акустических, видео) для их представления в форме, пригодной для передачи по инфокоммуникационным элементам. Первоначальным и базовым этапом обработки исходных непрерывных сигналов является их дискретизация. Исторически, фундаментальной теоретической основой дискретизации непрерывных функций стала теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона. Эта теорема в различных формах, и множество других исследований в направлении дискретизации сигналов, направлены на поиск оптимальных решений между снижением количества отсчетов (снижением нагрузки на ресурсы сети за счет уменьшения информационной избыточности дискретного представления исходных непрерывных сигналов) и выполнением требований к допустимой погрешности при интерполяции исходного сигнала на приемной стороне. Регулярное изменение условий поиска этого баланса обуславливается постоянным технологическим и техническим развитием инфокоммуникационных систем, потребителей их услуг, а также количественным и качественным ростом требований к этим системам. Развитие связи привело к появлению в современных инфокоммуникационных системах и средствах свойств памяти и вычислительной способности, непрерывные сигналы расширяют свои диапазоны частот, а средства их генерации позволяют представлять состояние источника расширенным количеством параметров – это определяет изменение условий решения задачи дискретизации.* ***Целью*** *работы является снижение информационной избыточности дискретного представления непрерывного сигнала (процесса) по сравнению с традиционными решениями (на примере теоремы Котельникова).* ***Методы.*** *Высокие показатели свойств памяти и вычислительной способности инфокоммуникационных средств и систем позволили при решении задачи применить методы статистического анализа данных о параметрах сигнала, записанных в память. Это позволило отказаться в данном решении от применяемого при решении этого класса задач энтропийного подхода. Соотношения, полученные в предыдущих исследованиях на основе методов гармонического анализа по преобразованиям Фурье, приняты в качестве априорных данных.* ***Результаты.*** *Сформулирована и доказана теорема, являющаяся развитием теории дискретного представления непрерывных процессов по отношению к дискретизации сигналов при их передаче по каналам связи с памятью. Доказательство теоремы позволяет утверждать, что в условиях передачи многопараметрических непрерывных сигналов по каналам с памятью их дискретизация возможна отсчетами, количество которых существенно меньше, чем в решении В.А. Котельникова, при этом возможно развитие решения задачи усечения верхней частоты сигнала. Для приближенного нахождения практически значимого выигрыша в снижении информационной избыточности дискретного представления исходного сигнала возможно использовать представленный в оценке коэффициент, отображающий отношение информационной нагрузки непрерывного сигнала на канал (линию) связи в решении Котельникова к информационной нагрузке представленного решения.*

Ключевые слова: *канал с памятью, непрерывный многопараметрический сигнал, частота изменения параметра, дискретизация.*

Библиографическая ссылка на статью:
Иванов С. А., Стародубцев Ю. И. Теорема о представлении непрерывного многопараметрического сигнала с ненулевой дисперсией дискретными отсчетами // Системы управления, связи и безопасности. 2021. № 2. С. 12-36. DOI: 10.24412/2410-9916-2021-2-12-36.
Reference for citation:
Ivanov S. A., Starodubtsev Yu. I. Theorem of representation of continuous multivariable signal by non-zero dispersion by discrete samples. *Systems of Control, Communication and Security*, 2021, no. 2, pp. 12-36 (in Russian). DOI: 10.24412/2410-9916-2021-2-12-36.

Введение

В современных сетях и системах связи практически весь информационный обмен осуществляется посредством систем передачи с цифровой обработкой сигналов. Основой цифровой обработки исходных непрерывных сигналов (носителей информации о физических процессах) является процесс дискретизации основные принципы которого определены теоремой, вошедшей в историю как «Теорема отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона» (ТУКШ). По наше время установленная в ней закономерность имеет фундаментальное значение для оптимизации представления непрерывных функций дискретными отсчетами. Несоблюдение условий теоремы ведет либо к росту ошибки при восстановлении сигнала на приемной стороне, т.е. к нарушению требований к качеству информационного обмена, либо к необоснованной информационной избыточности дискретного представления исходного сигнала, что приводит к избыточному росту нагрузки на систему передачи, т.е. снижению экономической эффективности инфокоммуникационной системы в целом.

Теорема отсчетов (интерполяции, ТУКШ) как в части утверждения возможности реконструкции непрерывного сигнала по дискретным отсчетам, так и в части способа реконструкции, рассматривалась в математическом плане ранее Э. Борелем (1898 г.), Э. Уиттекером (1915 г.), Г. Найквистом (1928 г.) [4, 5]. Однако о возможности полной реконструкции исходного сигнала по дискретным отсчетам в этих работах речь не идет. Данную задачу решал В.А. Котельников в своей работе «О пропускной способности «эфира» и проволоки электросвязи» [1], которая была написана по результатам его исследований применительно к техническому и технологическому уровню развития связи 30-х годов XX века. Стоящая перед Котельниковым научная задача заключалась в повышении эффективности использования частотного ресурса линии связи (простого канала, рис. 1) путем сокращения необходимой полосы частот (уплотнения) для передачи непрерывного сигнала без снижения достоверности его приема. Причем разделение (уплотнение) сигналов должно было осуществляться не по частотному признаку [1].

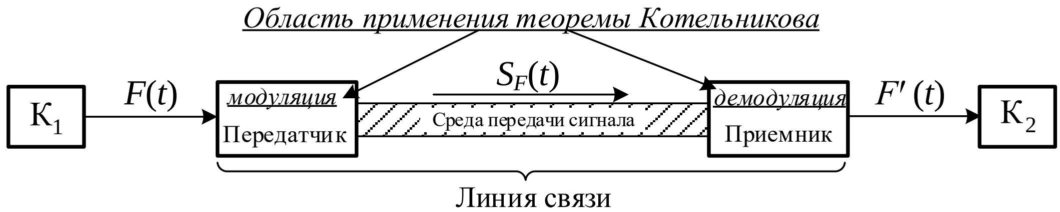

Рис. 1. Графическое представление условий решения задачи в 30-е годы XX века. K_1 и K_2 – первый и второй корреспонденты; $F(t)$ – исходный непрерывный сигнал, передаваемый K_1; $S_F(t)$ – сигнал, модулированный $F(t)$, передаваемый в среде передачи; $F'(t)$ – восстановленный непрерывный сигнал, получаемый K_2

№2. 2021
ISSN 2410-9916

Среди аналогов разработанного решения были способы телеграфирования. Рассматривалась состоящая из частот от 0 до f_1 случайная функция (сигнал) $F(t)$, представленная только одним изменяющимся параметром.

Результатом исследования стала работа [1], в которой представлены семь теорем, но все они являлись в определенной степени развитием одной теоремы, в которой получено одно из фундаментальных соотношений теории цифровой обработки сигналов, сформулированной следующим образом:

любую функцию $F(t)$, состоящую из частот от 0 до f_1, можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через $1/(2f_1)$

$$\tau_К = 1/\left(2f_1\right), \tag{1}$$

где f_1 – верхняя частота диапазона.

В [1, 2] числа представлены мгновенными отчетами (импульсами длительностью $\Delta\tau \to 0$), периодичность их следования $\tau_К$ постоянна, f_1 неизменна. Доказательство представленной теоремы базировалось на методах представления функций, разработанных Ж-Б. Фурье [3]. Такой же подход в своих теоремах использовал К. Шеннон (1949 г.) [4]. ТУКШ получила свое развитие в работах многих ученых в области математики, связи, электротехники, информатики и других смежных областей. В [5] приведена хронология развития положений теоремы по ключевым, по мнению автора, работам ученых, к которым относятся: 1915, E.T. Whittaker [6]; 1927, W.L. Ferrar [7]; 1928, H. Nyquist [8]; 1928, Р. Хартли; 1929, J.M. Whittaker [9], 1933, В.А. Котельников [1], 1946, D. Gabor; 1949, C. Shannon [4, 10]; 1949, I. Someya [11]; 1953, A. Kohlenberg [12]; 1956, D.L. Jagerman, L.Fogel [13]; 1956, J. Yen [14]; 1958, И.Т. Турбович [15]; 1957, S. Goldman; 1957, P. Weiss [16]; 1959, H. Kramer [17]; 1959, A. Billings [18]; 1959, Б.С. Цыбаков, В.П. Яковлев [19]; 1960, Н.К. Игнатьев [20]; 1961, F. Reza [21]; 1961, D. Middleton; 1962, A. Papoulis [22]; 1971, S. Stein, J. Jones; 1972, Н.О. Гаарднер [23]; 1974, K. Cattermole; 1975, Р.Л. Стратонович; 1976, В.И. Бабенко [24]; 1977, A. Dzherri [25]; 1977, Я.И. Хургин, В.П. Яковлев [26]; 1980, А.В. Алексеев, Ю.И. Шавельский [27]; 1991, А.К. Цыцулин [28]; 2004, М.А. Басараб, Е.Г. Зелкин, В.Ф. Кравченко [29].

Фундаментальные работы этих ученых направлены на решение различных проблем и задач дискретизации непрерывных функций, в результате которого определено соотношение (1), введены кардинальные и финитные функции, определена минимальная полоса частот для передачи дискретных сигналов, теорема распространена на полосовые и многомерные сигналы и применена в теории связи, проведен анализ ошибок дискретизации, функции представлены неравностоящими дискретными отсчетами, обоснована частота усечения сигнала по шуму, учтены погрешности преобразования, получены практические реализации в смежных областях науки, получено множество практических обобщений разработанных теорем.

Дискретное представление непрерывной функции, используемое при решении широкого класса задач передачи информации и исследованное в представленных работах, сопровождается возникновением погрешностей, к числу основных из которых, с соответствующим ранжированием, относятся [22, 23, 28, 30]:

- интерференционные погрешности, появляющиеся вследствие некорректного выбора соотношения частоты выборки значений параметров функции с их характеристиками (частоты дискретизации), а также условия о финитности (непрерывности) спектра сигнала;
- погрешности усечения, возникающие при ограничении верхней частоты изменения параметра (использовании конечного числа отсчетов вместо бесконечного ряда);
- погрешность дрожания, вызванная отличием моментов взятия отсчетов от точек отсчета;
- погрешности недискретного представления сигналов, обусловленные спецификой и погрешностями последующей обработки сигналов.

В статье предложен новый подход и соответствующая теорема, направленные на снижение двух первых погрешностей и уменьшение информационной нагрузки на каналы связи по сравнению с ТУКШ.

Изменившиеся условия решения задачи

Полученное Котельниковым соотношение с разносторонним развитием его работы многими учеными сохранило теоретическую актуальность и имеет многочисленную успешную практическую реализацию в современных инфокоммуникационных системах. Однако результаты технологического и технического развития отрасли инфокоммуникаций определили принципиально иные условия решения той же научной задачи. К основным изменившимся условиям относятся (рис. 2) [31-35]:

- интеграция разнотипных средств связи в инфокоммуникационную систему с памятью и вычислительной способностью;
- появление сложных многопараметрических сигналов;
- освоение высокочастотных диапазонов.

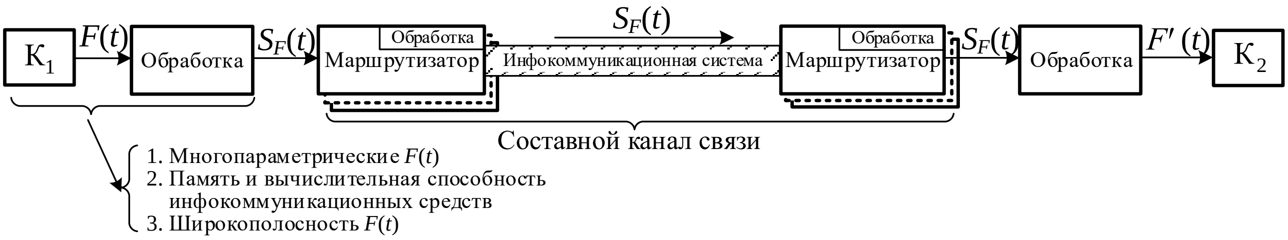

Рис. 2. Графическое представление современных условий решения задачи

Под *памятью* инфокоммуникационной системы будем понимать способность системы и ее элементов записывать, хранить и извлекать определенный объем данных. На рис. 3 показано графическое представление тракта передачи сигнала по линии связи с памятью.

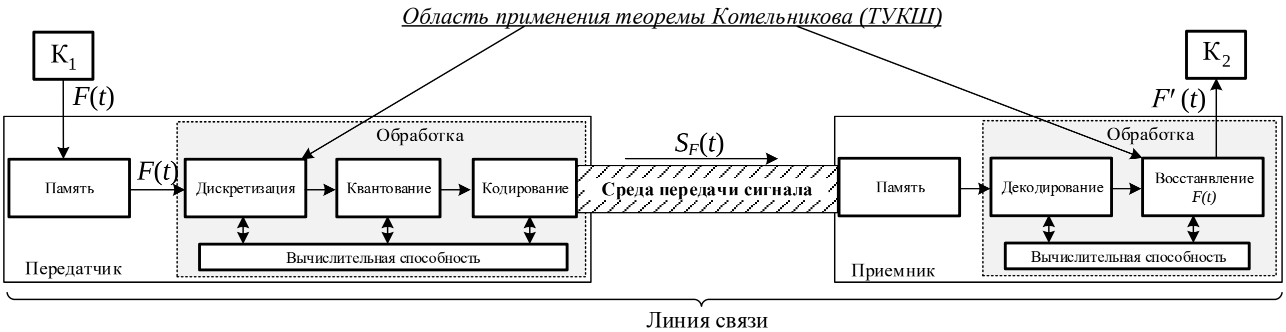

Рис. 3. Графическое представление тракта передачи сигнала по линии связи с памятью

Под *вычислительной способностью* будем понимать способность инфокоммуникационной системы и ее элементов обрабатывать определенный объем данных в единицу времени. Скорость обработки данных современными телекоммуникационными устройствами многократно превышает скорость восприятия информации (данных) человеком, поэтому вносимые при обработке задержки, на практике, практически не заметны для человеческого восприятия.

Память элементов инфокоммуникационных систем позволяет записывать сигналы любой длительности по временным отрезкам, что, в отличие от стохастических, исследованных Котельниковым, сигналов, дает возможность перевести случайные по природе сигналы в категорию детерминированных, для анализа, что позволяет обрабатывать и анализировать любой параметр сигнала на любом запомненном интервале детерминированными методами [35-38]. По сути, Котельников, предварительно не зная динамики изменений верхней частоты сигнала, был вынужден установить статическое соотношение независимо от того, мог ли вообще этот параметр сигнала принимать предельное значение, что априори обуславливает информационную избыточность представления непрерывного сигнала.

Многопараметрические сигналы, по сравнению с сигналами, представленными одним параметром [1], позволяют получить больше данных о сигнале. Распространение ТУКШ на многомерные сигналы представлены в работах [21, 39], где рассмотрена частотная область сложной (N-мерной) геометрической формы с обобщением теоремы атомарными и R-функциями. Математическое представление в [34, 39] сложной N-мерной области можно использовать для моделирования многопараметрического сигнала, однако взаимосвязи параметров (их корреляция) в этих работах не учитываются. В практическом смысле, степень корреляции параметров между собой определяет сложность вычисления значений одного параметра при условии знаний значений другого, что определяет актуальность *задачи поиска оптимума* между затратами ресурсов на измерение и передачу данных о параметре и затратами ресурсов на его вычисление по значениям взаимозависимого параметра.

Передача сигнала широким множеством (в диапазоне значений) частот, многократно превышающим ширину диапазона частот сигналов, описываемых Котельниковым, обуславливает существенную избыточность представления

DOI: 10.24412/2410-9916-2021-2-12-36
URL: http://sccs.intelgr.com/archive/2021-02/02-Ivanov.pdf

широкополосных сигналов отчетами по правилу (1) ввиду того, что нижняя частота диапазона будет в большой степени отличаться от верхней частоты f_1.

Представленная совокупность изменений *не рассматривалась* в представленных выше работах, что обуславливают необходимость развития ТУКШ с целью дальнейшего сокращения количества отсчетов, необходимых для передачи реальных непрерывных сигналов с допустимой погрешностью, что позволит повысить эффективность решения 1933 г. и его современного развития.

Целью изложенной в статье работы является формулирование и доказательство теоремы, развивающей теорию дискретного представления непрерывных процессов относительно современных условий с постановкой задачи снижения информационной избыточности данного представления по сравнению с традиционными решениями (на примере теоремы Котельникова).

Постановка и решение задачи

Для формальной постановки и решения задачи в статье использованы обозначения, представленные в таблице 1.

Таблица 1 – Обозначения

Обозначение	Физический смысл обозначения
$F(t)$	– исходный непрерывный сигнал – носитель информации о физических процессах
$S_F(t)$	– сигнал, модулированный $F(t)$, передаваемый в среде передачи (радио, электропроводной, оптической и др.)
$F'(t)$	– восстановленный непрерывный сигнал
$К_1$	– первый корреспондент
$К_2$	– второй корреспондент
$\tau_К$	– периодичность следования отсчетов при дискретизации исходного непрерывного сигнала по теореме Котельникова
f_1	– верхняя частота изменения показателя сигнала в теореме Котельникова
$\Delta\tau$	– длительность импульса (мгновенного отсчета)
$A(t)$	– параметр $A(t)$ сигнала $F(t)$
$B(t)$	– параметр $B(t)$ сигнала $F(t)$
$f_A(t)$, $f_B(t)$	– характеристика частоты изменения параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ соответственно
$f_{A,н}$, $f_{B,н}$	– нижняя частота изменения параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ соответственно
$f_{A,в}$, $f_{B,в}$	– верхняя частота изменения параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ соответственно
T	– длительность сигнала $F(t)$
τ	– периодичность следования отсчетов при дискретизации исходного непрерывного сигнала
$\tau_{A\ в}$, $\tau_{A\ н}$	– периодичность следования отсчетов при дискретизации исходного непрерывного сигнала по верхней и нижней частоте изменения параметра $A(t)$ соответственно
Δt	– временной интервал непрерывного сигнала, на котором определяется собственная периодичность следования отсчетов его дискретного представления
I, $\{I\}$	– количество и множество временных интервалов Δt соответственно

Обозначение	Физический смысл обозначения
$M\left[f_A(t)\right]$, $M\left[f_B(t)\right]$	– математическое ожидание частоты изменения значения параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ на T соответственно
$D\left[f_A(t)\right]$, $D\left[f_B(t)\right]$	– дисперсия частоты изменения значений параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ на T соответственно
$\sigma\left[f_A(t)\right]$, $\sigma\left[f_B(t)\right]$	– среднеквадратическое отклонение частоты изменения значений параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ на T соответственно
$M_i\left[f_A(t)\right]$, $M_i\left[f_B(t)\right]$	– математическое ожидание частоты изменения значения параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ на i-ом временном интервале соответственно
$D_i\left[f_A(t)\right]$, $D_i\left[f_B(t)\right]$	– дисперсия частоты изменения значений параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ на i-ом временном интервале соответственно
$\sigma_i\left[f_A(t)\right]$, $\sigma_i\left[f_B(t)\right]$	– среднеквадратическое отклонение частоты изменения значений параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ на i-ом временном интервале соответственно
$f_{A,\text{в}_i}$	– верхняя частота изменения параметра $A(t)$ на i-ом временном интервале
τ_{A_i}, τ_{B_i}	– периодичность следования отсчетов при дискретизации исходного непрерывного сигнала по параметру $A(t)$ и $B(t)$ соответственно на i-ом временном интервале
n_{A_i}	– количество отсчетов при дискретизации исходного непрерывного сигнала по параметру $A(t)$ на i-ом временном интервале
$\overline{\tau_{A_i}}$	– среднее количество отсчетов при дискретизации исходного непрерывного сигнала по параметру $A(t)$ на одном временном интервале
n_A	– количество отсчетов при дискретизации исходного непрерывного сигнала по параметру $A(t)$ на всей длительности сигнала $F(t)$
n'	– количество отсчетов при дискретизации исходного непрерывного сигнала по теореме Котельникова
$f_A(t)_i$, $f_B(t)_i$	– характеристика частоты изменения параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ на i-ом временном интервале соответственно
$\{I_A\}$	– множество интервалов по параметру $A(t)$ из $\{I\}$ удовлетворяющих условию (6)
$\{I'\}$	– множество интервалов $\{I\}$ не включающих $\{I_A\}$
$\{I_B\}$	– множество интервалов по параметру $B(t)$ из $\{I'\}$ удовлетворяющих условию (8)
$\{I'_A\}$	– множество интервалов по параметру $A(t)$ из $\{I\}$ не вошедших в $\{I_A\}$ и в $\{I_B\}$
$\{I''\}$	– множество интервалов по любому параметру из $\{I\}$ не вошедших в $\{I_A\}$ и в $\{I_B\}$
$r_{f_A(t)f_B(t)}$	– коэффициент корреляции частоты изменения значений параметра $A(t)$ и $B(t)$ сигнала $F(t)$ на всей длительности сигнала $F(t)$

Пусть непрерывный сигнал $F(t)$ передается по каналу с памятью и характеризуется двумя и более параметрами ($A(t)$, $B(t)$ …) с частотой их изменения от нижней ($f_{A,\text{н}}$, $f_{B,\text{н}}$ …) до верхней ($f_{A,\text{в}}$, $f_{B,\text{в}}$ …).

Необходимо *найти* периодичность следования (количество) дискретных отсчетов, достаточную для передачи заданного сигнала с любой требуемой точностью.

Теорема. *Если реализация случайного непрерывного сигнала $F(t)$ длительностью T характеризуется двумя и более некоррелированными параметрами с ненулевой дисперсией значений частоты их изменений, то сигнал может быть передан с выполнением любых требований к точности восстановления по каналу с памятью количеством отсчетов, следующих друг за другом через τ, удовлетворяющего неравенству*

$$\tau > 1/\left(2 f_1\right),$$

при этом f_1 соответствует параметру с наибольшим математическим ожиданием частоты его изменения.

Теорема сформулирована при *допущении*, что любой из рассматриваемых параметров сигнала может использоваться для его передачи с любым качеством.

Для доказательства первого утверждения теоремы сформулирована и доказана лемма 1.

Лемма 1. Чем больше дисперсия частоты изменения параметров непрерывного сигнала, тем меньше отсчетов необходимо для его передачи с любой точностью.

Для доказательства достаточно рассмотрение частоты изменения одного параметра. На рис. 4 показано графическое представление характеристики частоты изменения $f_A(t)$, находящейся в диапазоне значений от $f_{A,\text{н}}$ до $f_{A,\text{в}}=f_1$, параметра $A(t)$, записанного в память, случайного непрерывного сигнала $F(t)$.

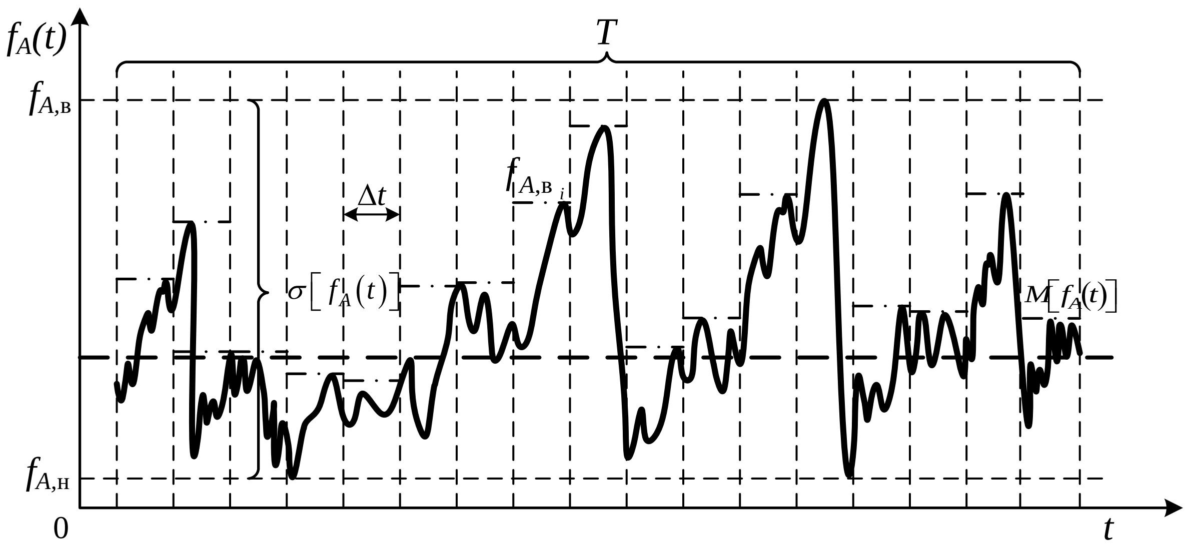

Рис. 4. Графическое представление частоты изменения параметра $A(t)$ непрерывного сигнала $F(t)$

Случайный процесс может быть декомпозирован на I частей, каждая из которых случайна (Х. Крамер (H. Cramer)) [36]. Разобьем T на интервалы Δt удовлетворяющие условию:

$$\tau_{A,\text{н}} << \Delta t << T,$$

где $\tau_{A\,\text{н}}=1/(2\,f_{A,\text{н}})$. Тогда получим I интервалов:

$$I = T / \Delta t.$$

При выполнении условия (2) для дисперсии частоты изменения значений параметра $A(t)$ сигнала:

$$D\left[f_A(t) \right] \neq 0, \tag{2}$$

при достаточно большом T найдется хотя бы один i-й интервал, для которого выполняется условие:

$$f_{A,\text{в}\,i} < f_{A,\text{в}}, \tag{3}$$

тогда, по теореме Котельникова, для передачи непрерывной функции на данном интервале необходимы ее отсчеты, непрерывно следующие друг за другом через

$$\tau_{A_i} = 1/\left(2\,f_{A,\text{в}\,i}\right), \tag{4}$$

количество которых на этом интервале будет определяться как

$$n_{A_i} = \Delta t / \tau_{A_i}.$$

В соответствии с условием (3) получаем хотя бы один интервал, удовлетворяющий условию

$$\tau_{A_i} > \tau_{A,\text{в}} = \tau_\text{К}.$$

Следовательно, усредняя значения интервальных τ_{A_i}, получим

$$\left(\overline{\tau_{A_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \tau_{A_i}}{I} \right) > \left(\tau_{A,\text{в}} = \frac{1}{2\,f_{A,\text{в}}} \right), \tag{5}$$

а, представляя непрерывный сигнал отчетами, получим неравенство

$$\left(n_A = T / \overline{\tau_{A_i}} = \sum_{i=1}^{I} n_{A_i} \right) < \left(n' = T / \tau_{A,\text{в}} = T / \tau_\text{К} \right).$$

Это означает, что чем больше дисперсия $D\left[f_A(t) \right]$, тем меньше отчетов, по сравнению с решением Котельникова, необходимо для передачи непрерывного сигнала с любой точностью. *Что и требовалось доказать.*

Решение задачи повышения эффективности использования ресурса линии связи, в рамках первой леммы, основано на идее нахождения собственной частоты дискретизации для каждого временного интервала из $\{I\}$. Итоговое представление исходного непрерывного сигнала будет иметь неравномерный период дискретизации на T и равномерный на Δt.

Необходимо отметить, что возможности восстановления исходных сигналов по отсчетам, полученным при использовании неравномерной дискретизации исследовались с середины XX-го века J. Yen [14], H. Shapiro и R. Silverman

[40], Г.В. Горелов [41], И.Я. Билинским и А.К. Микелсоном [42], J. Browning [43], P. Marziliano и M. Vetteri [44], С.В. Поршневым и Д.В. Кусайкиным [45]. В этих и многих других работах рассматривалась неравномерность дискретизации, полученная в результате:

– случайных временных задержек,
– флуктуации частоты,
– наложения спектров,
– передачи сигналов в случайные моменты времени,
– и т. д.

В целом, рассматриваемые в этих работах причины неравномерности дискретизации можно отнести к стохастическим по природе либо в силу технических особенностей реализации систем передачи данных [30, 45]. Представленное авторами решение направлено на обоснование преднамеренной поинтервальной дискретизации, определяемой верхним значением изменения параметра непрерывного сигнала в каждом временном интервале. При этом вопрос определения Δt остается открытым для дальнейшего исследования.

Ранжируя полученные значения τ_{A_i} от меньшего значения к большему, получим вариационный ряд со старшим членом, равным $\tau_{A,\text{в}}$ для данного параметра. Именно этот период определяет итоговое количество отсчетов при представлении непрерывного сигнала по решению (1). Следовательно, каждый последующий (младший относительно $\tau_{A,\text{в}}$) член вариационного ряда, полученный в представленном решении, будет вносить выигрыш в *снижение информационной нагрузки* на канал связи по сравнению с решением (1).

Для доказательства второго утверждения теоремы выдвинута и доказана лемма 2.

Лемма 2. Чем меньше корреляция частот изменения параметров непрерывного сигнала, тем меньше отсчетов необходимо для его передачи с любой точностью.

Выше сделано допущение о том, что любой из рассматриваемых параметров исходного сигнала может использоваться для его передачи с любым качеством. Данное допущение подкрепляется практической эксплуатацией техники связи. Так, например, амплитудно-модулированный сигнал восстанавливается фазовым детектором с низким качеством. При этом низкое качество выделенного сигнала определяется не слабой взаимозависимостью амплитуды и фазы сигнала, а разницей технической реализации детекторов, в том числе связанной с частотой изменения показателей. Таким образом, в данном практическом примере объективно прослеживается некоторый уровень корреляции двух параметров.

Значения показателей вычислительной способности современных средств связи позволяют проводить высокоскоростную, практически незаметную для восприятия человека, обработку сигналов в реальном масштабе времени. Зная зависимости коррелированных с некоторым уровнем между собой параметров, можно своевременно вычислять значения одного параметра по значениям друго, и наоборот. Естественно, остается открытым вопрос о соотношении затрат на ресурс пропускной способности для передачи данных о всех показателях сигнала и затрат на ресурсы вычислительной способности для определения значений необходимых показателей по характеристикам ограниченного числа переданных зависимых показателей с меньшими затратами ресурсов пропускной способности. Данный вопрос в этой статье вынесен в ограничения.

Возможность вычисления значений одного параметра по значениям другого возможно распространить на декомпозированный на интервалы сигнал. На каждом из $\{I\}$ интервалов можно отдельно выбирать параметр для последующей дискретизации, преобразования и передачи по каналу связи с последующим восстановлением на приемной стороне всех необходимых зависимых от него параметров на определенном временном интервале. В представленной теореме, критерием выбора параметра на интервале служит минимальное математическое ожидание его частоты изменения. По сути на i-м временном интервале выбирается параметр с минимальным значением верхней частоты его изменения, но на общий случай, для доказательства нагляднее использовать математическое ожидание при допущении о том, что изменение всех параметров статистически подчинено одному закону распределения.

Для доказательства леммы достаточно рассмотреть частоты изменения двух параметров. На рис. 5 показано графическое представление характеристики частот изменения параметров сигнала $F(t)$, записанных в память:

- $f_A(t)$, находящейся в диапазоне значений от $f_{A,\text{н}}$ до $f_{A,\text{в}}$, параметра $A(t)$;
- $f_B(t)$, находящейся в диапазоне значений от $f_{B,\text{н}}$ до $f_{B,\text{в}}$, параметра $B(t)$.

Также, как и при доказательстве леммы 1, разобьем T обоих параметров сигнала на I интервалов по Δt, которые, являясь частью случайного процесса, характеризуются своим набором статистических данных о частоте изменения $f_A(t)_i$ и $f_B(t)_i$. Случайный процесс можно характеризовать математическим ожиданием и дисперсией (среднеквадратическим отклонением) частоты его изменения.

При достаточно большом T найдется хотя бы один i-й интервал, в котором значение математического ожидания $M_i\left[f_A(t)\right]$ и дисперсии $D_i\left[f_A(t)\right]$ (среднеквадратического отклонения $\sigma_i\left[f_A(t)\right]$) частоты изменения параметра (в данном случае $A(t)$) будут отличаться от их характеристик на других интервалах. Таким образом частоту изменения параметра случайного непрерывного сигнала $F(t)$ можно охарактеризовать:

- математическим ожиданием $M\left[f_A(t)\right]$ за время T;
- дисперсией $D\left[f_A(t)\right]$ (среднеквадратическим отклонением $\sigma\left[f_A(t)\right]$) за время T;
- множеством значений математического ожидания, включающим каждое из $M_i\left[f_A(t)\right]$ I интервалов;
- множеством значений дисперсии (среднеквадратического отклонения), включающим каждое $D_i\left[f_A(t)\right]$ ($\sigma_i\left[f_A(t)\right]$) I интервалов.

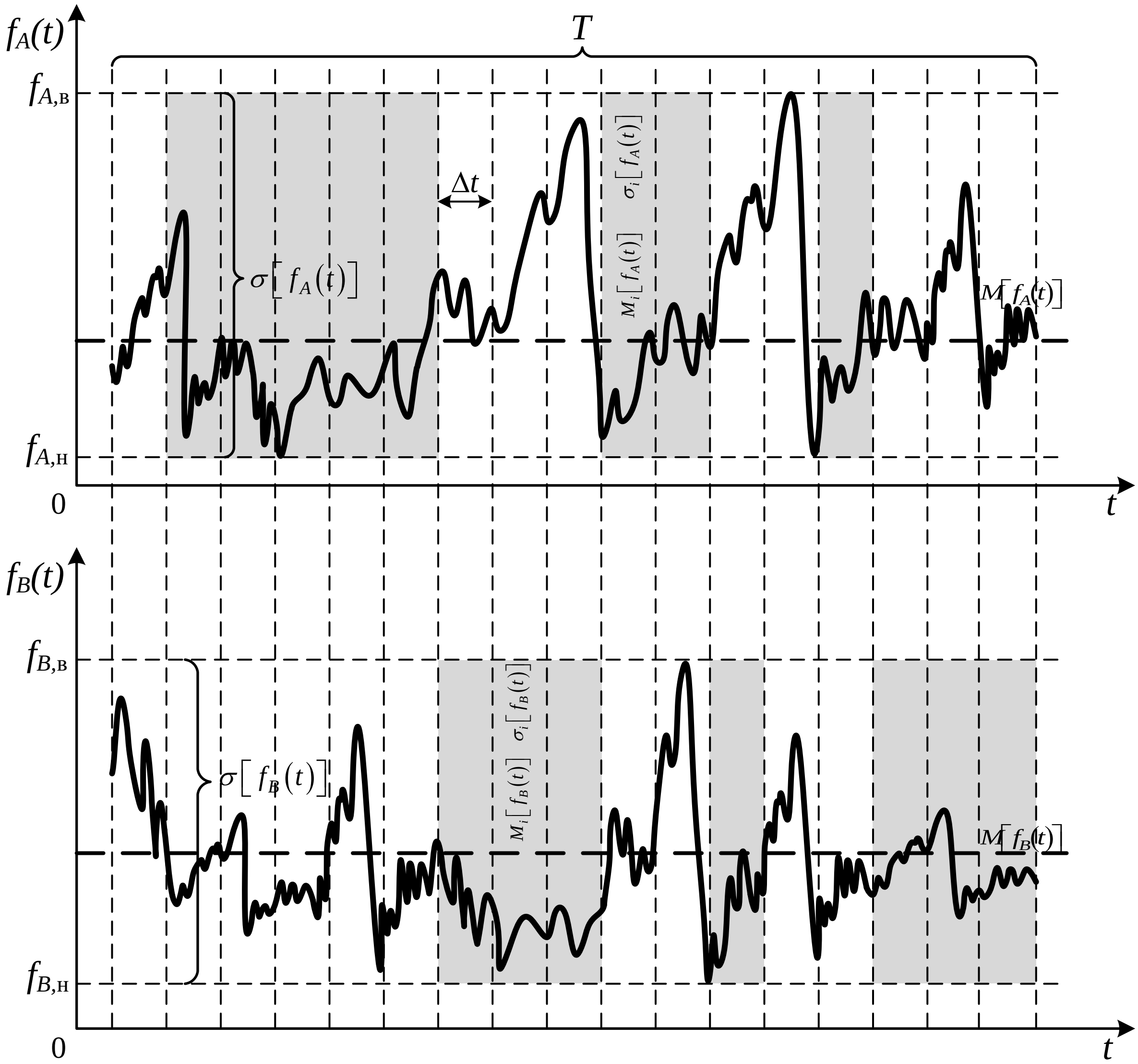

Рис. 5. Графическое представление частоты изменения параметров $A(t)$ и $B(t)$ непрерывного сигнала $F(t)$

Частота изменения параметра $B(t)$ характеризуется подобными показателями.

При выполнении условия (2) на достаточно большом T найдется хотя бы один i-й интервал, для которого выполняется условие:

$$M_i\left[f_A(t)\right] < M\left[f_A(t)\right]. \quad (6)$$

Выберем все интервалы, удовлетворяющие условию (6). В полученном множестве $\{I_A\} \in \{I\}$ определим τ_{A_i} по частоте изменения $A(t)$ в соответствии с (4).

Если пара параметров не полностью коррелированы [37, 38]:

$$\left|r_{f_A(t) f_B(t)}\right| \neq 1, \quad (7)$$

то на достаточно большом T найдется хотя бы один i-й интервал, для которого выполняется условие:

$$M_i\left[f_B(t)\right] < M\left[f_A(t)\right] \quad (8)$$

В оставшемся множестве интервалов $\{I'\}=\{I\}-\{I_A\}$ выберем все интервалы, удовлетворяющие условию (8). В полученном множестве $\{I_B\}\in\{I'\}$ определим τ_{Bi} по частоте изменения $B(t)$ в соответствии с (4).

С учетом выполнения условия (8) можно утверждать, что справедливо неравенство:

$$f_{A,\text{в}\ i} > f_{B,\text{в}\ i},\ \tau_{A_i} < \tau_{B_i}, \tag{9}$$

для $i\in\{I_B\}$.

Количество необходимых интервалов для передачи всей функции $F(t)$ определяется в том же порядке, что и в лемме 1, при этом периодичность следования отсчетов в интервалах, не вошедших в множества $\{I_A\}$ и $\{I_B\}$ можно определить по частоте изменения любого параметра (например $A(t)$, в множестве $\{I'_A\}=\{I\}-\{I_A\}-\{I_B\}$) в соответствии с (4), либо выбрать параметр с минимальной верхней частотой изменения в каждом из интервалов множества $\{I''\}=\{I\}-\{I_A\}-\{I_B\}$.

С учетом (9) справедливо неравенство:

$$\sum_{i=1}^{I} n_{A_i} < \left(\sum_{i=1}^{I_A} n_{A_i} + \sum_{i=1}^{I'_A} n_{A_i} + \sum_{i=1}^{I_B} n_{B_i}\right) \tag{10}$$

Таким образом, имея хотя бы один интервал Δt, в котором выполняется условие (9) при справедливости (7) можно утверждать, что чем меньше корреляция частот изменения параметров непрерывного сигнала $r_{f_A(t) f_B(t)}$, тем меньше отчетов, по сравнению с решением Котельникова, необходимо для его передачи с любой точностью. *Что и требовалось доказать.*

Даже при необходимости передачи одного параметра сигнала практическая реализация теоремы позволит обеспечить *снижение информационной нагрузки* на канал (линию) связи по сравнению с решением (1) за счет представления непрерывного сигнала дискретными отсчетами в соответствии с минимальным значением верхней частоты изменения параметра, выбираемого из всех взаимозависимых параметров на каждом i-ом временном интервале.

Для проверки сходимости, в частном случае, *теоремы 1* к теореме Котельникова докажем лемму 3.

Лемма 3. При полной корреляции частот изменения параметров непрерывного сигнала и их дисперсии, стремящейся к нулю, необходимая периодичность следования отчетов для его передачи с любой точностью сводится, в пределе, к тождеству (1).

При $D\left[f_A(t)\right]\to 0$ (узкополосный сигнал) на любом интервале $i\in\{I\}$ верхняя частота изменения параметра $A(t)$ будет принимать значения $f_{A,\text{в}\ i}\to f_1$. Соответственно неравенство (5) примет вид:

$$\left(\overline{\tau_{A_i}}=\frac{\sum_{i=1}^{I}\tau_{A_i}}{I}\right)\to 1/\left(2f_1\right),$$

в пределе дисперсия примет значение $D\left[f_A\left(t\right)\right]=0$, тогда

$$\left(\overline{\tau_{A_i}}=\frac{\sum_{i=1}^{I}\tau_{A_i}}{I}\right)=1/\left(2f_1\right).$$

При $\left|r_{f_A(t)f_B(t)}\right|=1$ частоты изменения параметров $A(t)$ и $B(t)$ совпадают на всем T. $f_{A,\text{в}\,i}=f_{B,\text{в}\,i}$ при $\forall i\in\left\{I\right\}$. Следовательно, с учетом (10) справедливы выражения:

$$\sum_{i=1}^{I}n_{A_i}=\left(\sum_{i=1}^{I_A}n_{A_i}+\sum_{i=1}^{I'_A}n_{A_i}+\sum_{i=1}^{I_B}n_{B_i}\right)=\sum_{i=1}^{I}n_{B_i},$$

$$\left(\overline{\tau_{A_i}}=\frac{\sum_{i=1}^{I}\tau_{A_i}}{I}\right)=\left(\overline{\tau_{B_i}}=\frac{\sum_{i=1}^{I}\tau_{B_i}}{I}\right)=1/\left(2f_1\right).$$

Что и требовалось доказать.

Принятые в лемме 3 условия не реализуемы на практике ни для каких реальных сигналов, поэтому они приняты только для математического доказательства и проверки *теоремы*.

Оценка представленного решения

Для наглядного представления выигрыша в снижении информационной избыточности дискретного представления исходного непрерывного сигнала, который возможно получить при реализации представленного решения по сравнению с решением (1), покажем их соотношение в графической форме (рис. 6).

На рисунке представлены две фигуры. Первая фигура соответствует прямоугольнику с площадью S_1. Вторая фигура характеризуется площадью под кривой $S_\text{д}$, описываемой плотностью распределения верхней частоты изменения параметра непрерывного сигнала. Поскольку на бесконечно малых интервалах верхняя частота изменения параметра является функций времени, то площадь фигур можно найти как интеграл этой функции по времени. В первом случае (по Котельникову), при фиксированной частоте f_1 (верхняя частота изменения параметра сигнала постоянна для всего времени его дискретизации) интеграл сведется к произведению f_1 и T. Во втором случае, соответствующем решению по лемме 1, площадь будет равна интегралу по времени от плотности распределения по интервалам верхней частоты изменения параметра сигнала. Статистически известно, что распределение случайных (квазислучайных) величин в телекоммуникационных системах подчинено нормальному распределению [46], поэтому он принят в качестве распределения $f_в(t)$ на T.

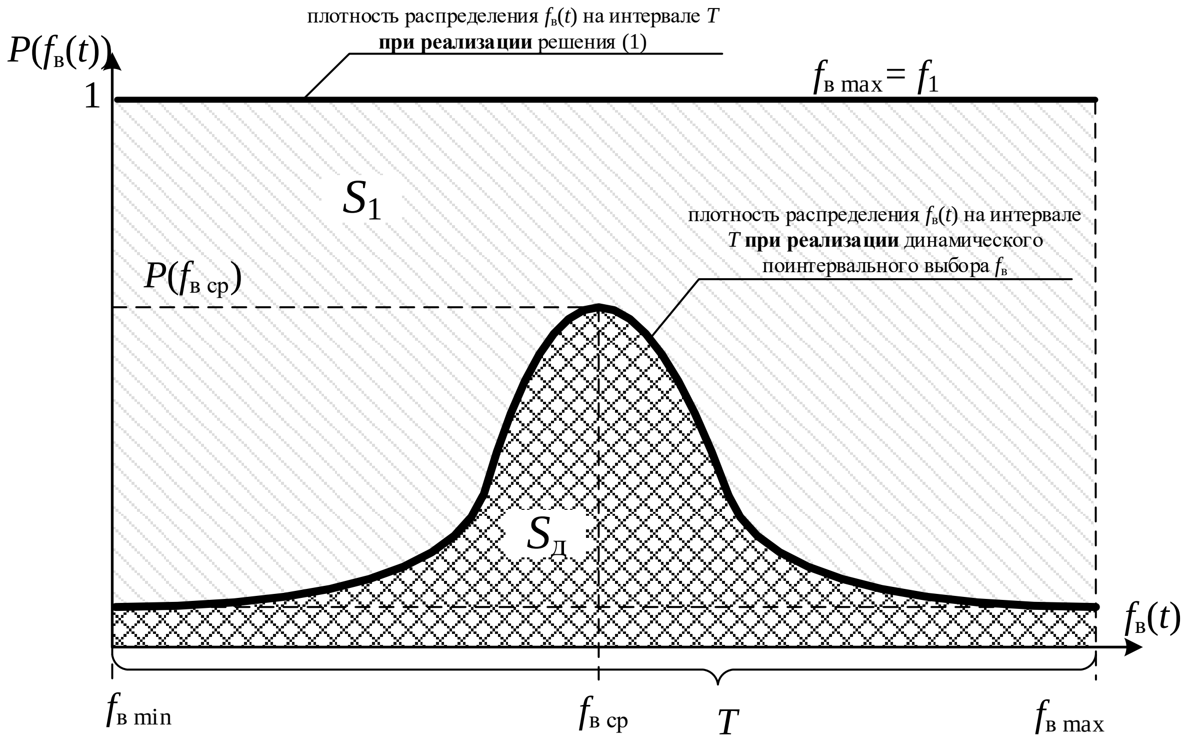

Рис. 6. Графическое представление эффективности представленного решения по сравнению с решением (1)

В физическом смысле, площадь фигур отображает информационную нагрузку дискретного представления непрерывного сигнала на канал связи за время T. Соотношение площадей наглядно демонстрирует возможную эффективность представленного решения. В математической форме соотношение результатов можно представить коэффициентом в следующем виде:

$$k_{1/Д} = \frac{S_1}{S_Д} = \frac{T \cdot f_1}{\int\limits_0^T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f_в(t) - f_{в\,ср}}{\sigma}\right)^2} dt},$$

где S_1 – площадь фигуры (прямоугольника), соответствующая информационной нагрузке непрерывного сигнала на канал связи за время T при его представлении дискретными отсчетами по решению (1); $S_Д$ – площадь фигуры (под функцией плотности распределения), соответствующая информационной нагрузке непрерывного сигнала на канал связи за время T при его представлении дискретными отсчетами на основе представленного решения; $f_в(t)$ – значение верхней частоты изменения параметра непрерывного сигнала в момент t; $f_{в\,ср}$ – среднее значение верхней частоты изменения параметра непрерывного сигнала за время T; σ – среднеквадратическое отклонение верхней частоты изменения параметра непрерывного сигнала за время T.

Рис. 6 отображает выигрыш в снижении информационной нагрузки при представлении непрерывного сигнала отсчетами одного параметра. Наличие в сигнале нескольких параметров с некоторой степенью корреляции повысят эффективность решения за счет выбора параметра с минимальным значением верхней частоты изменения ($f_{\text{в}i\,\min}$) на каждом i-ом временном интервале.

Вклад предложенного решения в снижение погрешностей восстановления непрерывных сигналов по их дискретному представлению, а именно, интерференционных погрешностей, появляющиеся вследствие частоты дискретизации, а также условиях о непрерывности сигнала, и погрешностей усечения, возникающих при ограничении верхней частоты изменения параметра, заключается в возможности отказа от усечения верхней частоты изменения параметров сигнала и ее фактическом определении на каждом временном интервале.

Такой подход к выбору верхней частоты способствует росту информационной нагрузки на каналы связи по сравнению с прямой реализацией ТУКШ на единичном интервале, однако сама возможность снижения погрешностей, обуславливает возможность постановки новой оптимизационной задачи, заключающейся в нахождении оптимума между снижением погрешности восстановления сигнала и снижением избыточности информационной нагрузки на канал связи. К примерам решения такого подобной задачи в традиционных условиях можно отнести работы Л.М. Финка [3] и А.К. Цыцулина [28, 32].

Предложенное в статье решение сравнивается с решением Котельникова для удобства его восприятия широким кругом читателей. Во введении приведен ряд работ, развивающих ТУКШ и современную теорию дискретного представления непрерывных процессов, которые имеют существенное значение для теории и практики обеспечения функционирования инфокоммуникационных систем. Представленное решение возможно сравнить с любой формой ТУКШ и получить представление о его преимуществах и недостатках, но выигрыш в *снижении информационной нагрузки на канал связи* будет очевиден.

Выводы

Устойчивость процесса информационного обмена в инфокоммуникационных системах зависит от множества внутренних и внешних факторов и сложно формализуема, однако среди внутренних факторов в явном виде выделяются основные – это ресурсы сети (традиционно – пропускная способность ее элементов) и оказываемая на них информационная нагрузка. Исходя из данного положения, для обеспечения экономической эффективности функционирования инфокоммуникационной системы необходимо формировать такую структуру, которая при существующей нагрузке (доходы для операторов связи) будет иметь минимальный для обеспечения требуемого качества (устойчивости) информационного процесса объем ресурсов (расходы операторов связи).

Минимизация ресурсов, предназначенных для обеспечения информационного обмена, достигается путем повышения эффективности их использования, что может быть осуществлено как внутри этих ресурсов, путем максимизации насыщения единицы ресурса пользовательским трафиком (различные методы уплотнения, среда передачи данных, повышения соотношения сигнал/шум, помехоустойчивого кодирования и т.д.), так и со стороны оконечных устройств – источников нагрузки, путем снижения информационной избыточности в передаваемом трафике, т.е. оптимизации формы представления исходных сигналов (таких как акустические или видео) для передачи через инфокоммуникационную систему.

Решение в теореме Уиттекера-Котельникова-Шеннона задачи оптимизации представления исходного непрерывного сигнала дискретными отчетами для его передачи по каналам связи с любой точностью, как в постановке В.А. Котельникова, так и в последующих формулировках, требует развития. Это обусловлено изменившимися исходными данными и условиями ее решения.

Представленное решение развивает ТУКШ. Оно основано на методах статистического анализа, которые возможно применить в современных условиях благодаря появлению каналов связи с памятью, позволивших неизвестные стохастические сигналы, с которыми работал Котельников и другие ученые, при необходимости рассматривать, для анализа с целью определения параметров дискретизации, как детерминированные.

Многопараметричность и широкополосность современных сигналов позволяет искать оптимальные решения задачи путем выбора параметров с меньшей частотой изменения на различных интервалах непрерывного сигнала.

Представленный подход поинтервальной межпараметрической дискретизации позволяет снизить информационную избыточность дискретного представления непрерывного сигнала, а также снизить погрешности интерполяции исходного сигнала, вызываемые усечением верхней частоты изменения его параметров и ошибками определения частоты дискретизации.

Научная новизна представленного решения, по сравнению с традиционными на примере теоремы Котельникова, заключается в обосновании снижения информационной избыточности дискретного представления стохастического многопараметрического аналогового сигнала за счет использования свойств телекоммуникационных средств, образующих канал связи с памятью, которые позволяют провести поинтервальный анализ параметров сигнала и их дискретизацию в зависимости от частоты изменения параметров на каждом временном интервале.

В граничных условиях, при полной корреляции частот изменения параметров непрерывного сигнала и их дисперсии, стремящейся к нулю, представленное решение сводится к решению В.А. Котельникова. Это показано в лемме 3 и определяет достоверность полученного результата.

При практической реализации представленного решения потребуется согласование режимов работы приемника и передатчика при каждом изменении частоты следования отсчетов, что потребует введения некоторой избыточности служебной информации. Данное обстоятельство требует в дальнейшем решения оптимизационной задачи, направленной на определение пороговых условий целесообразного применения представленной теоремы.

Дальнейшее развитие решения рассмотренного класса задач возможно в направлениях анализа векторов ориентации, полученных с использованием значений пар близко расположенных отсчетов-импульсов, оптимизации сверточного кодирования битовых последовательностей, оптимизации интервалов декомпозиции непрерывных сигналов, а также вариантов реализаций по формированию каналов связи с памятью.

Литература

1. Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки электросвязи // В сборнике. Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По радиосекции. – М.: Управление связи РККА, 1933. С. 1-19.

2. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. – Москва-Ленинград: Государственное энергетическое издательство, 1956. – 153 с.

3. Заварин Г.Д., Теплов Н.Л., Финк Л.М. Основы общей теории связи / под общ. ред. Л.М. Финка. – Л.: ВКАС, 1965. – 360 с.

4. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 832 с.

5. Алексеев А.В. Современная теория дискретного представления непрерывных процессов в задачах моделирования // Труды третьей международной научно-практической конференции «Имитационное и комплексное моделирование морской техники и морских транспортных систем» – «ИКМ МТМТС 2015» – Санкт-Петербург, 2015. – С. 16-25.

6. Whittaker E.T. On the Functions Which Are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1915. pp. 181-194.

7. Ferrar W.L. On the Consistency of Cardinal Function Interpolation // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1928. pp. 230-242.

8. Nyquist H. Certain Topica in Telegraph Transmission Theory // Transactions A.I.E.E. 1928. Vol. 47. pp. 617-644.

9. Whittaker J.M. The Fourier theory of the Cardinal Functions // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1929. Vol. 1. pp. 169-176.

10. Shannon C.E. Communication in the Presence of Noise. Proceedings of the Institute of Radio Engineers. 1949. Vol. 37. № 1. pp. 10-21.

11. Someya I. Waveform Transmission. Tokyo: Shukyo, Ltd., 1949.

12. Kohlenberg A. Exact Interpolation of Band-Limited Functions // Journal of Applied Physics. 1953. Vol. 24. pp. 1432-1436.

13. Jagerman D.L., Fogel L. Some general aspects of the sampling theorem // IRE Transactions on Information Theory. 1956. Vol. IT-2. pp.139-156.

14. Yen J.L. On the nonuniform sampling of band width limited signals // IRE Transactions Circult Theory. 1956. Vol. CT-3. pp. 251-257.

15. Турбович И.Т. К вопросу о применении теоремы Котельникова к функции времени с неограниченным спектром // Радиотехника. 1958. Т. 13. № 8. С. 11-12.

16. Weiss P. Sampling theorems associated with Sturm Liouville system // Bulletin of the American Mathematical Society. 1957. Vol. 63. p. 242.

17. Kramer H. P. A generalized sampling theorem // Journal of Mathematical Physics. 1959. Vol. 38. pp. 68-72.

18. Billings A.R. Sampling of Signals without D.C. Components // Electronic and Radio Engineering. 1959. Vol. 36. № 2. pp. 70–72.

19. Цыбаков Б.С., Яковлев В.П. О точности восстановления функций с помощью конечного числа членов ряда Котельникова // Радиотехника и электроника. 1959. Т. 4. № 3. С. 542-547.

20. Игнатьев Н.К. Общие методы исследования систем с дискретизацией // Электросвязь. 1960. Т. 14. № 8. С. 3–11.

21. Reza F.M. An Introduction to Information Theory. Bombay – New Delhi: TATA McGRAW-Hill Publishing Co. Ltd, 1961. – 481 p.

22. Papoulis A. The Fourier Integral and its Applications. New York: McGraw-Hill Book Company, 1962. 318 p.

23. Гаарднер Н.О. О многомерной теореме отсчетов // Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1972. Т. 60. № 2. С. 119-121.

24. Бабенко В.И. Эффективность предварительной фильтрации при анализе спектра полосовых сигналов // Автометрия. 1976. № 5. С. 44-50.

25. Джерри А.Дж. Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения // Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1977. Т. 65. № 11. С. 53-89.

26. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Прогресс в Советском Союзе в области теории финитных функций и ее применений в физике и технике // Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1977. Т. 65. № 7. С. 16-48.

27. Алексеев А. В., Шавельский Ю. И. О выборе значения частоты дискретизации при дискретном представлении непрерывных процессов // Записки по гидрографии. 1981. № 205. С. 37-41.

28. Цыцулин А. К. Распределение ошибок по каскадам в многокаскадной системе связи // Техника средств связи. Серия: Техника телевидения. 1991. № 3. С. 49-57.

29. Басараб М.А., Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Яковлев В.П. Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона. – М.: Радиотехника, 2004. – 72 с.

30. Материалы XII Международного симпозиума по проблеме избыточности в информационных системах. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2009. – 321 с.

31. Стародубцев Ю.И., Иванов С.А., Вершенник Е.В., Иванов Н.А., Закалкин П.В., Вершенник А.В. Способ повышения устойчивости сети связи с памятью // Патент на изобретение RU 2734103 C1, опубл. 13.10.2020, бюл. № 29. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44113156 (дата обращения 12.02.2021).

32. Цыцулин А.К., Адамов Д.Ю., Манцветов А.А., Зубакин И.А. Твердотельные телекамеры: накопление качества информации. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», 2014. – 234 с.

33. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.

34. Шаров Г.А. Основы теории сигналов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2021. – 552 с.

35. Цыбаков Б.С. Пропускная способность векторного гауссовского канала без памяти // Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1. № 1. С. 26-40.

36. Левин Б.Р., Фомин А.Я. Теоретические основы статистической радиотехники. В 3-х томах. – М.: Советское радио, 1974-1975.

37. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 564 с.

38. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М.: Мир, 1989. – 376 с.

39. Кравченко В.Ф., Сафин А.Р. Атомарные функции и *N*-мерная обобщенная теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13. № 12. С. 31-44.

40. Shapiro H.S., Silverman R.A. Alias free sampling of random noise // Journal Society for Industrial and Applied Mathematics. 1960. Vol. 8. № 2. pp. 225-248.

41. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. – М.: Радиоисвязь, 1982. – 256 с.

42. Билинский И.Я., А.К. Микелсон. Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов. – Рига: Зинатне, 1983. – 292 с.

43. Browning J.A Method of finding unknown continuous-time non-uniform sample locations of bandlimited functions // Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementations XIV. Proceedings of the SPIE. 2004. Vol. 5559. pp. 289-296.

44. Marziliano P., Vetterli M. Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations // IEEE Transactions on Signal Processing. 2000. Vol. 48. pp. 3462-3471.

45. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Исследование точности методов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке // В мире научных открытий. 2013. Т. 46. № 10. С. 261-279.

46. Замятина О.М. Моделирование сетей: учебное пособие. – Томск: Томский политехнический университет, 2011. – 168 с.

References

1. Kotel'nikov V.A. O propusknoy sposobnosti «efira» i provoloki elektrosvyazi [On the bandwidth of «ether» and telecommunication wire] *V sbornike. Vsesoyuznyy energeticheskiy komitet. Materialy k I Vsesoyuznomu s"yezdu po voprosam tekhnicheskoy rekonstruktsii dela svyazi i razvitiya slabotochnoy promyshlennosti. Po radiosektsii.* [In the collection. All-Union Energy Committee. Materials for the 1st All-Union Congress on the technical reconstruction of communications and the development of low-current industry. By radio section.] Moscow, Upravleniye svyazi RKKA [Communications Directorate of the Workers 'and Peasants' Red Army], 1933, pp.1-19 (in Russian).

2. Kotel'nikov V. A. *Teoriya potentsial'noy pomekhoustoychivosti* [Potential Noise Immunity Theory]. Moscow-Leningrad, Gosudarstvennoye energeticheskoye izdatel'stvo Publ., 1956. 153 p. (in Russian).

3. Zavarin G.D., Teplov N.L., Fink L.M. *Osnovy obshchey teorii svyazi / pod obshch. red. L.M. Finka* [Fundamentals of General Communication Theory]. Leningrad, Military Red Banner Communication Academy, 1965. 360 p. (in Russian).

4. Shennon K. *Raboty po teorii informatsii i kibernetike* [Works of information theory and cybernetics]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoy literatury Publ., 1963. 832 p. (in Russian).

5. Alekseyev A.V. Sovremennaya teoriya diskretnogo predstavleniya nepreryvnykh protsessov v zadachakh modelirovaniya [Modern theory of discrete representation of continuous processes in modeling problems]. *Proceedings of the 3rd International Conference «Simulation and complex modelling in marine engineering and marine transporting systems» – «SCM MEMTS 2015»*. St. Petersburg, 2015, pp. 16-25 (in Russian).

6. Whittaker E.T. On the Functions Which Are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1915, pp. 181-194.

7. Ferrar W.L. On the Consistency of Cardinal Function Interpolation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1928, pp. 230-242.

8. Nyquist H. Certain Topica in Telegraph Transmission Theory. *Transactions A.I.E.E.*, 1928, vol. 47, pp. 617-644.

9. Whittaker J.M. The Fourier theory of the Cardinal Functions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1929, vol. 1, pp. 169-176.

10. Shannon C.E. Communication in the Presence of Noise. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 1949, vol. 37, no. 1, pp. 10-21.

11. Someya I. *Waveform Transmission*. Tokyo, Shukyo Ltd., 1949.

12. Kohlenberg A. Exact Interpolation of Band-Limited Functions. *Journal of Applied Physics*, 1953, vol. 24, pp. 1432-1436.

13. Jagerman D.L., Fogel L. Some general aspects of the sampling theorem. *IRE Transactions on Information Theory*, 1956, vol. IT-2, pp.139-156.

14. Yen J.L. On the nonuniform sampling of band width limited signals. *IRE Transactions Circult Theory*, 1956, vol. CT-3, pp. 251-257.

15. Turbovich I.T. K voprosu o primenenii teoremy Kotel'nikova k funktsii vremeni s neogranichennym spektrom [On the application of the Kotelnikov theorem to a time function with an unbounded spectrum]. *Radiotekhnika* [Radio engineering], 1958, vol. 13, no. 8, pp. 11–12 (in Russian).

16. Weiss P. Sampling theorems associated with Sturm Liouville system. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1957, vol. 63, p. 242.

17. Kramer H.P. A generalized sampling theorem. *Journal of Mathematical Physics*, 1959, vol. 38, pp. 68–72.

18. Billings A.R. Sampling of Signals without D.C. Components. *Electronic and Radio Engineering*, 1959, vol. 36, no. 2, pp. 70–72.

19. Tsybakov B.S., Yakovlev V.P. O tochnosti vosstanovleniya funktsiy s pomoshch'yu konechnogo chisla chlenov ryada Kotel'nikova [On the accuracy of recovering functions using a finite number of terms in the Kotelnikov series]. *Radio Engineering and Electronics*, 1959, vol. 4, no. 3, pp. 542-547 (in Russian).

20. Ignat'yev N.K. Obshchiye metody issledovaniya sistem s diskretizatsiyey [General research methods for sampling systems]. *Telecommunications and Radio Engineering*, 1960, vol. 14, no. 8, pp. 3-11 (in Russian).

21. Reza F.M. *An Introduction to Information Theory*. Bombay-New Delhi, TATA McGRAW-Hill Publishing Co. Ltd, 1961. 481 p.

22. Papoulis A. *The Fourier Integral and its Applications*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1962. 318 p.

23. Gaardner N.O. O mnogomernoy teoreme otschetov [Of multidimensional sampling theorem]. *Trudy instituta inzhenerov po elektrotekhnike i radioelektronike* [Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers], 1972, vol. 60, no. 2, pp. 119-121 (in Russian).

24. Babenko V.I. Effektivnost' predvaritel'noy fil'tratsii pri analize spektra polosovykh signalov [Prefilter Efficiency for Spectrum Analysis of Bandpass Signals]. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 1976, no. 5, pp. 44-50 (in Russian).

25. Dzherri A.Dzh. Teorema otschetov Shennona, yeye razlichnyye obobshcheniya i prilozheniya [Shannon's sampling theorem, its various generalizations and applications]. *Trudy instituta inzhenerov po elektrotekhnike i radioelektronike* [Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers], 1977, vol. 65, no. 11, pp. 53-89 (in Russian).

26. Khurgin Ya.I., Yakovlev V.P. Progress v Sovetskom Soyuze v oblasti teorii finitnykh funktsiy i yeye primeneniy v fizike i tekhnike [Progress in the Soviet Union in the field of the theory of finite functions and its applications in physics and technology]. *Trudy instituta inzhenerov po elektrotekhnike i radioelektronike* [Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers], 1977, vol. 65, no. 7, pp. 16-48 (in Russian).

27. Alekseyev A.V., Shavel'skiy Yu.I. O vybore znacheniya chastoty diskretizatsii pri diskretnom predstavlenii nepreryvnykh protsessov [About the choice of the sampling rate value for the discrete representation of continuous processes]. *Zapiski po gidrografii* [Hydrographic notes], 1981, no. 205, pp. 37-41 (in Russian).

28. Tsytsulin A.K. Raspredeleniye oshibok po kaskadam v mnogokaskadnoy sisteme svyazi [Distribution of errors over cascades in a multistage communication system]. *Tekhnika sredstv svyazi. Seriya Tekhnika televideniya* [Communication equipment. Television technique series], 1991, no. 3, pp. 49-57 (in Russian).

29. Basarab M.A., Zelkin Ye.G., Kravchenko V.F., Yakovlev V.P. *Tsifrovaya obrabotka signalov na osnove teoremy Uittekera-Kotel'nikova-Shennona* [Digital signal processing based on the Whittaker-Kotelnikov-Shannon theorem]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2004. 72 p. (in Russian).

30. *Materialy XII Mezhdunarodnogo simpoziuma po probleme izbytochnosti v informatsionnykh sistemakh*. St. Petersburg, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 2009. 321 p. (in Russian).

31. Starodubtsev Yu.I., Ivanov S.A., Vershennik Ye.V., Ivanov N.A., Zakalkin P.V., Vershennik A.V. *Sposob povysheniya ustoychivosti seti svyazi s pamyat'yu* [Method of increasing stability of a communication network with memory]. Patent Russia, no. RU 2734103 C1. Publish. 13.10.2020, bul. no. 29. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44113156 (accessed 12 February 2021) (in Russian) (in Russian).

32. Tsytsulin A.K., Adamov D.Yu., Mantsvetov A.A., Zubakin I.A. *Tverdotel'nyye telekamery: nakopleniye kachestva informatsii* [Solid State Cameras: Accumulating Information Quality]. St. Petersburg, Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI», 2014. 234 p. (in Russian).

33. Varakin L.Ye. *Sistemy svyazi s shumopodobnymi signalami* [Communication systems with noise-like signals]. Moscow, Radio and communication Publ., 1985. 384 p. (in Russian).

34. Sharov G.A. *Osnovy teorii signalov* [The basics of signal theory]. Moscow, Hot line – Telecom Publ., 2021. 552 p. (in Russian).

35. Tsybakov B.S. Propusknaya sposobnost' vektornogo gaussovskogo kanala bez pamyati [Bandwidth of a vector Gaussian channel without memory]. *Problems of Information Transmission* [Problems of information transmission], 1965, vol. 1, no. 1, pp. 26-40 (in Russian).

36. Levin B.R. *Teoreticheskiye osnovy statisticheskoy radiotekhniki. V 3-kh tomakh* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Moscow, Soviet radio Publ., 1974-1975. (in Russian).

37. Venttsel' Ye.S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, State publishing house of physical and mathematical literature, 1962. 564 p. (in Russia).

38. George R. Cooper, Clare D. McGillem. *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis.* By CBS Colledge Publishing, 1986. 298 p.

39. Kravchenko V.F., Safin A.R. Atomic functions and N-N Whittaker-Koternikov-Shannon theorem. *Electromagnetic waves and electronic systems*, 2008, vol. 13, no. 12, pp. 31-44 (in Russian).

40. Shapiro H.S., Silverman R.A. Alias free sampling of random noise. *Journal Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 225-248.

41. Gorelov G.V. *Neregulyarnaya diskretizatsiya signalov* [Irregular sampling of signals]. Moscow, Radioisvyaz' [Radio communication Publ.], 1982. 256 p. (in Russian).

42. Bilinskiy I.Ya., Mikelson A.K. *Stokhasticheskaya tsifrovaya obrabotka nepreryvnykh signalov* [Stochastic digital processing of continuous signals]. Riga, Publishing House Science, 1983. 292 p. (in Russian).

43. Browning J.A Method of finding unknown continuous-time non-uniform sample locations of bandlimited functions. *Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementations XIV. Proceedings of the SPIE*, 2004, vol. 5559, pp. 289-296.

44. Marziliano P., Vetterli M. Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, vol. 48, pp. 3462-3471.

45. Porshnev S.V., Kusaykin D.V. Investigation of accuracy of non-uniform sampling signal reconstruction methods. *In the World of Scientific Discoveries*, 2013, no. 10, pp. 261-279 (in Russian).

46. Zamyatina O.M. *Modelirovaniye setey: uchebnoye posobiye* [Network Modeling]. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Publ., 2011. 168 p. (in Russian).

Статья поступила 25 марта 2021 г.

Информация об авторах

Иванов Сергей Александрович – кандидат технических наук. Докторант. Военная академия связи. Область научных интересов: теория управления информационно-телекоммуникационными ресурсами. E–mail: sa-ivanov@inbox.ru

Стародубцев Юрий Иванович – доктор военных наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ. Профессор кафедры безопасности инфокоммуникационных систем специального назначения. Военная академия связи. Область научных интересов: теория управления информационно-телекоммуникационными ресурсами; информационная безопасность. E–mail: prof.starodubtsev@gmail.com

Адрес: 194064, Россия, г. Санкт-Петербург, Тихорецкий пр., д. 3.

Theorem of representation of continuous multivariable signal by non-zero dispersion by discrete samples

S. A. Ivanov, Yu. I. Starodubtsev

Setting the task. *The exponential growth load generation on infocommunication systems determines the ever-increasing requirements for the development of appropriate infrastructure, methods and methods of efficient data transfer, approaches to processing of initial signals (acoustic, video) for their presentation in a form suitable for transmission over infocommunication elements. The initial and basic stage of processing the original continuous signals is their sampling. Historically, the fundamental theoretical basis for sampling continuous functions was the Whittecker-Kotelnikov-Shannon theorem. This theorem in various forms, and many other studies in the direction of signal sampling, are aimed at finding optimal solutions between reducing the number of samples (reducing the load on network resources by reducing the information redundancy of the discrete representation of the original continuous signals) and fulfilling the error tolerance requirement for interpolating the original signal on the receiving side. The regular change in the conditions for finding this balance is due to the constant technological and technical development of infocommunication systems, consumers of their services, as well as the quantitative and qualitative growth of requirements for these systems. The development of communication has led to the appearance in modern infocommunication systems and means of memory properties and computing ability, continuous signals expand their frequency ranges, and their generating means allow us to represent the state of the source with an extended number of parameters - this determines the change in the conditions for solving the sampling problem.* ***The aim of the work*** *is to reduce the information redundancy of the discrete representation of a continuous signal (process) compared to traditional solutions (using the example of Kotelnikov theorem). M****ethods****. High indicators of memory properties and computing ability of infocommunication means and systems made it possible to apply methods of statistical analysis of data on signal parameters recorded in memory when solving the problem. This made it possible to abandon the entropy approach used in solving this class of problems in this solution. The rations obtained in previous studies based on harmonic analysis methods for Fourier transformations are taken as a priori data.* ***Results.*** *A theorem has been formulated and proved, which is a development of the theory of discrete representation of continuous processes in relation to the sampling of signals during* *their transmission through communication channels with memory. The proof of the theorem allows us to assert that in conditions of transmission of multiparametric continuous signals over channels with memory, their sampling is possible by samples, the number of which is significantly less than in the decision of V.A. Kotelnikov. So it is possible to develop a solution to the problem of truncating the upper frequency of the signal.* ***Practical relevance.*** *In order to approximate finding a practically significant gain in reducing the information redundancy of the discrete representation of the original signal, it is possible to use the coefficient represented in the estimate. It reflects the ratio of the information load of the continuous signal per communication channel (line) in the Kotelnikov solution to the information load of the presented solution.*

Key words: *channel with memory, continuous multi-parameter signal, frequency of parameter change, sampling.*

Information about Authors

Sergey Aleksandrovich Ivanov – Ph.D. of Engineering Sciences. Doctoral Candidate. Military Academy of Communications. Field of research: theory of information and telecommunication resources management. E–mail: sa-ivanov@inbox.ru

Yuri Ivanovich Starodubtsev – Dr. habil. of Military Sciences, Full Professor, Honored Scientist of Russia. Professor of the Department of Security of Infocommunication Systems for Special Ops. Military Academy of Communications. Field of research: theory of information and telecommunication resources management, information security. E–mail: prof.starodubtsev@gmail.com

Address: Russia, 194064, Saint-Petersburg, Tihoreckiy prospekt, 3.