УДК 671.372.542

Линейная минимаксная интерполяция стационарного случайного процесса с интервальными параметрами

Сидоров И. Г., Левин В. И.

Актуальность. *В статье рассмотрены существующие подходы к актуальной задаче минимаксного сглаживания стационарного случайного процесса в условиях, когда наблюдаемый процесс является аддитивной смесью взаимно некоррелированных полезной составляющей и помехи, о спектральных плотностях которых имеется частичная информация в форме интервальных изменений их значений, а также их интервальные моментные неравенства, структурно содержащие одинаковые по абсолютной величине, небольшие симметричные отклонения неопределенности от заданных границ своих интервальных ограничений, которым они удовлетворяют. Дана точная постановка интервальной задачи линейного минимаксного сглаживания стационарного случайного процесса в условиях существования согласованной седловой точки интервальной согласованной функции Лагранжа.* ***Цель статьи.*** *Целью является изложение идеи решения задачи линейного минимаксного сглаживания стационарного случайного процесса с учетом интервальных моментных ограничений, которым удовлетворяют эти параметры.* ***Метод.*** *На базе предложенной идеи сформулирован и обоснован метод детерминизации, позволяющий решить задачу линейной минимаксной интерполяции при интервальной неопределенности параметров путем ее сведения к двум полностью определенным задачам оптимизации того же типа.* ***Новизна.*** *Сформулирована и доказана теорема, определяющая необходимое и достаточное условие существования решения выпуклой задачи линейной минимаксной интерполяции при интервальной неопределенности параметров в условиях существования согласованной седловой точки интервальной согласованной функции Лагранжа.* ***Результат.*** *Построен 4-шаговый алгоритм решения задачи линейного минимаксного сглаживания стационарного случайного процесса при интервальной неопределенности параметров путем ее сведения к двум полностью определенным задачам оптимизации того же типа. Используемый детерминизационный подход сводит решение игры с недетерминированными параметрами интервального типа к решению двух граничных игр с детерминированными стратегиями и функциями выигрыша с использованием аппарата интервальной арифметики в условиях существования согласованной седловой точки интервальной согласованной функции Лагранжа. Дается пример, иллюстрирующий предлагаемый метод анализа.*

Ключевые слова*: седловая точка, шум, некоррелированный, спектральная плотность, метод детерминизации, минимаксная интерполяция, стационарный, функция Лагранжа, интервальные параметры, интервальные моментные ограничения, граничные игры, интервальная арифметика, выпуклый, 4-шаговый алгоритм.*

Введение

Задача минимаксной фильтрации и интерполяции стационарного случайного процесса с непрерывным и дискретным временем поставлена и решена О.М. Куркиным [1, 2]. Задача синтеза минимакс-робастной частотной характери-

---

Библиографическая ссылка на статью:
Сидоров И. Г., Левин В. И. Линейная минимаксная интерполяция стационарного случайного процесса с интервальными параметрами // Системы управления, связи и безопасности. 2021. № 1. С. 215-242. DOI: 10.24411/2410-9916-2021-10109.

Reference for citation:
Sidorov I. G., Levin V. I. Linear Minimax Interpolation of a Stationary Random Process with Interval Parameters. *Systems of Control, Communication and Security*, 2021, no. 1, pp. 215-242 (in Russian). DOI: 10.24411/2410-9916-2021-10109.

стики интерполятора, построенного по результатам наблюдения на интервале времени $(-\infty,+\infty)$ в случае нечетко интервальной спектральной плотности возмущения для стационарных случайных процессов исследовалась в работах [3-12]. M. Taniguchi [6] был первым кто исследовал проблему минимаксной интерполяции. Для моделирования «ε-загрязненной» стационарной последовательности он разработал минимакс-робастный интерполятор для пропущенных наблюдений в одной точке. S. Kassam [8] установил связь этой проблемы с проблемой тестирования гипотезы. Он изучил проблему модели «полоски» стационарных последовательностей. Эта модель включает в себя «ε-загрязненную» модель как частный случай. J. Franke [9] исследовал проблему минимаксной интерполяции с одним пропущенным наблюдением и экстраполяцию на один шаг для коррелированных последовательностей. Несколько результатов было получено M. Moklyachuk и O. Masyutka в работе [4], в которой была решена задача линейной минимакс-робастной интерполяции линейных функционалов для пропущенных значений стандартной векторной стационарной случайной последовательности с ортогональными значениями конечного ранга. Ими было показано, что максимальную среднеквадратическую ошибку в оценке линейных функционалов дает модель скользящего среднего первого порядка.

В данной статье рассматривается задача линейной интерполяции процесса, когда спектральные интервальные плотности ошибок измерения сигнала удовлетворяют моментным условиям и известным априорным ограничениям в форме вещественно неотрицательно-определенных симметричных интервалов по отношению к заданным границам своих ограничений требуемой ширины. Рассматривается интервальная гарантирующая оценка, под которой понимается наилучшая оценка параметров полезного сигнала в смысле минимума среднеквадратической ошибки при наихудшем поведении ошибок измерений и возмущений с интервальными спектральными плотностям, принадлежащим соответственно параметрическим множествам нечеткости неотрицательно определенных спектральных плотностей.

Основная проблема в этих условиях связана с робастной параметрической (интервальной) минимаксной интерполяцией по отношению к неизвестной спектральной плотности полезного сигнала и неизвестной спектральной плотности помехи измерений, присутствующей в модели измерений системы в виде параметрической интервальной неопределенности на базе используемого в статье детерминизационного подхода к оптимизации в условиях интервальной неопределенности параметров.

Решение проблемы сводится к решению двух полностью определенных задач условной оптимизации того же вида [14-16]. При этом используется математическая теория сравнений интервалов, позволяющая заменить сравнение интервалов сравнением их нижних и верхних границ и выделить максимальный и минимальный интервал [14-17, 19, 20]. В статье показано, что линейный минимаксный интервальный интерполятор совпадает с оптимальным линейным интерполятором для объединенных множеств всех нижних (верхних) значений игры, которые образованы нижними (верхними) значениями детерминированных «точечных» игр с интервальными стратегиями игроков и их функциями выигрыша. Показано, что оптимальный интервальный интерполятор совпадает с минимаксным детерминированным интерполятором в форме согласованной интервальной функции Лагранжа по ее первой компоненте-искомого интерполятора и второй, спектральной компоненте наихудшего возмущения с регулярной областью допустимых решений ее нижней (верхней) граничной задачи.

Указанный подход позволяет в конструктивной форме построить 4-шаговый алгоритм решения интервальной задачи минимаксной интерполяции, который реализует метод детерминизации.

1. Постановка задачи

Для формальной постановки и решения задачи в работе введены обозначения, представленные в таблице 1.

Таблица 1 – Обозначения

Обозначение	Физический и математический смысл обозначения
t	- время
$\tilde{s}(t)$	- полезный сигнал
$\tilde{y}(t)$	- результаты скалярного наблюдения полезного сигнала на интервале времени $t \in (-\infty, +\infty)$
$\tilde{\xi}(t)$	- помеха наблюдения полезного сигнала
λ	- частота
$Q(\lambda)$	- частотная характеристика линейного преобразования процесса $\tilde{s}(t)$
q	- параметр, задающий степень девиации реализации неизвестной параметрической спектральной плотности помехи или полезного сигнала от ее ожидаемых граничных реализаций
i	- индекс обозначения помехи (i=1) или полезного сигнала (i=2) соответственно
k	- индекс обозначения k -го моментного ограничения на возмущение помехи
ℓ	- индекс обозначения ℓ -го моментного ограничения на возмущение сигнала
$\tilde{P}_i(\lambda, q)$	- параметрическая спектральная плотность скалярного наблюдения помехи (i=1) и полезного сигнала (i = 2) соответственно
$\tilde{H}_i = \tilde{H}_i(\lambda, q)$	- неизвестные составляющие спектральных плотностей помехи (i =1) и полезного сигнала (i =2) соответственно
$\underline{H}_i(\lambda), \overline{H}_i(\lambda)$	- ожидаемые граничные реализации неизвестных составляющих спектральных плотностей $\tilde{H}_i$ помехи (i =1) и полезного сигнала (i =2) соответственно
$T_i(\lambda)$	- известные четные составляющие спектральных плотностей помехи (i =1) и полезного сигнала (i =2) соответственно
$\tilde{\Xi}_i$	- интервал нечеткости реализации неизвестных параметрических составляющих спектральных плотностей помехи (i =1) и полезного сигнала (i =2) соответственно
Λ_1, Λ_2	- заданные области сосредоточения интервальных спектральных плотностей возмущений полезного сигнала и помехи соответственно

$\varphi_k(\lambda)$; $\psi_\ell(\lambda)$,	- заданные четные неотрицательные весовые функции частоты в левых частях моментных ограничений на возмущения полезного сигнала ($k=1,\dots,n_1$) и помехи ($\ell=1,\dots,n_2$) соответственно
$Im\,\lambda$	- мнимая часть комплексного переменного λ
$mes\Lambda_i$	- Лебегова мера множества области сосредоточения интервальных спектральных плотностей возмущений помехи полезного сигнала (i =1) и полезного сигнала (i =2) соответственно на вещественной оси $Im\,\lambda = 0$ частот λ
$\tilde{a}_k, \tilde{b}_\ell$	- интервальные параметры в правых частях моментных ограничений на возмущения помехи ($k=1,\dots,n_1$) и полезного сигнала ($\ell=1,\dots,n_2$) соответственно
$\delta_k^1, \delta_\ell^2$	- малые неотрицательные отклонения в правых частях моментных ограничений на возмущения помехи ($k=1,\dots,n_1$) и полезного сигнала ($\ell=1,\dots,n_2$) соответственно
$\tilde{\Xi}_1$	- выпуклый слабый компакт допустимых неотрицательно определенных спектральных плотностей возмущений помехи
$\tilde{\Xi}_2$	- выпуклый слабый компакт допустимых неотрицательно определенных спектральных плотностей возмущений полезного сигнала
$\tilde{\Xi}$	- декартово произведение выпуклых слабых компактов допустимых неотрицательно определенных спектральных плотностей возмущений помехи и полезного сигнала $\tilde{\Xi}_1 \times \tilde{\Xi}_2$
$\tilde{G}(\lambda)$	- интервальная частотная характеристика физически неосуществимого линейного фильтра (интерполятора)
$\underline{G}(\lambda), \overline{G}(\lambda)$	- граничные реализации интервальной частотной характеристики физически неосуществимого линейного фильтра (интерполятора) $\tilde{G}(\lambda)$
$\tilde{I}_i(\tilde{H}_i), i=1,2$	- линейные интервальные функционалы в левых частях моментных ограничений на возмущения помехи и полезного сигнала соответственно
$\tilde{\mathfrak{R}}$	- множество интервальных частотных характеристик $\tilde{G}(\lambda)$ физически неосуществимых линейных фильтров (интерполяторов) с действительным оригиналами
$D(\tilde{G},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)$	- интервальный функционал дисперсии ошибки интерполяции
$\underline{D}(\tilde{G},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)$, $\overline{D}(\tilde{G},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)$	- граничные реализации интервального функционала дисперсии ошибки интерполяции
$\Upsilon(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ $\Upsilon(\overline{\alpha},\overline{\beta})$	- эквивалентные граничные оценки интервального функционала дисперсии ошибки интерполяции в двойственной задаче выпуклого программирования
$\underset{\lambda\in\Lambda_1\cap\Lambda_2}{vrai\max} f(\lambda)$	- существенный максимум функции $f(\lambda)$ на множестве $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$
IR	- множество вещественных интервалов, состоящее из всевозможных упорядоченных пар вещественных чисел
$\tilde{E}$	- непустое подмножество произвольной мощности (множество интервальных стратегий) из множества IR
$\tilde{\Omega}$	- интервальная антагонистическая игра двух игроков – исследователя $\tilde{\mathfrak{R}}$ и природы $\tilde{\Xi}$ в нормальной форме
$\Omega=\{D,\ \Xi,\ \mathfrak{R}\}$	- точечная антагонистическая игра двух игроков - исследователя $\mathfrak{R}$ и природы Ξ в нормальной форме и функционалом дисперсии ошибки интерполяции D

$\tilde{G}^{0}$	- оптимальное значение интервальной частотной характеристики физически неосуществимого линейного фильтра (интерполятора) – первая компонента интервальной седловой точки
$\tilde{H}^{0}=(\tilde{H}_1^{0},\tilde{H}_2^{0})$	- оптимальное значение интервальных спектральных плотностей возмущений помехи и полезного сигнала соответственно - вторая компонента интервальной седловой точки
$\tilde{A}=(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$	- интервальный вектор векторных множителей Лагранжа $\tilde{\alpha}=(\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_{n_1})$, $\tilde{\beta}=(\tilde{\beta}_1,\ldots,\tilde{\beta}_{n_2})$
$\underline{\alpha},\underline{\beta},\overline{\alpha},\overline{\beta}$	- нижние граничные реализации множителей Лагранжа $\tilde{\alpha}$ - верхние граничные реализации множителей Лагранжа $\tilde{\beta}$
$\tilde{F}(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{A})$	- согласованная интервальная функция Лагранжа
$(\tilde{G}^{*},\tilde{H}^{*},A^{*})$	- интервальная согласованная седловая точка
$n(t)$	- гауссовская помеха
R^{n_i}	- действительное n_i - мерное евклидово пространство векторов
$\vec{c},\vec{d}$	- вектора из n - мерного евклидова пространства R^n
$L_1(-\infty,+\infty)$	- множество интегрируемых по Лебегу функций, заданных на действительной прямой
$L_2(\Lambda)$	- множество интегрируемых по Лебегу вместе с квадратом модуля функций, заданных на измеримом подмножестве Λ действительной прямой

По результатам скалярного наблюдения на интервале времени $t\in(-\infty,+\infty)$ стационарного случайного процесса

$$\tilde{y}(t)=\tilde{s}(t)+\tilde{\xi}(t), \tag{1.1}$$

$$\mathbf{E}\tilde{s}(t)=0,\mathbf{E}\tilde{\xi}(t)=0;\quad \mathbf{E}\tilde{\xi}(t)\tilde{s}(\tau)=0\quad \forall t,\ \ t\in(-\infty,+\infty)$$

требуется оценить линейное преобразование с известной частотной характеристикой (ЧХ) $Q(\lambda)$ процесса $\tilde{s}(t)$ (λ – частота), $\mathbf{E}$ – символ математического ожидания. О спектральных плотностях взаимно некоррелированных стационарных случайных процессов $\tilde{\xi}(t)$ и $\tilde{s}(t)$ (помехи и полезного сигнала соответственно) известно лишь, что возможно их представление в виде

$$\tilde{P}_i(\lambda,q)=T_i(\lambda)+\tilde{H}_i(\lambda,q)\ \ i=1,2, \tag{1.2}$$

где $T_1(\lambda),T_2(\lambda)\in L_1(-\infty,+\infty)$ – известные четные составляющие спектральных плотностей помехи и полезного сигнала соответственно, соответствующие действительным процессам, а относительно неизвестной компоненты $\tilde{H}_i(\lambda,q)$ известно лишь, что они удовлетворяют условию параметрической интервальной нечеткости:

$$\tilde{H}_i(\lambda,q)\ =(1-q)\underline{H}_i(\lambda)+q\overline{H_i}(\lambda), \tag{1.3}$$

где $\underline{H}_i(\lambda),\overline{H}_i(\lambda)$ – известные граничные реализации неизвестных параметрических составляющих спектральных плотностей $\tilde{H}_i(\lambda,q)$, которые слабо меняются при изменении параметра q, $q\in[0,1]$ – параметр, задающий возможную степень девиации реализации $\tilde{H}_i(\lambda, q)$ на ее интервале нечеткости $\tilde{\Xi}_i = [\underline{H}_i(\lambda), \overline{H}_i(\lambda)]$, $\tilde{H}_i(\lambda, q) \in \tilde{\Xi}_i$ от ее ожидаемых граничных реализаций и удовлетворяют заданным моментным условиям:

$$\tilde{H}_1(\lambda, q) \in \tilde{\Xi}_1 = \{\tilde{H}_1(\lambda, q) \geq 0 \mid \tilde{I}_1(\tilde{H}_1) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Lambda_1} \tilde{H}_1(\lambda, q)\varphi_k(\lambda) d\lambda \leq \tilde{a}_k, k = 1, ..., n_1\} \tag{1.4}$$
$$\tilde{H}_1(\lambda, q) = 0, \text{ если } \lambda \notin \Lambda_1;$$

$$\tilde{H}_2(\lambda, q) \in \tilde{\Xi}_2 = \{\tilde{H}_2(\lambda, q) \geq 0 \mid \tilde{I}_2(\tilde{H}_2) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Lambda_2} \tilde{H}_2(\lambda, q)\psi_\ell(\lambda) d\lambda \leq \tilde{b}_\ell, \ell = 1, ..., n_2\}, \tag{1.5}$$
$$\tilde{H}_2(\lambda, q) = 0, \text{ если } \lambda \notin \Lambda_2,$$

где Λ_1, Λ_2 – заданные области сосредоточения интервальных спектральных плотностей возмущений (ожидаемые полосы частот) на оси частот положительной меры, $mes\Lambda_1 > 0, mes\Lambda_2 > 0$ заданные функции частоты $\varphi_k(\lambda)$, $\psi_\ell(\lambda)$, удовлетворяющие ограничениям

$$\varphi_k(\lambda) \geq 0, \varphi_k(\lambda) = \varphi_k(-\lambda), \lambda \in (-\infty, \infty), \tilde{a}_k \geq 0, (k = 1, ..., n_1);$$

$$\psi_\ell(\lambda) \geq 0, \psi_\ell(\lambda) = \psi_\ell(-\lambda) \geq 0, \lambda \in (-\infty, \infty), \tilde{b}_\ell \geq 0, (\ell = 1, ..., n_2); q \in [0,1]$$

а интервальные параметры в правых частях ограничений (1.4), (1.5) представлены в виде симметричных интервалов

$$\tilde{a}_k = [a_\kappa - \delta_k^1, a_\kappa + \delta_k^1], \tilde{b}_k = [b_\kappa - \delta_k^2, b_\kappa + \delta_k^2]$$

с малыми неотрицательными отклонениями δ_k^1, δ_k^2 соответственно.

Будем считать далее, что множество спектральных плотностей, заданных в виде (1.3) и удовлетворяющих ограничениям (1.4), (1.5) принадлежит выпуклому слабому компакту $\tilde{\Xi} = \tilde{\Xi}_1 \times \tilde{\Xi}_2$ – декартовому произведению выпуклых слабых компактов допустимых неотрицательно определенных спектральных плотностей возмущений помехи и полезного сигнала $\tilde{\Xi}_1$ и $\tilde{\Xi}_2$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{R}}$ – множество интервальных частотных характеристик $\tilde{G}(\lambda)$ физически неосуществимых линейных фильтров (интерполяторов) с действительным оригиналами

В условиях малого интервального изменения спектральной плотности возмущения от ее ожидаемого значения естественно рассматривать ее неопределенные составляющие, как интервальные факторы и применять при сглаживании наилучшую гарантирующую частотную характеристику $\tilde{G}(\lambda)$ в смысле интервальной дисперсии или интервального функционала ошибки оценивания в виде:

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \{\tilde{G}(\lambda) \in L_2(-\infty,\infty) \,|\, \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\tilde{G}(\lambda)d\lambda = 0\}, \tilde{G}(\lambda) =$$

$$= [\underline{G}(\lambda), \overline{G}(\lambda)].$$

$$D(\tilde{G}, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0) \le D(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0) \le D(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$$

$$\forall \tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{H}_1 = \tilde{H}_1(\lambda, q) \in \tilde{\Xi}_1, \tilde{H}_2 = \tilde{H}_2(\lambda, q) \in \tilde{\Xi}_2,$$

$$D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{|\tilde{G}(\lambda)|^2 \; \tilde{P}_1(\lambda, q) \; + |\tilde{G}(\lambda) - Q(\lambda)|^2 \; \tilde{P}_2(\lambda, q)\}d\lambda,$$

где интервальный функционал дисперсии ошибки оценивания $D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$ может быть записан в виде интервала:

$$D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = [\; \underline{D}(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2), \overline{D}(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2)\;].$$

Линейные интервальные функционалы $\tilde{I}_i(\tilde{H}_i), i = 1, 2$ в левых частях ограничений (1.4), (1.5) и симметрично-интервальные параметры в правых частях могут быть записаны в виде:

$$\tilde{I}_i = [\underline{I}(\tilde{H}_i), \overline{I}(\tilde{H}_i)], i = 1, 2,$$

$$\tilde{a}_k = [\underline{a}_\kappa, \overline{a}_\kappa] = [a_\kappa - \delta_k^1, a_\kappa + \delta_k^1], \tilde{b}_k = [\underline{b}_\kappa, \overline{b}_\kappa] = [b_\kappa - \delta_k^2, b_\kappa + \delta_k^2].$$

В итоге можно записать интервальную задачу линейного минимаксного сглаживания в явном интервальном виде:

$$D(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0) = D(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0) = [\; \underline{D}(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0), \overline{D}(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)\;] = \min_{\tilde{G}\in\tilde{\mathfrak{R}}} \sup_{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \in \tilde{\Xi}} D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2), \quad (1.6)$$

$$\tilde{I}_1 = [\underline{I}(\tilde{H}_1), \overline{I}(\tilde{H}_1)] \le \tilde{a}_k, \tilde{I}_2 = [\underline{I}(\tilde{H}_2), \overline{I}(\tilde{H}_2)] \le \tilde{b}_\ell,$$

В качестве требуемой минимаксной интервальной арифметики будем использовать полную интервальную арифметику Каухера [13]. В этой арифметике максимальным элементом множества $\tilde{E} \subseteq \mathrm{IR}$, является интервал $\tilde{c}$, удовлетворяющий условиям:

$$\tilde{c} = \max\{\tilde{e}_i \subset \tilde{E}\} := ((\tilde{c} \subset \tilde{E})\,\&\,(\forall \tilde{e}_i \subset \tilde{E})(\tilde{e}_i \le \tilde{c})),$$

а минимальным элементом множества $\tilde{E} \subset IR$, является интервал $\tilde{d}$, такой, что: $\tilde{d} = \min\{\tilde{e}_i \subset \tilde{E}\} := ((\tilde{c} \subset \tilde{E})\,\&\,(\forall \tilde{e}_i \subset \tilde{E})(\tilde{e}_i \ge \tilde{d}))$,

где $IR = \{\tilde{a} = [\underline{a}, \overline{a}] \,|\, \underline{a}, \overline{a} \in R\} -$ множество вещественных интервалов, состоящее из всевозможных упорядоченных пар вещественных чисел; всякое двухэлементное подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани

$$\sup(\tilde{a}, \tilde{b}) = [\sup(\underline{a}, \underline{b}), \sup(\overline{a}, \overline{b})],$$

$$\inf(\tilde{a}, \tilde{b}) = [\inf(\underline{a}, \underline{b}), \inf(\overline{a}, \overline{b})].$$

Будем интерпретировать задачу (1.6) как интервальную антагонистическую игру двух игроков исследователя и природы в нормальной форме природы и исследователя $\tilde{\Omega} = \{\tilde{D}, \tilde{\Xi}, \tilde{\mathfrak{R}}\}$, в которой интервальный функционал выигрыша

$\tilde{D} = D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$ определяется соотношением (1.6), пространством интервальных стратегий первого игрока, стремящегося максимизировать $D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$, является множество допустимых спектральных интервальных плотностей $\tilde{\Xi}$, а пространством интервальных стратегий второго игрока, стремящегося минимизировать $D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$, является множество допустимых интервальных ЧХ линейных фильтров. Под интервальной игрой $\tilde{\Omega} = \{\tilde{D},\ \tilde{\Xi},\ \tilde{\mathfrak{R}}\}$ будем понимать совокупность всех «точечных» игр $\Omega = \{D,\ \Xi,\ \mathfrak{R}\}$ со стратегиями $H_1 \in \tilde{H}_1 = [\underline{H}_1; \overline{H}_1], H_2 \in \tilde{H}_2 = [\underline{H}_2; \overline{H}_2]$, $G \in \tilde{G} = [\underline{G}, \overline{G}]$ и интервальной функцией выигрыша из (1.6)

$$\begin{aligned}&\tilde{\Omega} = \{\tilde{D},\ \tilde{\Xi},\ \tilde{\mathfrak{R}}\} \overset{def}{=} (\Omega = \{D,\ \Xi,\ \mathfrak{R}\} \,| \\ &| \, D \in \tilde{D}, H_1 \in \tilde{H}_1, H \in \tilde{H}_2, G \in \tilde{G}).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Назовем пару интервальных функций (стратегий игроков) $(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0)$, $\tilde{H}^0 = (\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)$ интервальной седловой точкой в игре $\tilde{\Omega} = \{\tilde{D},\ \tilde{\Xi},\ \tilde{\mathfrak{R}}\}$, если

$$D(\tilde{G}, \tilde{H}^0) \le D(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0) \le D(\tilde{G}^0, \tilde{H}),$$

$$\forall \tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{H}_1 \in \tilde{\Xi}_1, \tilde{H}_2 \in \tilde{\Xi}_2,$$

где $D(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0) = \min\limits_{\tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}} \sup\limits_{\tilde{H} \in \tilde{\Xi}} D(\tilde{G}, \tilde{H})$. Если в интервальной игре $\tilde{\Omega} = \{\tilde{D},\ \tilde{\Xi},\ \tilde{\mathfrak{R}}\}$ существует седловая точка $(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)$, то

$$\begin{aligned}&\min_{\tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}} \max_{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \in \tilde{\Xi}} D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \max_{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \in \tilde{\Xi}} \min_{\tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}} D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \\ &= D(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0),\end{aligned} \tag{1.8}$$

а $\tilde{G}^0(\lambda)$ является минимаксным интервальным фильтром. Назовем $\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0$ наименее благоприятными интервальными спектральными плотностями. Тогда, с одной стороны,

$$\max_{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \in \tilde{\Xi}} \min_{\tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}} D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \min_{\tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}} D(\tilde{G}, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0) = D(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)$$

и минимаксный интервальный фильтр является оптимальным фильтром по отношению к наименее благоприятным интервальным спектральным плотностям (настраивается на них). С другой стороны,

$$\min_{\tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}} \max_{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \in \tilde{\Xi}} D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \max_{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \in \tilde{\Xi}} D(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = D(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)$$

наименее благоприятные спектральные плотности оказываются наихудшими по отношению к минимаксному фильтру среди всех возможных $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \in \tilde{\Xi}$. Отметим, что в подавляющем большинстве минимаксных задач оценивая, включая и симметрично-интервальный случай (во всех интересных с технической точки зрения задачах) седловые точки существуют.

Сравнение интервалов выполняется по правилу [14-17, 20]: сдвинутый вправо (влево) интервал – больший (меньший), совпадающие интервалы равны, накрывающие интервалы не сравнимы с накрываемыми.

Пусть $V = \max_{H_1,H_2\in\Xi}\min_{G\in\Re} D(G,H_1,H_2)$ и $W = \max_{H_1,H_2\in\Xi}\min_{G\in\Re} D(G,H_1,H_2)$ нижнее и верхнее значение "точечной" игры Ω реализации интервальной игры $\tilde{\Omega}$ (1.7). Тогда целью проведения интервальной игры является $\tilde{\Omega} = \{\tilde{D},\ \tilde{\Xi},\ \tilde{\Re}\}$ является определение:

– объединенного множества всех нижних значений игры

$$\tilde{V} = [\underline{V},\overline{V}] \overset{def}{=} [\inf\{V \mid G \in \tilde{G}, H \in \tilde{H}\};\sup\{V \mid G \in \tilde{G}, H \in \tilde{H}\}], \tag{1.9}$$

– объединенного множества всех верхних значений игры

$$\tilde{W} = [\underline{W},\overline{W}] \overset{def}{=} [\inf\{W \mid G \in \tilde{G}, H \in \tilde{H}\};\sup\{W \mid G \in \tilde{G}, H \in \tilde{H}\}], \tag{1.10}$$

– объединенного множества всех стратегий, на которых достигается нижнее значение игры

$$(\underline{G},\underline{H}) \overset{def}{=} \{\underline{G},\underline{H}) \in \Re\times\Xi \mid (\exists \underline{G} \in \tilde{G}),(\exists \underline{H} \in \tilde{H})(D(\underline{G},\underline{H}) = V \in \hat{V}\}$$

и верхнее значение игры

$$(\overline{G},\overline{H}) \overset{def}{=} \{\overline{G},\overline{H} \in \Re\times\Xi \mid (\exists \overline{G} \in \tilde{G}),(\exists \overline{H} \in \tilde{H})(D(\overline{G},\overline{H}) = W \in \tilde{W}\}.$$

Таким образом, требуется найти по возможности наиболее просто и наиболее точно «внешние» оценки объединенного множества (1.9) нижних значений и объединенного множества (1.10) верхних значений игры $\tilde{\Omega}$, которые образованы нижними и верхними значениями точечных игр (1.7) со стратегиями $G\in\tilde{G}, H\in\tilde{H}$ и функциями выигрыша $D\in D(\tilde{G},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)$.

Возникают две взаимосвязанные задачи.

1. Найти ЧХ интервального минимаксного интервального интерполятора.

$$\min_{\tilde{G}\in\tilde{\Re}}\sup_{\tilde{H}\in\tilde{\Xi}} D(\tilde{G},\tilde{H}) = \sup_{\tilde{H}\in\tilde{\Xi}} D(\tilde{G}^0,\tilde{H}) \tag{1.11}$$

2. Выяснить условия существования интервальной седловой точки $(\tilde{G}^0,\tilde{H}_1^0,\tilde{H}_2^0)$ у интервального функционала $D(\tilde{G},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)$ и найти ее

$$D(\tilde{G},\tilde{H}^0) \le D(\tilde{G}^0,\tilde{H}^0) \le D(\tilde{G}^0,\tilde{H}),$$
$$\forall\tilde{G}\in\tilde{\Re},\forall\tilde{H}\in\tilde{\Xi} = \tilde{\Xi}_1\times\tilde{\Xi}_2, \tilde{H}_1\in\tilde{\Xi}_1, \tilde{H}_2\in\tilde{\Xi}_2. \tag{1.12}$$

2. Редукция задачи к двум детерминированным

Сведем недетерминированную интервальную задачу сглаживания к двум детерминированным, согласно правилам сравнения интервалов, используя общий метод детерминизации [14-17, 19, 21]. Согласно теореме 3 [19] интервальное уравнение в верхней строке сформированной выше системы (1.6) можно записать в виде эквивалентной пары детерминированных уравнений

$$\overline{D}(\tilde{G}^0,\tilde{H}^0) = \min_{G\in\tilde{\Re}}\sup_{\tilde{H}\in,\tilde{\Xi}} \overline{D}(\tilde{G},\tilde{H}),$$

$$\underline{D}(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0) = \min_{\tilde{G}\in\tilde{\mathfrak{R}}} \sup_{\tilde{H}\in,\tilde{\Xi}} \underline{D}(\tilde{G}, \tilde{H}). \tag{2.1}$$

Далее согласно методу детерминизации, систему интервальных неравенств в задаче условной оптимизации (1.6) можно записать в виде эквивалентной системы детерминированных неравенств

$$\begin{aligned}
&\underline{I}(\underline{H}_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_1(\lambda)\varphi_k(\lambda)d\lambda \le a_\kappa - \delta_k^1,\\
&\overline{I}(\overline{H}_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{H}_1(\lambda)\varphi_k(\lambda)d\lambda \le a_\kappa + \delta_k^1\\
&(\kappa = 1,\dots,n_1);\\
&\underline{I}(\underline{H}_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_2(\lambda)\psi_\ell(\lambda)d\lambda \le b_\ell - \delta_\ell^2,\\
&\overline{I}(\overline{H}_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{H}_2(\lambda)\psi_\ell(\lambda)d\lambda \le b_\ell + \delta_\ell^2,\\
&(\ell = 1,\dots,n_2);
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Рассматривая совместную пару детерминированных уравнений оптимизации (2.3) с системой неравенств – ограничений (2.4), имеем две выпуклые детерминированные задачи условной оптимизации вида:

$$D(\tilde{G}, \overline{H}_1(\lambda), \overline{H}_2(\lambda)) = \text{minsup} \tag{2.3}$$

при

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{H}_1(\lambda)\varphi_{\text{k}}(\lambda)d\lambda \le a_\kappa + \delta_k^1; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{H}_2(\lambda)\psi_\ell(\lambda)d\lambda \le b_\ell + \delta_\ell^2,$$

$$\forall\tilde{G}\in\tilde{\mathfrak{R}}, \overline{H}_1(\lambda)\in\tilde{\Xi}_1, \overline{H}_2(\lambda)\in\tilde{\Xi}_2$$

и задачу

$$D(\tilde{G}, \underline{H}_1(\lambda), \underline{H}_2(\lambda)) = \text{minsup} \tag{2.4}$$

при

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_1(\lambda)\varphi_{\text{k}}(\lambda)d\lambda \le a_\kappa - \delta_k^1; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_2(\lambda)\psi_\ell(\lambda)d\lambda \le b_\ell - \delta_\ell^2,$$

$$\forall\tilde{G}\in\tilde{\mathfrak{R}}, \underline{H}_1(\lambda)\in\tilde{\Xi}_1\ ,\ \underline{H}_2(\lambda)\in\tilde{\Xi}_2.$$

Задачу (2.4) назовем нижней граничной задачей интервальной задачи (1.6), а задачу (2.3) ее верхней граничной задачей. Из построения видно, что пара задач (2.3)-(2.4), рассматриваемых в совокупности, эквивалентна исходной интервальной задаче (1.6). Таким образом, для получения решения задачи (1.6) надо решить ее нижнюю (2.4) и верхнюю (2.3) граничные задачи. В этих задачах все граничные функции вогнутые, а сравнение интервалов выполняется по специальной уже упомянутым в первом разделе правилам минимаксной интервальной арифметике.

Следуя работам [16, 18, 19, 21] введем интервальную функцию Лагранжа задачи (1.6) в виде интервала:

$$\tilde{F}(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{A}) = [\underline{F}(\tilde{G}, \tilde{H}, \underline{A}), \overline{F}(\tilde{G}, \tilde{H}, \overline{A}],$$

где нижняя (верхняя) граница интервала $\tilde{F}(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{A})$ есть функция Лагранжа нижней (верхней) граничной задачи (2.5) и (2.6) со множителями Лагранжа $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ и $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$, соответствующие ограничениям (2.4).

Определим седловую точку $(\tilde{G}^*, \tilde{H}^*, A^*)$ интервальной функции Лагранжа в виде

$$\tilde{F}(\tilde{G}^*, \tilde{H}^*, \tilde{A}) \le \tilde{F}(\tilde{G}^*, \tilde{H}^*, \tilde{A}^*) \le \tilde{F}(\tilde{G}^*, \tilde{H}, \tilde{A}^*), \quad \forall \tilde{H}, \forall \tilde{A}, \qquad (2.5)$$

то есть в этой точке $\tilde{F}(\bullet)$ имеет максимум по $\tilde{A}$ и минимум по $\tilde{H}$,

где для интервальных векторов $(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$ и $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ введены следующие обозначения

$$\tilde{H} = (\tilde{H}_1, \tilde{H}_2),\ \tilde{A} = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}),\ \tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_k), \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_\ell).$$

Следуя работам [16, 18, 19, 21] назовем функции Лагранжа для нижней и верхней задач (2.3), (2.4) $\underline{F}(\tilde{G}, \tilde{H}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}), \overline{F}(\tilde{G}, \tilde{H}, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ согласованными, если они имеют хотя бы одну пару согласованных седловых точек вида

$$(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0, \underline{A}^0),\ (\tilde{G}^0, \tilde{H}^0, \overline{A}^0),$$

с одинаковой первой и второй ее компонентами $(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0)$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 (детерминизации). *Для того, чтобы выпуклая интервальная задача сглаживания (1.6) с регулярной областью допустимых решений граничных задач линейного минимаксного сглаживания (2.1), (2.2) имела решение* $(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0, \tilde{\alpha}^0, \tilde{\beta}^0)$, *необходимо и достаточно, чтобы ее нижняя и верхняя граничные задачи имели согласованные функции Лагранжа с согласованной парой седловых точек вида*

$$(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0, \underline{\alpha}^0, \underline{\beta}^0); (\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0, \overline{\alpha}^0, \overline{\beta}^0).$$

Теорема 1 сводит решение интервальной задачи минимаксного сглаживания к решению ее нижней и верхней граничных задач. В приложении 1 будет показано, что согласованная седловая точка в данной задаче существует.

Теорема 2. *В выпуклой интервальной минимаксной задаче сглаживания (1.6) с регулярной областью допустимых решений согласованных граничных задач (2.3), (2.4) точка*

$$(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0, \tilde{\alpha}^0, \tilde{\beta}^0)$$

является решением тогда и только тогда, когда существует точка

$$\tilde{A}^0 = (\tilde{\alpha}^0, \tilde{\beta}^0) \ge 0,$$

такая, что $(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0, \tilde{A}^0)$ *– согласованная интервальная седловая точка интервальной функции Лагранжа задач (2.1), (2.2).*

Теорема 2 позволяет свести оптимальную задачу интервального минимаксного сглаживания с ограничениями к задаче без ограничений. Из теорем 1, 2, учитывая, что нижняя и верхняя граничные игры каждой игры в общем случае независимы и потому не обязательно согласованы, можно заключить, что игры с интервальными параметрами (функциями Лагранжа) не всегда имеют решение. Отсутствие решений игры в общем случае есть плата за недостаток о параметрах системы, задаваемых лишь с точностью до интервалов возможных значений. Теория антагонистических игр была задумана для формирования рекомендаций сторонам конфликта [22]. Теорема Дж. фон Неймана [23] гарантировала возможность таких рекомендаций при полной информации о выигрышах сторон. Полученные результаты показывают, что при неполной информации такие рекомендации не всегда возможны. Сделанные выводы применительно к антагонистическим играм были впервые представлены в работах [16, 18, 21].

3. Решение задачи интервального сглаживания

Наиболее типичными ограничениями на возмущения в практических приложениях являются ограничения на их моменты (дисперсии, дисперсии производных и т.п.) и на области сосредоточения спектра, представимыми в виде моментных неравенств (1.4), (1.5).

Итак, требуется определить

$$\sup_{\tilde{H}_i \in \tilde{\Xi}_i, i=1,2} \underline{D}(\tilde{G}, \tilde{H}_1(\lambda, q), \tilde{H}_2(\lambda, q)); \tag{3.1}$$

Введем в рассмотрение задачи выпуклого программирования, двойственные соответственно к верхней нижней граничным задачам линейного минимаксного сглаживания (2.1), (2.2), аналогично задаче выпуклого программирования, двойственной к исходной, введенной в рассмотрение в монографии [1] в эквивалентной форме. Обозначим эквивалентные оценки искомых функционалов (2.3), (2.4) через $\Upsilon(\underline{\alpha},\underline{\beta})$, $\Upsilon(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ соответственно. Если выполняется следующее условие 1.5 из [1] (гл. 2, параграф 2.2.2) для функций:

$$\rho(\underline{\alpha},\underline{\beta}) \le 0 \ , \ \rho(\overline{\alpha},\overline{\beta}) \le 0,$$

где

$$\rho(\underline{\alpha},\underline{\beta}) = vrai \max_{\lambda \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2} [|Q(\lambda)| - <\underline{\alpha}, \varphi(\lambda)>^{1/2} - <\underline{\beta}, \psi(\lambda)>^{1/2}], \tag{3.2}$$

$$\rho(\overline{\alpha},\overline{\beta}) = vrai \max_{\lambda \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2} [|Q(\lambda)| - <\overline{\alpha}, \varphi(\lambda)>^{1/2} - <\overline{\beta}, \psi(\lambda)>^{1/2}],$$

то согласно теореме 2.2 из [1] имеем:

$$\Upsilon(\overline{\alpha},\overline{\beta}) = \Upsilon_0 + \Upsilon_1(\overline{\beta}) + \Upsilon_2(\overline{\alpha}) \to \min_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}, \tag{3.3}$$

$$\Upsilon(\underline{\alpha},\underline{\beta}) = \Upsilon_0 + \Upsilon_1(\underline{\beta}) + \Upsilon_2(\underline{\alpha}) \to \min_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}, \tag{3.4}$$

где

$$\Upsilon_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{T_1(\lambda)T_2(\lambda)}{T_1(\lambda)+T_2(\lambda)}\,|Q(\lambda)|^2\,d\lambda;$$

$$\Upsilon_1(\overline{\beta})=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_1^2(\lambda,\overline{\beta})[T_1(\lambda)+T_2(\lambda)]d\lambda,$$

$$\Upsilon_1(\underline{\beta})=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_1^2(\lambda,\underline{\beta})[T_1(\lambda)+T_2(\lambda)]d\lambda, \qquad (3.5)$$

$$\Upsilon_2(\overline{\alpha})=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_2^2(\lambda,\overline{\alpha})[T_1(\lambda)+T_2(\lambda)]d\lambda,$$

$$\Upsilon_2(\underline{\alpha})=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_2^2(\lambda,\underline{\alpha})[T_1(\lambda)+T_2(\lambda)]d\lambda\ ,$$

$$\gamma_2(\lambda,\overline{\alpha})=\max[0;\frac{T_1(\lambda)|Q(\lambda)|}{T_1(\lambda)+T_2(\lambda)}-<\overline{\alpha},\varphi(\lambda)>^{1/2}]\chi_{\Lambda_2}(\lambda),$$

$$\gamma_2(\lambda,\underline{\alpha})=\max[0;\frac{T_1(\lambda)|Q(\lambda)|}{T_1(\lambda)+T_2(\lambda)}-<\underline{\alpha},\varphi(\lambda)>^{1/2}]\chi_{\Lambda_2}(\lambda),$$

$$\gamma_1(\lambda,\overline{\beta})=\max[0;\frac{T_2(\lambda)|Q(\lambda)|}{T_1(\lambda)+T_2(\lambda)}-<\overline{\beta},\psi(\lambda)>^{1/2}]\chi_{\Lambda_1}(\lambda),$$

$$\gamma_1(\lambda,\underline{\beta})=\max[0;\frac{T_2(\lambda)|Q(\lambda)|}{T_1(\lambda)+T_2(\lambda)}-<\underline{\beta},\psi(\lambda)>^{1/2}]\chi_{\Lambda_1}(\lambda),$$

причем $\gamma_1(\lambda,\overline{\beta})\gamma_2(\lambda,\overline{\alpha})=0,\gamma_1(\lambda,\underline{\beta})\gamma_2(\lambda,\underline{\alpha})=0$ почти всюду при $\lambda\in(-\infty,+\infty)$. Через $\chi_{\Lambda_1}(\lambda),\chi_{\Lambda_2}(\lambda)$ обозначены характеристические функции множеств Λ_1,Λ_2 соответственно.

Через $<\vec{c},\vec{d}>$ обозначено скалярное произведение векторов $\vec{c},\vec{d}$ действительного n-мерного пространства R^n. Λ_i $_{(i=1,2)}$ – заданные области сосредоточения подмножества оси частот положительной меры $mes\ \Lambda_i>0$ значений спектра возмущений $\tilde{H}_i(\lambda,q)$, $\overline{\alpha}_i,\underline{\alpha}_i\in\overline{\mathrm{R}}_+^{n_2}$, $\overline{\beta}_i,\underline{\beta}_i\in\overline{\mathrm{R}}_+^{n_1}$ – соответственно векторные верхние и нижние граничные множители Лагранжа, $\overline{\mathrm{R}}_+^{n_i}$ – неотрицательный ортант пространства R^{n_i} (замыкание $\mathrm{R}_+^{n_i}$), $\varphi_k(\lambda)\in\overline{\mathrm{R}}_+^{n_1}$, $\psi_1(\lambda)\in\overline{\mathrm{R}}_+^{n_2}$ – неотрицательные, четные по λ заданные функции частоты.

Пусть выполнены условия существования и условия оптимальности в двойственной задаче к (1.4), (1.5), аналогичные условиям 1.1–1.6 из [1] о функционалах $\Upsilon_1(\overline{\beta}),\Upsilon_2(\overline{\alpha}),\Upsilon_1(\underline{\beta}),\Upsilon_2(\underline{\alpha})$. При этих условиях справедлива теорема

3 – аналог теоремы 2.7 из [1] о существовании седловой точки в линейной минимаксной интерполяции в двойственной форме.

Теорема 3. *Для существования решения задач (2.3) и (2.4) необходимо и достаточно существования решения двойственных задач (3.2)–(3.5) соответственно, оптимальное решение которых имеет вид:*

$$\sup_{\tilde{H}_i \in \tilde{\Xi}_i, i=1,2} D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \Upsilon(\underline{\alpha}, \underline{\beta}), \quad \sup_{\tilde{H}_i \in \tilde{\Xi}_i, i=1,2} D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \Upsilon(\overline{\alpha}, \overline{\beta}),$$

$$\tilde{G}^0(\lambda) = [\underline{G^0}(\lambda), \overline{G^0}(\lambda)], \underline{G^0}(\lambda) = \gamma(\lambda, \underline{\alpha}^0, \underline{\beta}^0) Q(\lambda),$$

$$\overline{G^0}(\lambda) = \gamma(\lambda, \overline{\alpha^0}, \overline{\beta^0}) Q(\lambda),$$

$$\gamma(\lambda, \underline{\alpha}^0, \underline{\beta}^0) = \max[\gamma_{\min}(\lambda, \underline{\alpha}^0) - \gamma_0(\lambda); 0] \chi_{\Lambda_2}(\lambda) +$$

$$+ \min[\gamma_{\max}(\lambda, \underline{\beta}^0) - \gamma_0(\lambda); 0] \chi_{\Lambda_1}(\lambda) + \gamma_0(\lambda);$$

$$\gamma_{\min}(\lambda, \underline{\alpha}^0) = |Q(\lambda)| - < \underline{\alpha}^0, \varphi(\lambda) >^{1/2}$$

$$\gamma_{\min}(\lambda, \overline{\alpha}^0) = |Q(\lambda)| - < \overline{\alpha}^0, \varphi(\lambda) >^{1/2}$$

$$\gamma_{\max}(\lambda, \underline{\beta}^0) = < \underline{\beta}^0, \psi(\lambda) >^{1/2},$$

$$\gamma_{\max}(\lambda, \overline{\beta}^0) = < \overline{\beta}^0, \psi(\lambda) >^{1/2},$$

$$\gamma_0(\lambda) = \frac{T_1(\lambda) T_2(\lambda)}{T_1(\lambda) + T_2(\lambda)} |Q(\lambda)|,$$

где $\underline{\beta}^0 \in \mathrm{R}_+^{n_1}, \underline{\alpha}^0 \in \mathrm{R}_+^{n_2}, \overline{\beta}^0 \in \mathrm{R}_+^{n_1}, \overline{\alpha}^0 \in \mathrm{R}_+^{n_2}$ – оптимальные множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (2.2).

Условия $\rho(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \leq 0$, $\rho(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \leq 0$ [1], означают, что

$$\gamma_{\min}(\lambda, \underline{\alpha}^0) \leq \gamma_{\max}(\lambda, \underline{\beta}^0), \ \gamma_{\min}(\lambda, \overline{\alpha}^0) \leq \gamma_{\max}(\lambda, \overline{\beta}^0).$$

Последние неравенства означают, что множители Лагранжа $\underline{\beta}^0$ ($\overline{\beta}^0$) и $\underline{\alpha}^0$ ($\overline{\alpha}^0$) в нижних и верхних граничных задачах определяют седловые граничные точки. Действительно, поскольку согласно [1] (см. теорему 2.1, гл. 2) в задаче максимизации линейного функционала при фиксированной ЧХ (частотной характеристике) интерполятора от $\tilde{H}(\lambda, q)$ при линейных ограничениях на $\tilde{H}(\lambda, q)$ выполняются необходимые и достаточные условия существования седловой точки двойственной задачи, то есть

$$D(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = \min_{\overline{\alpha}, \overline{\beta}} \Upsilon(\overline{\alpha}, \overline{\beta}),$$

$$\sup_{\tilde{H}_i,\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} D(\tilde{G},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)=\min_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}\Upsilon(\overline{\alpha},\overline{\beta}),\ \sup_{\tilde{H}_i,\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} D(\tilde{G},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)=$$
$$=\min_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\Upsilon(\underline{\alpha},\underline{\beta})$$

где нижняя грань берется по всем таким $\underline{\alpha},\overline{\alpha},\underline{\beta},\overline{\beta}$, что выполняется условия $\rho(\underline{\alpha},\underline{\beta})\le 0,\rho(\overline{\alpha},\overline{\beta})\le 0$. Сказанное означает, что функция Лагранжа для нижней и верхней границы обладает седловой точкой.

В силу слабой линейной зависимости от параметра q спектральной плотности возмущения (1.3), интервальный линейно зависимый от нее целевой функционал выигрыша и связанная с ним интервальная функция Лагранжа представимы в виде линейной комбинации их границ в зависимости от q.

В этом случае, как известно (см. утверждение из § 4.3.2 в [24]) решения нижней и верхней граничных задач оптимизации граничных функций (экстремальных функций) целевого функционала выигрыша $\tilde{D}$ задачи оптимизации и связанной с ним функции Лагранжа $\tilde{F}(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{A})$ неразличимы, если их интервальные оценки вложены друг в друга. Очевидно, что это условие соблюдается в задаче (1.6), так как в предельном случае, когда $\delta_{\mathrm{k}}^1\to 0,\delta_{\mathrm{l}}^2\to 0$ решение нижней и верхней граничных задач совпадают. Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *При условиях 1.1–1.6 из [1], накладываемых на свойства функции* $\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=[\rho(\underline{\alpha},\underline{\beta}),\rho(\overline{\alpha},\overline{\beta})]$ *решение интервальной задачи (1.6) всегда существует в предельном случае, когда параметры в правых частях моментных ограничений задачи интервального сглаживания (3.1)* $\delta_{\mathrm{k}}^1\to 0,\delta_{\mathrm{l}}^2\to 0$ *и представляется в виде пересечения решений ее нижней* $\{M_н(G^0,H^0,\underline{\alpha},\underline{\beta})\}$ *и верхней* $\{M_в(G^0,H^0,\overline{\alpha},\overline{\beta})\}$ *граничных задач*

$$(G^0,H^0)=\{M_н(G^0,H^0,\underline{\alpha},\underline{\beta})\}\bigcap\{M_в(G^0,H^0,\overline{\alpha},\overline{\beta})\},$$
$$\tilde{\Upsilon}_{\min}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=[\min_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\Upsilon(\underline{\alpha},\underline{\beta}),\min_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}\Upsilon(\overline{\alpha},\overline{\beta})].$$

4. Алгоритм решения

Для решения интервальной задачи (1.6) методом детерминизации $D(\tilde{G},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)$ [14–21] необходимо действовать по следующему алгоритму.

Шаг 1. Используя формулы интервальной арифметики, выражающие элементарные преобразования интервалов [13–19] представляем целевой функционал нашей задачи $D(\tilde{G},\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)$ в интервальной форме

$$D(\tilde{G}^0,\tilde{H}_1,\tilde{H}_2)=[\underline{D}(\tilde{G}^0,\tilde{H}_1^0,\tilde{H}_2^0),\overline{D}(\tilde{G}^0,\tilde{H}_1^0,\tilde{H}_2^0)]=$$
$$=[D(\tilde{G}^0,\underline{H}^0{}_1,\underline{H}^0{}_2),D(\tilde{G}^0,\overline{H}_1^0,\overline{H}_2^0)],$$

а линейные функционалы $\tilde{I}_i(\tilde{H}_i), i=1,2$ в левых частях ограничений (1.4), (1.5) и параметры в правых частях в виде интервалов:

$$\tilde{I}_i = [\underline{I}(\tilde{H}_i), \overline{I}(\tilde{H}_i)], i = 1, 2,$$

$$(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0) = M_н(G^0, \underline{H}_1^0, \underline{H}_2^0, \underline{\alpha}\text{-}\delta_k^{(1)}, \underline{\beta}\text{-}\delta_l^{(2)}) \cap M_в(G^0, \overline{H}_1^0, \overline{H}_2^0, \overline{\alpha}+\delta_k^{(1)}, \overline{\beta}+\delta_l^{(2)}).$$

Шаг 2. Используя полученные на шаге 1 представления, формируем нижнюю граничную и верхнюю граничную задачи решаемой нами интервальной задачи условной оптимизации-линейного минимаксного сглаживания (2.3), (2.4):

$$D(\tilde{G}^0, \underline{H}_1(\lambda), \underline{H}_2(\lambda)) = \text{minsup},$$

$$D(\tilde{G}^0, \overline{H}_1(\lambda), \overline{H}_2(\lambda)) = \text{minsup},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{H}_1(\lambda)\psi_1(\lambda)d\lambda \le a_\kappa - \delta_k^{(1)}\ ;\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathrm{H}}_1(\lambda)\psi_1(\lambda)d\lambda \le a_\kappa + \delta_k^{(1)};$$

$$(\kappa = 1, ..., n_1);$$

$$\forall \tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}, H_1 = \underline{H}_1(\lambda) \in \tilde{\Xi}_1, \overline{H}_1 = \overline{H}_1(\lambda) \in \tilde{\Xi}_2;$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_2(\lambda)\psi_\ell(\lambda)d\lambda \le b_\ell - \delta_\ell^{(2)},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{H}_2(\lambda)\psi_\ell(\lambda)d\lambda \le b_\ell + \delta_\ell^{(2)};$$

$$(\ell = 1, ..., n_2);$$

$$\forall \tilde{G} \in \tilde{\mathfrak{R}}, \underline{H}_2 = \underline{H}_2(\lambda) \in \tilde{\Xi}_1, \overline{H}_2 = \overline{H}_2(\lambda) \in \tilde{\Xi}_2.$$

Шаг 3. Решаем нижнюю и верхнюю граничную задачи интервальной задачи, сформированные на предыдущем шаге и приведенные к эквивалентной двойственной форме задачи выпуклого программирования, получаем решения нижней $\{M_н(\tilde{G}^0, \underline{H}_1, \underline{H}_2, \underline{\alpha}, \underline{\beta}\}$ и верхней $\{M_в(G^0, \overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{\alpha}, \overline{\beta})\}$ граничных задач. При этом $M_н(G^0(\underline{H}^0), \underline{H}^0)$ – множество точек решения нижней граничной задачи, на котором ее целевой функционал выигрыша $\tilde{D}^0 = D(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0)$ достигает своего нижнего оптимума $\underline{D}^0 = D(\tilde{G}^0, \underline{H}^0{}_1, \underline{H}^0{}_2)$ и $M_в(G^0(\overline{H}^0), \overline{H}^0)$ – множество точек решения верхней граничной задачи, в которых ее целевой функционал выигрыша $\tilde{D}^0 = D(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0)$ достигает своего верхнего оптимума

$$\overline{D}^0 = D(\tilde{G}^0, \overline{H}_1^0, \overline{H}_2^0),$$

$$(\tilde{G}^0, \tilde{H}^0) = M_н(\tilde{G}^0, \underline{H}_1^0, \underline{H}_2^0, \underline{\alpha}\text{-}\vec{\delta}_1, \underline{\beta} - \vec{\delta}_2) \cap M_в(\tilde{G}^0, \overline{H}_1^0, \overline{H}_2^0, \overline{\alpha}+\vec{\delta}_1, \overline{\beta}+\vec{\delta}_2),$$

где $\vec{\delta}_1 = [\delta_1^{(1)}, ..., \delta_{n_1}^{(1)}], \vec{\delta}_2 = [\delta_1^{(2)}, ..., \delta_{n_2}^{(2)}]$.

При этом в качестве оптимального значения целевого функционала $\tilde{D}^0$ берем интервал

$$D(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2) = [\underline{D}(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0), \overline{D}(\tilde{G}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)]$$

от оптимума целевого функционала нижней граничной задачи $\underline{D}^0$ до оптимума целевого функционала верхней граничной задачи $\bar{D}^0$, переход к предельному случаю, когда вектора $\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2$ покомпонентно стремятся к 0 $\vec{\delta}_1 \to 0, \vec{\delta}_2 \to 0$ дает представление искомого решения в виде

$$(\tilde{G}^0,\tilde{H}_1^0,\tilde{H}_2^0)=(\tilde{G}^0,\underline{H}_1^0,\underline{H}_2^0)=(\tilde{G}^0,\bar{H}_1^0,\bar{H}_2^0).$$

5. Пример

Пусть наблюдению доступен процесс

$$y(t)=s(t)+n(t),\quad t\in(-\infty,+\infty),$$

где $s(t)$ – сигнал известной формы со спектром $S(\lambda)$, $n(t)$ – гауссовская помеха со спектральной плотностью $W(\lambda)=T(\lambda)+\tilde{H}(\lambda)$. При этом $T(\lambda)$ – заданная составляющая спектральной плотности $W(\lambda)$, а $\tilde{H}(\lambda)$ априори не известна, однако известно, что $\tilde{H}(\lambda)\in\tilde{\Xi}\subset B$, где $\tilde{\Xi}$-множество допустимых интервально-параметрических спектральных плотностей, определяется условиями:

$$\tilde{H}(\lambda)=\frac{1}{2}[\underline{H}(\lambda)+\bar{H}(\lambda)],q=\frac{1}{2}, \tag{5.1}$$

$$\tilde{\Xi}=\{\tilde{H}(\lambda)\in B\,|\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{H}(\lambda)\Psi(\lambda)d\lambda\le\tilde{b}=[b-\delta,b+\delta],$$

$$\tilde{H}(\lambda)\ge 0;\},b>0,\delta>0,$$

где Λ – заданная область сосредоточения подмножества оси частот положительной меры $mes\,\Lambda>0$ значений спектра возмущений $\tilde{H}(\lambda)$; B – множество измеримых функций; $\Psi(\lambda)$-заданная, без ограничения общности, четная функция ($\Psi(\lambda)>0$ почти всюду по λ); b – заданная константа.

Задача состоит в отыскании наилучшего гарантирующего интервального минимаксного интерполятора $\tilde{G}^0(\lambda)$:

$$\tilde{D}(\tilde{G},\tilde{H})=\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{G}(\lambda)|^2\,[T(\lambda)+\tilde{H}(\lambda)]d\lambda\to\min_{\tilde{G}\in\tilde{\mathfrak{R}}}\sup_{\tilde{H}\in\tilde{\Xi}}. \tag{5.2}$$

Пусть $|S(\lambda)|=\tau^2\lambda^2\max[0;\lambda_0^2\text{-}\lambda^2]$ т.е. спектр сигнала сосредоточен в полосе $[-\lambda_0,\lambda_0]$. Будем считать, что помеха измерения является суммой белого шума с интенсивностью $T(\lambda)=\tau^2$ и составляющей, о которой известна только ее интервальная дисперсия

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{H}(\lambda)\Psi(\lambda)d\lambda\le\tilde{b}, \tag{5.3}$$

т.е. в (5.1) $\Psi(\lambda)=1$. Рассмотрим задачу внутренней максимизации (5.2) по $\tilde{H}(\lambda)$ при фиксированной $\tilde{G}(\lambda)$

$$\tilde{D}(\tilde{G},\tilde{H}) \to \sup_{\tilde{H}\in\tilde{\Xi}} \tag{5.4}$$

и связанную этой задачей согласованную интервальную функцию Лагранжа в виде

$$\begin{gathered}\tilde{L}(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{\beta}) = D_0(\tilde{G}) + \int_{\Lambda}[||\tilde{G}(\lambda)|^2\ [T(\lambda)+\tilde{H}(\lambda)]d\lambda + \tilde{b}\tilde{\beta},\\ D_0(\tilde{G}) = \int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{G}(\lambda)|^2\ [(T(\lambda)+\tilde{H}(\lambda)]d\lambda,\end{gathered} \tag{5.5}$$

где $\tilde{\beta}$ – интервальный множитель Лагранжа, соответствующий интервальному ограничению (5.3) имеет интервальную седловую точку

$$\inf_{\tilde{\beta}>0}\sup_{\tilde{H}\in\tilde{\Xi}}\tilde{L}(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{\beta}) = \sup_{\tilde{H}\in\tilde{\Xi}}\inf_{\tilde{\beta}>0}\tilde{L}(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{\beta}) \ . \tag{5.6}$$

Рассмотрим задачу внутренней максимизации (5.6) по $\tilde{H}(\lambda)$ с учетом (5.1) при фиксированном $\tilde{\beta}$. Из (5.5) следует, что если

$|\tilde{G}(\lambda)|^2 - \tilde{\beta} < 0$ почти всюду при $\lambda \in \Lambda$, то

$$\sup_{\tilde{H}\in\tilde{\Xi}}\tilde{L}(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{\beta}) = D_0(\tilde{G}) + \tilde{b}\tilde{\beta}.$$

В противном случае $\sup_{\tilde{H}\in\tilde{\Xi}}\tilde{L}(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{\beta}) = +\infty$. В обозначениях представления (1.2) имеем

$$T_1(\lambda)=\tau^2, T_2(\lambda)=0, i=1, n_1=1, \varphi(\lambda)=|i\lambda|^2=\lambda^4, \Lambda_2=(-\infty,+\infty).$$

При оценивании $s(t)$, $Q(\lambda)=1$ двойственная задача принимает верхний (нижний) граничный вид:

$$\Upsilon(\overline{\alpha})=\tau^2\int_{-\infty}^{+\infty}\{\max[0;1-\sqrt{b+\delta}\lambda^2]\}^2 d\lambda + (b+\delta)\overline{\alpha} \to \min_{\overline{\alpha}}$$

$$\Upsilon(\underline{\alpha})=\tau^2\int_{-\infty}^{+\infty}\{\max[0;1-\sqrt{b-\delta}\lambda^2]\}^2 d\lambda + (b-\delta)\underline{\alpha} \to \min_{\underline{\alpha}} .$$

Выражая последние интегралы в элементарных функциях, получаем

$$\Upsilon(\overline{\alpha}) = \frac{16}{15}\tau^2\overline{\alpha}^{-1/4} + \overline{a}\overline{\alpha} \to \min_{\overline{\alpha}}, \Upsilon(\underline{\alpha}) = \frac{16}{15}\tau^2\underline{\alpha}^{-1/4} + \underline{a}\underline{\alpha} \to \min_{\underline{\alpha}} .$$

Отсюда находим

$$\overline{\alpha} = [4\tau^2/(15(b+\delta))]^{4/5}, \underline{\alpha} = [4\tau^2/(15(b-\delta))]^{4/5}, \tag{5.7}$$

В соответствии с теоремой 2.8 [1] (гл. 2, параг. 2.4.1) находим нижние и верхние оценки для интервальной дисперсии и минимаксного интерполятора

$$\overline{D} = 5(\tfrac{4\tau^2}{15})(b+\delta)^{1/5} \approx 1,332\tau^2\overline{\lambda_0}, \underline{D} = 5(\tfrac{4\tau^2}{15})(b-\delta)^{1/5} \approx$$
$$\approx 1,332\tau^2\underline{\lambda_0} \qquad (5.8)$$

$$\overline{G}^0(\lambda) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda^2}{\overline{\overline{\lambda_0^2}}} & \text{при } |\lambda| \le \overline{\lambda_0}; \\ 0 & \text{при } |\lambda| > \overline{\lambda_0}, \end{cases}$$

$$\underline{G^0}(\lambda) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda^2}{\underline{\lambda}_0} & \text{при } |\lambda| \le \underline{\lambda}_0^2; \\ 0 & \text{при } |\lambda| > \underline{\lambda}_0^2, \end{cases}$$

где $\overline{\lambda}_0 = \overline{\alpha}^{1/4} = [15(b+\delta)/(4\tau^2)]^{1/5}, \underline{\lambda}_0 = \underline{\alpha}^{1/4} = [15(b-\delta)/(4\tau^2)]^{1/5}$.

Проверим выполнение условий 2.1, 2.2 [1] (гл. 2, параграф 2.4.1) Справедливость условия 2.1 очевидна.

Действительно,

$$\Upsilon(\overline{\alpha}) = \tfrac{16}{15}\tau^2\overline{\alpha}^{-1/4}, \Upsilon(\underline{\alpha}) = \tfrac{16}{15}\tau^2\underline{\alpha}^{-1/4}$$

и следовательно $\Upsilon(\overline{\alpha}) < \infty; \Upsilon(\underline{\alpha}) < \infty$. При любых значениях параметров τ^2 и $\overline{a}(\underline{a})$ в соответствии с (5.7)

$$\overline{\alpha}^0(\underline{\alpha}^0) \in \mathrm{R}^1_+ = \operatorname{int} dom\Upsilon.$$

Итак, условие 2.2 выполнено, следовательно седловая точка в интервальной игре существует и нижние и верхние оценки для интервальной полезной составляющей $\tilde{H}_s(\lambda)$ и возмущения $\tilde{H}_{\tilde{u}}(\lambda)$ имеют следующий вид:

$$\overline{H}_s(\lambda) = \tau^2\lambda^2 \max[0; \tfrac{\overline{\lambda}_0}{\lambda^2} - 1]; \underline{H}_s = \tau^2\lambda^2 \max[0; \tfrac{\lambda_0}{\lambda^2} - 1];$$

$$\overline{H}_{\tilde{u}}(\lambda) = \tau^2\lambda^2 \max[0; \overline{\lambda}_0^2 - 1], \underline{H}_{\tilde{u}} = \tau^2\lambda^2 \max[0; \underline{\lambda}_0^2 - 1].$$

В предельном случае, при $\delta \to 0$ выполняется соотношение $\overline{H}_{\tilde{u}}(\lambda) = \underline{H}_{\tilde{u}} = H^0(\lambda)$ и предельная оценка искомого функционала в точке α равна $\Upsilon(\overline{\alpha}) = \Upsilon(\underline{\alpha}) = \Upsilon(\alpha)$, где $\alpha = [15b/4\tau^2]^{4/5}$, поскольку пересечение множеств решений нижней $\{M_н(\tilde{G}^0, \underline{H}^0, \underline{\alpha})\}$ и верхней $\{M_в(\tilde{G}^0, \overline{H}^0, \overline{\alpha})\}$ граничных задач в этом случае не пусто, то в соответствии с теоремой 4 решение интервальной задачи существует и имеет принимает вид

$$\tilde{G}^0(\lambda) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_0} & \text{при } |\lambda| \le \lambda_0; \\ 0 & \text{при } |\lambda| > \lambda_0 , \end{cases}$$

$$\tilde{H}^0(\lambda) = \tau^2\lambda^2 \max[0; \lambda_0^2 - 1],$$

где $\lambda_0 = \alpha^{1/4} = [15b / 4\tau^2]^{1/5}$.

Выводы

В статье показано, что проблема интервальной линейной минимаксной интерполяции достаточно просто разрешима, если использовать конструктивную теорию сравнения интервальных величин, которая сводит указанное сравнение к сравнению одноименных границ этих интервалов. Тем самым поиск оптимума не полностью определенного функционала дисперсии ошибки оценивания можно свести к нахождению одноименного оптимума двух полностью определенных (детерминированных) функционалов. Представленный в статье детерминизационный подход примечателен тем, что позволяет вполне строго свести оптимизацию не полностью определенных согласованных функций Лагранжа к хорошо известным и эффективным методам оптимизации уже полностью определенных согласованных функций Лагранжа. Новизной этого подхода является то, что, в отличие от других (например, вероятностного), он всегда обеспечивает существование оптимума в задаче интервальной минимаксной интерполяции и гарантирует получение этого оптимума.

Приложение 1.

Доказательство теоремы 1.

Докажем необходимость. Пусть нижняя и верхняя граничные задачи имеют согласованные функции Лагранжа с согласованной парой седловых точек вида

$$(\tilde{G}, \tilde{H}_1^*, \tilde{H}_2^*, \underline{\alpha}, \underline{\beta}), (\tilde{G}, \tilde{H}_1^*, \tilde{H}_2^*, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

Докажем, что $(\tilde{G}, \tilde{H}_1^*, \tilde{H}_2^*, \underline{\alpha}, \underline{\beta}), (\tilde{G}^*, \tilde{H}_1^*, \tilde{H}_2^*, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ седловая точка в задаче (1.6). Действительно, по определению седловых точек для нижней и верхней задач интервальной функции Лагранжа можно утверждать, что

$$F(\tilde{G}, \underline{H}_1, \underline{H}_2, \underline{\alpha}, \underline{\beta}) \le F(\tilde{G}^*, \underline{H}_1^*, \underline{H}_2^*, \underline{\alpha}^*, \underline{\beta}^*) \le F(\tilde{G}^*, \underline{H}_1, \underline{H}_2, \underline{\alpha}, \underline{\beta})$$

$$\forall \tilde{G}, \forall \underline{H}_1, \underline{H}_2, \forall \underline{\alpha}, \underline{\beta},$$

$$F(\tilde{G}, \overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{\alpha}, \overline{\beta}) \le F(\tilde{G}^*, \overline{H}_1^*, \overline{H}_2^*, \overline{\alpha}^*, \overline{\beta}^*) \le F(\tilde{G}^*, \overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

$$\forall \tilde{G}, \forall \overline{H}_1, \overline{H}_2, \forall \overline{\alpha}, \overline{\beta},$$

при этом по определению интервальной функции Лагранжа выполнимы неравенства

$$F(\tilde{G},\underline{H}_1,\underline{H}_2,\underline{\alpha},\underline{\beta}) \le F(\tilde{G}^*,\tilde{H}_1^*,\tilde{H}_2^*,\tilde{\alpha}^*,\tilde{\beta}^*) \le F(\tilde{G}^*,\overline{H}_1,\overline{H}_2,\overline{\alpha},\overline{\beta})$$

$$\forall\tilde{G}\ ,\forall\tilde{H}_i\in[\underline{H}_i,\overline{H}_i],_{i=1,2,}\forall\tilde{\alpha}\in[\underline{\alpha},\overline{\alpha}],\forall\tilde{\beta}\in[\underline{\beta},\overline{\beta}].$$

то есть седловая точка $(\tilde{G}^*,\tilde{H}_1^*,\tilde{H}_2^*,\tilde{\alpha}^*,\tilde{\beta}^*)$ в интервальной игре интерполяции (2.1),(2.2) существует.

Докажем достаточность.

Пусть седловая точка существует в интервальной игре интерполяции (2.3) - (2.5), тогда в силу выполнения условия интервальной нечеткости относительно компоненты $\tilde{H}_i(\lambda,q)$ (1.3) и выпуклости (линейности) по $\tilde{H}_i(\lambda,q)$ интервальной функции Лагранжа, связанной с задачей (2.1), (2.2) имеем при фиксированной стратегии $\tilde{G}$:

$$\begin{aligned}
&F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\underline{\alpha},\underline{\beta}) \le (1-q)F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}) + qF(\tilde{G},\overline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}),\\
&F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\overline{\alpha},\overline{\beta}) \le (1-q)F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta}) + qF(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta})\ .
\end{aligned} \tag{П.1}$$

Возьмем супремум левой части неравенств (П.1) по $\tilde{H}_i(\lambda,q)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\sup_{\tilde{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\underline{\alpha},\underline{\beta}) \le (1-q)\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}) +\\
&\quad + q\sup_{\overline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\overline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}),\\
&\sup_{\tilde{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\tilde{H}_i(1,q),\overline{\alpha},\overline{\beta}) \le (1-q)\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta}) +\\
&\quad + q\sup_{\overline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\overline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta})
\end{aligned} \tag{П.2}$$

Беря инфинум обеих частей неравенства (П.2) по $(\underline{\alpha},\underline{\beta}),(\overline{\alpha},\overline{\beta})$, получим в силу линейности функций Лагранжа $F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\underline{\alpha},\underline{\beta})$ и $F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\overline{\alpha},\overline{\beta})$ по $(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ и $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ соответственно, имеем

$$\begin{aligned}
&\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\sup_{\tilde{H}_i\in\tilde{\Xi}_i} F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\underline{\alpha},\underline{\beta}) \le (1-q)\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}) +\\
&+ q\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\sup_{\overline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\overline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta})\\
&\underline{\inf}_{\alpha,\beta}\sup_{\tilde{H}_i\in\tilde{\Xi}_i} F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\overline{\alpha},\overline{\beta}) \le (1-q)\underline{\inf}_{\alpha,\beta}\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta}) +\\
&+ q\underline{\inf}_{\alpha,\beta}\sup_{\overline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\overline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta})
\end{aligned} \tag{П.3}$$

В силу вогнутости (линейности) интервальной функции Лагранжа по $\tilde{H}_i(\lambda,q)$ при фиксированной стратегии $\tilde{G}$ справедливы неравенства:

$$\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\underline{\alpha},\underline{\beta}) \geq (1-q)\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta})+$$
$$+q\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}),$$
$$\underline{\inf}_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\bar{\alpha},\bar{\beta}) \geq (1-q)\underline{\inf}_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\underline{H}_i,\bar{\alpha},\bar{\beta})+ \tag{П.4}$$
$$+q\underline{\inf}_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\bar{\alpha},\bar{\beta})$$

Возьмем супремум левой части неравенств (П.4) по $\tilde{H}_i(\lambda,q)$. Тогда

$$\sup_{\tilde{H}_i\in\tilde{\Xi}_i}\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\underline{\alpha},\underline{\beta}) \geq (1-q)\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta})\ +$$
$$+\ q\sup_{\bar{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}),$$
$$\sup_{\tilde{H}_i\in\tilde{\Xi}_i}\underline{\inf}_{\alpha,\beta} \mathrm{F}(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\bar{\alpha},\bar{\beta}) \geq (1-q)\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\underline{\inf}_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\bar{\alpha},\bar{\beta})\ + \tag{П.5}$$
$$+\ q\sup_{\bar{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\underline{\inf}_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\bar{\alpha},\bar{\beta}).$$

В силу существования седловой точки в интервальной игре (2.1),(2.2) интерполяции, мы можем заменить выражения, стоящие в левых частях неравенств (П.3) на эквивалентные им, поменяв местами операции взятия $\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$, $\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i}$ и $\underline{\inf}_{\alpha,\beta}$, $\sup_{\bar{H}\in\tilde{\Xi}_i}$ от функций Лагранжа $F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\underline{\alpha},\underline{\beta})$ и $F(\tilde{G},\tilde{H}_i(\lambda,q),\bar{\alpha},\bar{\beta})$ соответветсвенно. Умножим (П.5) на -1 и сложим с (П.3), в результате будем иметь неравенства:

$$0\leq(1-q)[\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta})-\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta})]+$$
$$+q[\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\sup_{\bar{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta})-\sup_{\bar{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta})], \tag{П.6}$$
$$0\leq(1-q)[\underline{\inf}_{\alpha,\beta}\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\bar{\alpha},\bar{\beta})-\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\underline{\inf}_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\bar{\alpha},\bar{\beta})]+$$
$$+q[\underline{\inf}_{\alpha,\beta}\sup_{\bar{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\bar{\alpha},\bar{\beta})-\sup_{\bar{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\underline{\inf}_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\bar{\alpha},\bar{\beta})],$$

В силу свойства минимаксного и максиминного соотношения [22], справедливы следующие неравенства:

$$\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta})\geq\sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}),$$
$$\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\sup_{\bar{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta})\geq\sup_{\bar{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\bar{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}),$$

$$\inf_{\alpha,\beta}\ \sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta}) \ge \sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\ \inf_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta}),$$

$$\inf_{\alpha,\beta}\ \sup_{\overline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\overline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta}) \ge \sup_{\overline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\ \inf_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\overline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta}),$$

поэтому квадратные скобки в правой части неравенств (П.6) неотрицательны и следовательно каждая из них равна нулю, так как в противном случае, сумма чисел, стоящих в квадратных скобках будет строго больше нуля, чего быть не может, то есть имеем согласованные седловые точки для нижней и верхней граничных игр интерполяции соответственно:

$$\inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\ \sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}) = \underline{\nu}^* = \sup_{\underline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\ \inf_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\tilde{G},\underline{H}_i(\lambda),\underline{\alpha},\underline{\beta}),$$

$$\inf_{\alpha,\beta}\ \sup_{\overline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2} F(\tilde{G},\overline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta}) = \overline{\nu^*} = \sup_{\overline{H}_i\in\tilde{\Xi}_i,i=1,2}\ \inf_{\alpha,\beta} F(\tilde{G},\overline{H}_i(\lambda),\overline{\alpha},\overline{\beta})$$

и при этом справедливо неравенство для согласованной седловой точки $\tilde{G}^*, \tilde{H}_1^*(\lambda), \tilde{H}_2^*(\lambda), A^*$ в интервальной игре минимаксной интерполяции

$$\underline{\nu}^* \le F(\tilde{G}^*, \tilde{H}_1^*(\lambda), \tilde{H}_2^*(\lambda), \tilde{A}^*) \le \overline{\nu^*}$$

В итоге получили две согласованные седловые точки для нижней и верхней задач интервальной согласованной функции Лагранжа в задаче (2.1), (2.2), что завершает доказательство теоремы 1.

Литература

1. Куркин О. М., Коробочкин Ю.Б., Шаталов С. А. Минимаксная обработка информации. – М.: Энергоатомдат, 1990. 212 с.

2. Куркин О. М. Исследование алгоритмов гарантирующего оценивания в задачах прогнозирования и интерполяции случайных процессов // Автоматика и телемеханика. 2001. № 1. С. 67-69.

3. Сидоров И. Г. Минимаксная линейная фильтрация стационарного случайного процесса в условиях интервальной нечеткости матрицы состояния системы с ограниченной дисперсией // Радиотехника и электроника. 2018. Том 63. № 8. С. 831-836.

4. Moklyachuk M. P., Masyutka A. Yu. Minimax-robust estimation technique: For stationary stochastic processes. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 289 p.

5. Moklyachuk M. P., Sidei M. I. Extrapolation Problem for Stationary Sequences with missing observations. –Statistics, optimization and information computing, Vol. 5, September 2017, pp. 212-233.

6. Taniguchi. M. Robust regression and interpolation for time series // J. Time Ser. Analysis. 1981. Vol. 2. pp. 53-62.

7. Kazakos D., Kami S. Makki Proceedings of the 5th WSEAS Int. Conf. on System Science and Simulation in Engineering, Tenerife, Canary Islands, Spain, December 16-18, 2006. pp. 284-287.

8. Kassam S. A., Vincent Poor H. “Robust Techniques for Signal Processing: A Survey”, IEEE Trans. on Infor. Theory, March 1985. Vol. 73. no. 3.

9. Franke J. On the prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise. J. Time Ser. Analysis, 1981. Vol. 5. pp. 227 - 244.

10. Ohrn K., Ahl'en A., Sternad M. A probabilistic approach to multivariable robust filtering and open-loop control // IEEE Trans. on Automatic Contro. 1995. Vol. 40. pp. 405-418.

11. Mangoubi R. Robust Estimation and Failure Detection. – A Concise Treatment. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998.

12. Xie L., Chai Soh Y. Robust Kalman filtering for uncertain systems // Systems and Control Letters. 1994. Vol. 22. pp. 123-129.

13. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR // Computing Supplement. 1980. № 2. pp. 33 - 49.

14. Левин В. И. Интервальная модель общей задачи линейного программирования. I, II // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 1998. Т. 3. № 4. С. 401-407; 1999. Т. 4. № 1. С. 18-27.

15. Левин В. И. Интервальный подход к оптимизации в условиях неопределенности // Информационные технологии. 1999. № 1. С. 7-12.

16. Левин В. И. Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности Пенза. Изд-во Пензенского технологического института. 1999.

17. Левин В. И. Сравнение интервальных величин и оптимизация неопределенных систем // Информационные технологии. 1998. № 7. С. 22-32.

18. Левин В. И. Антагонистические игры с интервальными параметрами // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 4. С. 149-159.

19. Левин В. И. Интервальный подход к оптимизации в условиях неопределенности // Системы управления, связи и безопасности. 2015. № 4. С. 123-141.

20. Левин В. И. Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97-106.

21. Левин В. И. Нелинейная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 2. С. 138-147.

22. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Изд-во Мир, 1954. 835 с.

23. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 708 с.

24. Вощинин А. П., Сотиров Г. Р. Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во МЭИ, 1989. 224 с.

25. Ащепков Л. Т., Давыдов Д. В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М.: Наука, 2006. 285 с.

26. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 255 с.

References

1. Kurkin O. M., Korobochkin Ju. B., Shatalov S. A. *Minimaksnaja obrabotka informacii* [Minimax treatment of information]. Moscow, Energoatomizdat, 1990, 212 p. (in Russian).

2. Kurkin O. M. Investigation of guarantee rating algorithms in problems of prediction and interpolation of random processes. *Automation and Remote control*, 2001, no. 1, pp. 67-69 (in Russian).

3. Sidorov I. G. Minimaksnaja linejnaja fil'tracija stacionarnogo sluchajnogo processa v uslovijah interval'noj nechetkosti matricy sostojanija sistemy s ogranichennoj dispersiej [Minimax linear filtering of stationary random process under conditions of interval fuzziness of the system state matrix with limited dispersion]. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2018, vol. 63, no. 1, pp. 831-836 (in Russian).

4. Moklyachuk M. P., Masyutka A. Yu. Minimax-robust estimation technique: For stationary stochastic processes. Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012, 289 p. (in English).

5. Moklyachuk M. P., Sidei M. I. Extrapolation Problem for Stationary Sequences with missing observations. *Statistics, optimization and information computing*, vol. 5, September 2017, pp. 212-233 (in Ukraine).

6. Taniguchi. M. Robust regression and interpolation for time series. *J. Time Ser. Analysis,* 1981, vol. 2, pp. 53-62.

7. Demetrios Kazakos, Kami S. Makki *Proceedings of the 5th WSEAS Int. Conf. on System Science and Simulation in Engineering*, Tenerife, Canary Islands, Spain, 2006, December 16-18, pp. 284-287.

8. Kassam S. A., Vincent Poor H. Robust Techniques for Signal Processing: A Survey. *IEEE Trans. on Infor. Theory,* March 1985, vol. 73, no. 3.

9. Franke, J. On the prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise. *J. Time Ser. Analysis,* 1981, vol. 5, pp. 227-244.

10. Ohrn K., Ahl'en A., Sternad M. A probabilistic approach to multivariable robust filtering and open-loop control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1995, vol. 40, pp. 405-418.

11. Mangoubi R. *Robust Estimation and Failure Detection, A Concise Treatment*. Berlin, Springer-Verlag, Germany, 1998.

12. Xie L., Chai Soh Y. Robust Kalman filtering for uncertain systems, *Systems and Control Letters*, 1994, vol. 22, pp. 123-129.

13. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR. *Computing Supplement*.1980, no. 2, pp. 33-49.

14. Levin V. I. Interval'naja model' obshhej zadachi linejnogo programmirovanija [The Interval Model for the General Problem of Linear Programming]. Part I, II. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University, Nstural and Technical Sciences], 1998, vol. 3, no. 4, pp. 401-407; 1999, vol. 4, no. 1, pp. 18-27 (in Russian).

15. Levin V. I. Interval'nyj podhod k optimizacii v uslovijah neopredelennosti [Interval approach to optimization in conditions uncertainty]. *Information technologie*s, 1999, no. 1, pp. 7-12 (in Russian).

16. Levin V. I. Interval'nye metody optimizacii system v uslovijah neopredelennosti [Interval methods of optimizing systems under conditions uncertainties]. Penza, Penza Institute of Technology Publ., 1999, 95 p. (in Russian).

17. Levin V. I. Sravnenie interval'nyh velichin i optimizacija neopredelennyh sistem [Comparison of interval values and optimization]. *Information Technologie*s. 1999, no. 1, pp. 7-12 (in Russian).

18. Levin V. I. Antagonistic games with interval parameters. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1999, no. 4, pp. 149-159 (in Russia).

19. Levin V. I. Interval'nyj podhod k optimizacii v uslovijah neopredelennosti [Interval approach to optimization in conditions uncertainty]. *Control, communication and security systems,* 2015, no. 4, pp. 123-141 (in Russian).

20. Levin V. I. Diskretnaja optimizacija v uslovijah interval'noj neopredelennosti [Discrete optimization under interval conditions uncertainty]. *Automation and Remote control*, 1992, no. 7, pp. 97-106 (in Russian).

21. Levin V. I. Nelinejnaja optimizacija v uslovijah interval'noj neopredelennosti [Nonlinear optimization under interval conditions uncertainty].*Cybernetics and Systems Analysis*, 1999, no. 2, pp. 138-147 (in Russian).

22. Karlin S. *Matematicheskie metody v teorii igr, programmirovanii i Jekonomike* [Mathematical methods in game theory, programming and Economy]. Moscow, Mir Publ., 1954, 835 p. (in Russian).

23. Nejman Dzh. fon, Morgenshtern *Teorija igr i jekonomicheskoe povedenie* [Game Theory and Economic behavior]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 708 p. (in Russian).

24. Voshchinin A. P., Sotirov G. R. *Optimizacija v uslovijah neopredelennosti* [Optimization in conditions of uncertainty]. Moscow, *Moskovskij jenergeticheskij institut Publ*, [Moscow Power Engineering Institute Publ], 1989, 224 p. (in Russian).

25. Ashepkov L. T., Davydov D. V. *Universal'nye reshenija interval'nyh zadach optimizacii i upravlenija* [Universal solutions to interval problems optimization and management]. Moscow, Nauka Publ., 2006. 285 p. (in Russian).

26. Podinovskij V. V., Nogin V. D. *Pareto-optimal'nye reshenija mnogokriterial'nyh zadach* [Pareto-optimal solutions multi-criteria tasks]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 255 p. (in Russian).

Статья поступила 17 сентября 2020 г.

Информация об авторах

Сидоров Игорь Геннадиевич – доцент, кандидат технических наук кафедры автоматики и процессов управления. Московский политехнический университет. Область научных интересов: математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; распознавание; нечеткая логика; дискретная математика; теория нечетких игр; минимаксная обработка информации; сбор и обработка информации в условиях неопределенности; информационные сети и телекоммуникации. E-mail: igor8i2016@yandex.ru

Адрес: 107023, Россия, г. Москва, ул. Б. Семеновская, 38.

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor, Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; распознавание; история науки; проблемы образования. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова / ул. Гагарина, д. 1а/11.

Linear Minimax Interpolation of a Stationary Random Process with Interval Parameters

I. G. Sidorov, V. I. Levin

Relevance. *The article considers existing approaches to the actual problem of minimax smoothing of a stationary random process under conditions when the observed process is an additive mixture of mutually uncorrelated useful component and interference, the spectral densities of which have partial information in the form of interval changes in their values, as well as their interval moment inequalities, structurally containing the same absolute value, small symmetric deviations of uncertainty from the specified limits of their interval restrictions, which they satisfy. An exact statement of the interval problem of linear minimax smoothing of a stationary random process is given under the conditions of existence of a consistent saddle point of an interval consistent Lagrange function.* ***Purpose*** *. The aim of the article is to present the idea of solving the problem of linear minimax smoothing of a stationary random process, taking into account the interval moment constraints that these parameters satisfy. This idea is based on the rules of the mathematical theory of comparison of intervals which allows replace comparison of intervals and determinization of maximal and minimal interval by comparising their lower and upper bounds.* ***Methods****. On the basis of the the proposed idea the determinization method is formulated and justified that allows solving the problem of linear minimax interpolation with interval parameter uncertainty by reducing it to two fully defined optimization problems of the same type.* ***Novelty.*** *We formulate and prove a theorem that defines a necessary and sufficient condition for the existence of a solution to a convex linear minimax interpolation problem with interval parameter uncertainty under conditions of existence of a consistent saddle point of an interval consistent Lagrange function****. Result.*** *A 4-step algorithm for solving the problem of linear minimax smoothing of a stationary random process with interval parameter uncertainty is constructed by reducing it to two fully defined optimization problems of the same type. The proposed deterministic approach reduces the solution of a game with nondeterministic parameters of the interval type to the solution of two boundary games with deterministic strategies and winning functions using the apparatus of interval arithmetic under the conditions of the existence of a consistent saddle point of the interval consistent Lagrange function. An example illustrating the proposed method of analysis is given.*

Key words: *saddle point, noise, uncorrelated, spectral densities, determinization method, minimax interpolation, stationary random process, Lagrange function, interval parameters, interval moment constraints, boundary games, interval arithmetic ,convex, 4-step algorithm.*

Information about Authors

Igor Gennadievich Sidorov – Associate Professor, PhD of Technical Sciences, Department of automation and control processes. Moscow Polytechnic University. Research interests: mathematical modeling in engineering, economics, sociology, history; decision making; recognition; fuzzy logic; discrete mathematics; fuzzy game theory; minimax information processing; information collection and processing under uncertainty; information networks and telecommunications. E-mail: igor8i2016@yandex.ru

Address: 107023, Moscow, Bolshaya Semyonovskaya str., 38

Vitaly Ilich Levin – Dr. habil. of Technological University. Field of Research: logic; mathematical modelling in technics, economics, sociology, history; decision making ,optimization, recognition, automata theory, reliability theory, history of science, problems of education. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: Russia, 440039, Penza, pr. Baydukova/Gsagarin st., 1A/11.