УДК 519.711

Логические методы расчета надежности систем. Часть I. Математический аппарат

Левин В. И.

Актуальность. *В последние годы все большее внимание ученых и проектировщиков систем связи приобретают вопросы совершенствования методов оценки надежности и безопасности технических систем, в связи с выдвигаемыми задачами повышения значений этих характеристик.* ***Цель статьи*** *заключается в разработке логической модели надежности технических систем и соответствующих логических методов оценки надежности таких систем, которые в отличие от известных используют не традиционные – вероятностные показатели надежности, а детерминированные логические показатели.* ***Метод.*** *Для достижения поставленной цели в статье предложено использовать в качестве исходных данных наблюдаемые моменты последовательных отказов и восстановлений элементов технической системы, а в качестве характеристик надежности самой системы – моменты последовательных отказов и восстановлений этой системы. В этом случае задача оценки надежности системы сводится к построению ее математической модели в виде логических функций, выражающих моменты ее последовательных отказов и восстановлений через аналогичные моменты всех ее элементов. В этой части статьи детально разрабатывается логический математический аппарат, предназначенный для вычисления логической функции надежности технических систем.* ***Новизна*** *работы заключается в построении адекватной логической модели надежности системы, позволяющей свести оценку надежности технической системы к вычислению ее логических функций надежности.* ***Результат****. В этой части статьи детально разработаны логическая модель надежности и методы ее исследования, позволяющие вводить новые показатели надежности технических систем, не требующие для своей оценки использования вероятностных методов и исходных статистических данных об отказах элементов. Во второй статьи на основе разработанной логической модели надежности и методах ее исследования будет решена задача построения автоматной модели надежности систем, которая позволит вести практические расчеты надежности реальных технических систем.*

Ключевые слова: *система, надежность, модель надежности, двузначная логика, непрерывная логика, законы логики.*

Введение

При проектировании технических систем их обычно рассчитывают на надежность. Имеется обширная литература, указывающая, как рассчитать нужную вероятностную характеристику (показатель) надежности системы по аналогичным характеристикам ее элементов [1, 2]. В качестве характеристик надежности обычно выбирают среднее время $T_{\text{ср}}$ безотказной работы или вероятность $P(t)$ безотказной работы за время t [3, 4]. Однако, такие вероятностные характеристики – не первичные величины, а результат их усреднения. Поэтому вероятностный расчет надежности системы по природе не элементарен и для сколько-

Библиографическая ссылка на статью:
Левин В. И. Логические методы расчета надежности систем. Часть I. Математический аппарат // Системы управления, связи и безопасности. 2017. № 2. С. 182-195. URL: http://sccs.intelgr.com/archive/2017-02/07-Levin.pdf
Reference for citation:
Levin V. I. Evaluation of Reliability of Systems by Logical Methods. *Systems of Control, Communication and Security*, 2017, no. 2, pp. 182-195. Available at: http://sccs.intelgr.com/archive/2017-02/07-Levin.pdf (in Russian).

нибудь сложных систем сопряжен с большими трудностями. Далее, вероятностные характеристики надежности элементов не всегда могут быть точно определенны из-за большой трудоемкости необходимых статистических испытаний. Наконец, разработка новых систем может требовать рассмотрения все новых вероятностных характеристик надежности. В этих условиях разумно задаться целью построения такой теории и методов расчета надежности систем, где оперируют первичными (не выводимыми из других) величинами, относящимися к надежности системы и ее элементов, и устанавливают связь между ними. Действительно, при таком подходе расчет надежности систем становится элементарным, что должно расширить класс рассчитываемых систем. Далее, отпадает необходимость в специальном изучении конкретных характеристик надежности систем, так как их всегда можно выразить через указанные первичные величины. Наконец, естественно ожидать, что опытное определение первичных характеристик надежности элементов проще, чем вероятностных. Именно такая цель ставится в настоящей работе.

В предлагаемой в данной работе теории первичными нами считаются последовательные моменты t_i отказов и восстановлений блоков (элементов) и аналогичные моменты T_k для системы в целом, а задача состоит в отыскании зависимостей $T_k = f_k(t_i)$ между ними. Эта теория обладает всеми указанными выше достоинствами. В то же время:

1) набор функций $\{f_k\}$ является наиболее полной качественной информацией о влиянии надежности блоков на надежность системы, так как по нему можно количественно предсказать надежность всей системы при любых значениях надежности ее блоков (в частности, вычислить те или иные характеристики надежности системы);
2) можно даже в отсутствие числовых данных о надежности блоков сравнивать надежность систем: равнонадежным системам соответствуют эквивалентные наборы $\{f_k\}$, более надежной системе соответствует увеличение значений функций f_k, выражающих моменты отказов, и уменьшение значений функций f_k, выражающих моменты восстановлений;
3) можно изучать не только обычные модели, в которых надежностное состояние системы в любой момент времени полностью определяется надежностными состояниями блоков в тот же момент, но и модели с запоминанием предыдущих состояний;
4) зная набор функций $\{f_k\}$ системы, можно, наблюдая состояния ее блоков, прогнозировать индивидуальное надежностное поведение системы и на основе этого организовать ее рациональное техническое обслуживание.

В качестве модели надежности системы в работе был выбран динамический автомат, на входы которого подаются надежностные процессы в блоках (импульс процесса определяет интервал работоспособности блока, пауза – интервал неработоспособности), а с выхода снимается аналогичный процесс для системы. При этом оказалось, что функции влияния f_k всегда выражаются суперпозицией операций непрерывной логики, а это позволяет говорить о логической теории надежности. Эта теория, помимо ее важного самостоятельного значения (см. выше), полезна и для традиционной вероятностной теории надежности, ибо, устанавливая логическую связь между первичными надежностными характеристиками системы и ее блоков, она облегчает расчет (моделирование на ЭВМ) вероятностных характеристик надежности сложных систем, сводя его к известной задаче – отысканию (моделированию) распределения детерминированных функций $f_k(t_i)$ от случайных аргументов t_i.

Работа публикуется в двух частях. В первой части решается задача разработки логико-математического аппарата предлагаемой детерминистской теории надежности, во второй – задача построения автоматной модели надежности систем, позволяющей вести расчеты надежности реальных систем. Автоматная модель и излагаемые логические методы теории надежности облегчают ее изучение студентами, а также ее усвоение инженерами.

Логико-математический аппарат предлагаемой в статье детерминистской теории надежности для удобства декомпозирован на следующие пункты:

1) Двузначная дискретная логика;
2) Непрерывная логика;
3) Уравнения и неравенства непрерывной логики;
4) Вероятностные расчеты в непрерывной логике.

1. Двузначная дискретная логика

Описываемая ниже двузначная логика [5] используется во второй части работы для математического моделирования статики надежности технических систем.

Рассмотрим множество из двух элементов $\{0,1\}$. Введем над ним следующие логические операции:

конъюнкцию

$$y \equiv x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 = x_2 = 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1.1}$$

дизъюнкцию

$$y \equiv x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0; \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1.2}$$

отрицание

$$y \equiv \bar{x} = 1 - x = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Назовем *булевой функцией* произвольную функцию, которая, как и ее аргументы, принимает значения из множества $\{0,1\}$. Ясно, что двухместные функции – конъюнкция (1.1) и дизъюнкция (1.2) и одноместная функция – отрицание (1.3) являются некоторыми простейшими булевыми функциями. Более сложными являются n-местные булевы функции:

конъюнкции

$$y \equiv x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 = \ldots = x_n = 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.4)$$

дизъюнкции

$$y \equiv x_1 \vee \ldots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = \ldots = x_n = 0; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.5)$$

В выражениях (1.1), (1.4) знак $\wedge$ обычно опускается, если нет опасности спутать конъюнкцию с другими операциями. Функции (1.1) и (1.2) являются частными случаями функций (1.4) и (1.5) при $n = 2$. Еще более сложными булевыми функциями являются элементарная n-местная конъюнкция

$$y \equiv \tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \wedge \ldots \tilde{x}_n \quad (\text{иначе } \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n) \quad (1.6)$$

и элементарная n-местная дизъюнкция

$$y \equiv \tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \tilde{x}_n. \quad (1.7)$$

Здесь $\tilde{x}_i$ есть x_i либо $\bar{x}_i$. Например: $y = x_1 x_2 \bar{x}_3$, $y = x_1 \vee \bar{x}_2$.

Наиболее сложными булевыми функциями являются дизъюнкция различных элементарных конъюнкций – *дизъюнктивная нормальная форма* (ДНФ) и конъюнкция различных элементарных дизъюнкций – *конъюнктивная нормальная форма* (КНФ). Булевы функции (1.1)–(1.7) – частные случаи как ДНФ, так и КНФ. Оказывается, что и произвольная булева функция может быть представлена и в ДНФ, и в КНФ.

Первичное задание булевой функции $y = f(x_1,..., x_n)$ обычно состоит в перечислении тех наборов аргументов $(x_1,..., x_n)$, на которых $y = 1$ (*единичные наборы*), либо тех наборов, на которых $y = 0$ (*нулевые наборы*). От задания перечислением единичных наборов можно перейти к заданию перечислением нулевых наборов и обратно – ведь нулевые наборы – это все наборы, не являющиеся единичными, а единичные — это все наборы, не являющиеся нулевыми.

Для представления функции f в ДНФ удобно исходить из ее задания перечислением единичных наборов. При этом f записывается в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций, каждая из них обращается в 1 на каком-то одном единичном наборе.

Пример 1.1. Функция $y = f(x_1, x_2)$ равна 1 на наборах 01 и 10. Записать ее в ДНФ. Видим, что на наборе 01 обращается в единицу элементарная конъюнкция $\bar{x}_1 x_2$, а на наборе 10 – конъюнкция $x_1 \bar{x}_2$. Поэтому получаем $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$.

Для представления функции f в КНФ удобно исходить из ее задания перечислением нулевых наборов. При этом f записывается в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций, каждая из которых обращается в нуль на каком-то одном нулевом наборе.

Пример 1.2. Функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$ равна 0 на наборах 000 и 111. Так как на наборе 000 обращается в нуль элементарная дизъюнкция $x_1 \vee x_2 \vee x_3$, а на наборе 111 – дизъюнкция $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$, имеем $y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

От представления булевой функции в ДНФ легко перейти к ее представлению в КНФ и обратно. В первом случае совершается переход: ДНФ функции →

представление функции перечислением единичных наборов → представление функции перечислением нулевых наборов → КНФ функции; во втором случае – обратный переход.

Пример 1.3. Задана ДНФ функции из примера 1.1: $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$. Найти эквивалентное представление функции в виде КНФ. Из ДНФ функции видно, что единичные наборы 01 и 10. Значит, нулевые наборы – 00 и 11, откуда КНФ функции $y = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$.

Логические операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания подчиняются следующим законам:

тавтологии

$$x \vee x = x, \quad xx = x; \tag{1.8}$$

переместительному

$$x \vee y = y \vee x, \quad xy = yx; \tag{1.9}$$

сочетательному

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z, \quad (xy)z = x(yz) = xyz; \tag{1.10}$$

распределительному

$$x(y \vee z) = xy \vee xz, \quad x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z); \tag{1.11}$$

отрицания (де Моргана)

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}, \quad \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y} \tag{1.12}$$

поглощения

$$x \vee xy = x, \quad x(x \vee y) = x \tag{1.13}$$

двойного отрицания

$$\bar{\bar{x}} = x; \tag{1.14}$$

исключенного третьего и противоречия (склеивания)

$$x \vee \bar{x} = 1, \quad x\bar{x} = 0; \tag{1.15}$$

ортогонализации

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y. \tag{1.16}$$

При помощи законов (1.8)–(1.16) осуществляется эквивалентное преобразование логических выражений, задающих булевы функции, с целью упрощения этих выражений. Множество всех булевых функций, совместно с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, подчиняющимися законам (1.8)–(1.16), называется *булевой алгеброй.*

Пример 1.4. Привести к минимальному виду выражение $y = x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_5$.

Объединим первую конъюнкцию с четвертой, а третью – с пятой. Вынеся за скобки в каждой из пар конъюнкций общую букву и учтя закон (1.15), получаем $y = x_1 x_4 \vee x_2 x_5 \vee x_2 x_3 x_4$. Дальнейшее упрощение полученного выражения в классе ДНФ невозможно; однако оно станет возможным, если допустить другие формы выражения y. Например, объединив в последнем выражении первую конъюнкцию с третьей и вынеся в них за скобки x_4, получим $y = (x_1 \vee x_2 x_3) x_4 \vee x_2 x_5$. Аналогичный результат получается при объединении второй конъюнкции с третьей.

Используя эквивалентные преобразования, можно любое логическое выражение преобразовать в ДНФ или КНФ.

2. Непрерывная логика

Описываемая ниже непрерывная логика [6] используется во второй части работы для математического моделирования динамики надежности технических систем.

Рассмотрим бесконечное непрерывное множество точек $C=[A,B]$ – отрезок прямой $\overline{A,B}$. Введем над C логические операции:

конъюнкцию

$$y \equiv x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2), \tag{1.17}$$

дизъюнкцию

$$y \equiv x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2) \tag{1.18}$$

отрицание

$$y \equiv \bar{x} = A + B - x. \tag{1.19}$$

Операции (1.17)–(1.19) обобщают операции (1.1)–(1.3) и переходят в них в частном случае, когда множество $C=\{0,1\}$.

Назовем произвольную функцию, которая, как и ее аргументы, принимает значения из множества C и представима в виде суперпозиции логических операций (1.17)–(1.19), функцией *непрерывной логики* (НЛ). Двухместные функции – конъюнкция (1.17) и дизъюнкция (1.18) и одноместная функция – отрицание (1.19) – простейшие функции НЛ. Более сложные функции:

n-местная конъюнкция

$$y \equiv x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \min(x_1, ..., x_n) \tag{1.20}$$

n-местная дизъюнкция

$$y \equiv x_1 \vee \ldots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^{n} x_i = \max(x_1, ..., x_n) \tag{1.21}$$

Еще более сложны:

элементарная n-местная конъюнкция

$$y \equiv x_1 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2 \ldots x_n \bar{x}_n \tag{1.22}$$

элементарная n-местная дизъюнкция

$$y \equiv x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee x_n \vee \bar{x}_n. \tag{1.23}$$

В выражениях (1.22), (1.23) некоторые буквы с отрицаниями могут отсутствовать. Например, $y = x_1 x_2 \bar{x}_2$ или $y \equiv x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2$. Как видим, в отличие от двузначной логики в НЛ элементарные конъюнкции и дизъюнкции могут вместе с буквой x_i содержать и ее отрицание $\bar{x}_i$.

Наиболее сложные функции НЛ – ДНФ, т.е. дизъюнкция различных элементарных конъюнкций, и КНФ, т.е. конъюнкция различных элементарных дизъюнкций. Эти функции включают в себя как частные случаи введенные выше функции (1.17)–(1.23).

Всякая функция НЛ $y = f(x_1,..., x_n)$ на любом наборе аргументов $(x_1,..., x_n)$ принимает значение одного из аргументов x_i или его отрицания $\bar{x}_i$. Это следует из того, что элементарные логические операции (1.17)–(1.19), суперпозицией которых представлено выражение $y = f(x_1,..., x_n)$, всегда имеют своим результатом одну из переменных, участвующих в операции, или ее отрицание.

Первичное задание функции НЛ $y = f(x_1,..., x_n)$ может состоять в перечислении всех вариантов упорядочения аргументов $x_1,..., x_n$ с указанием для каждого варианта того аргумента x_i или его отрицания $\bar{x}_i$, чье значение принимает функция. От первичного задания функции НЛ легко перейти к ее аналитическому представлению с помощью суперпозиции логических операций (1.17)–(1.19). Методику перехода поясним на примере.

Пример 1.5. Функция НЛ от трех переменных задана табл. 1.1. Найти аналитическое представление функции.

Таблица 1 – Функция НЛ от трех переменных

Упорядочение аргументов	Значение функции	Упорядочение аргументов	Значение функции
$x_1 \le x_2 \le x_3$	x_3	$x_2 \le x_3 \le x_1$	x_3
$x_1 \le x_3 \le x_2$	x_3	$x_3 \le x_1 \le x_2$	x_1
$x_2 \le x_1 \le x_3$	x_3	$x_3 \le x_2 \le x_1$	x_2

Согласно табл. 1.1

$$y = \begin{cases} x_1 & \text{при } x_1 \le x_2 \text{ и } x_3 \le x_1; \\ x_2 & \text{при } x_2 \le x_1 \text{ и } x_3 \le x_2; \\ x_3 & \text{при } x_3 \ge x_1 x_2. \end{cases}$$

Используем конъюнкцию НЛ и объединим первые две строки в одну

$$y = \begin{cases} x_1 x_2 & \text{при } x_3 \le x_1 x_2; \\ x_3 & \text{при } x_3 \ge x_1 x_2. \end{cases}$$

Объединяя теперь обе строки в одну с помощью операции дизъюнкции НЛ, находим искомое представление: $y = x_1 x_2 \vee x_3$.

Операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания НЛ подчиняются большинству законов, которым подчиняются, аналогичные операции двузначной логики, а именно: законам тавтологии (1.8), переместительному (1.9), сочетательному (1.10), распределительному (1.11), отрицания (1.12), поглощения (1.13), двойного отрицания (1.14).

Однако законы исключенного третьего, противоречия и ортогонализации НЛ оказываются более сложными, чем их аналоги в двузначной логике:

$$x \vee \bar{x} = M + |x - M|; \quad x\bar{x} = M - |x - M|; \tag{1.24}$$

$$x \vee \bar{x}y = (x \vee y)(M + |x - M|), \tag{1.25}$$

где $M = (A + B)/2$.

При помощи перечисленных законов выражения функций НЛ могут подвергаться эквивалентным преобразованиям в целях их упрощения. Множество всех функций НЛ, рассматриваемых совместно с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания НЛ, подчиняющимися законам (1.8)–(1.14), (1.24), (1.25), называется *алгеброй НЛ.*

Произвольная функция НЛ может быть представлена в любой из двух стандартных форм – ДНФ и КНФ. Для такого представления удобно исходить из задания функции в аналитической форме. Переход от такой формы к ДНФ состоит в последовательном выполнении двух чередующихся операций: 1) спуск отрицаний с более сложных выражений на их менее сложные части в соответствии с законами отрицания (1.12), (1.14); 2) раскрытие скобок в соответствии с первым распределительным законом (1.11).

Пример 1.6. Привести к ДНФ функцию НЛ $y=(x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)\overline{\bar{x}_1x_4}$. Так, согласно (1.12), (1.14), $\overline{\bar{x}_1x_4}=x_1 \vee \bar{x}_4$. Подставив это в выражение y и раскрыв скобки по (1.11), после упрощения мы получим

$$y=(x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)=\underline{x_1x_2} \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee$$
$$\vee \underline{x_1x_2\bar{x}_4} \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4=x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4.$$

Переход от произвольной аналитической формы записи функций НЛ к КНФ состоит в последовательном выполнении двух чередующихся операций:

1) спуск отрицаний с более сложных выражений на их менее сложные части согласно законам отрицания (1.12) (1.14);
2) введение скобок согласно второму распределительному закону (1.11).

Пример 1.7. Привести к КНФ функцию НЛ из примера 1.6. Имеем согласно второму закону (1.11)

$$x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3=(x_1x_2 \vee \bar{x}_2)(x_1x_2 \vee x_3)=(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)\cdot(x_2 \vee x_3).$$

Учитывая найденное в примере 1.6 выражение $\overline{\bar{x}_1x_4}$, получаем

$$y=(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_4).$$

3. Уравнения и неравенства непрерывной логики

Описываемые ниже уравнения и неравенства НЛ [6] используются во второй части работы для синтеза надежностных процессов в технических системах.

Уравнением НЛ называется уравнение вида

$$f(a_1,...,a_k,x_1,...,x_n)=\varphi(a_1,...,a_k,x_1,...,x_n), \quad (1.26)$$

где f и φ – заданные функции НЛ; $a_1,...,a_k$ – известные, а $x_1,...,x_n$ – неизвестные (искомые) аргументы. Любой набор $(x_1,...,x_n)$, для которого равенство (1.26) обращается в тождество, называется *частным решением* уравнения (1.26). Совокупность всех частных решений называется *общим решением.*

Аналогично уравнению вводится *неравенство НЛ*

$$f(a_1,...,a_k,x_1,...,x_n)<\varphi(a_1,...,a_k,x_1,...,x_n) \quad (1.27)$$

Можно также рассматривать системы уравнений и неравенств НЛ. Основным методом решения уравнений и неравенств НЛ является последовательное *расчленение* левых и правых частей, основанное на определении операций НЛ и позволяющее заменять исходное уравнение (неравенство) эквивалентным объединением систем из более простых уравнений и неравенств. Решение системы уравнений и неравенств получается как пересечение решений входящих в нее уравнений (неравенств). Поясним сказанное.

Пусть обе части уравнения (1.26) представлены в ДНФ. Тогда в обеих частях последней операцией может быть только конъюнкция и дизъюнкция. Пусть, например, в левой части последняя операция – дизъюнкция. Тогда уравнение можно записать в виде

$$f_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) \vee f_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}), \qquad (1.28)$$

где $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_k)$ – вектор параметров; $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ – вектор неизвестных. Согласно определению дизъюнкции НЛ уравнение (1.28) эквивалентно объединению двух систем уравнений и неравенств:

$$\left(\left.\begin{matrix} f_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) \ge f_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) \\ f_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) \end{matrix}\right\}\right) \cup \left(\left.\begin{matrix} f_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) < f_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) \end{matrix}\right\}\right). \qquad (1.29)$$

Расчленение левой части исходного уравнения (1.28) привело к тому, что каждое уравнение или неравенство в (1.29) стало проще, чем уравнение (1.28) (содержит меньше операций). Этот процесс упрощения теперь может быть продолжен путем расчленения правой части (1.28) и т.д.

Пример 1.8. Решить уравнение $ax=b$. Это уравнение путем расчленения левой части превращаем в объединение систем $(x \ge a = b) \cup (x = b < a)$. Отсюда решение: $x=b$ при $a>b$ и $x \ge b$ при $a=b$ (решение существует только при $a \ge b$).

Пример 1.9. Решить неравенство $ax>b$. Расчленение левой части дает объединение систем $(x \ge a > b) \cup (b < x < a)$. Отсюда решение: $x>b$ (существует при $a>b$.

Пример 1.10. Решить неравенство $ax<b$. Расчленением левой части получаем $(x \ge a < b) \cup (x < a, b)$. Решение: $x \in [a,b]$ при $a<b$ и $x<b$ при $a \ge b$ (существует всегда).

Пример 1.11. Решить уравнение $c \vee x = b$. Расчленение левой части дает объединение систем $(b = x > c) \cup (b = c \ge x)$. Решение: $x=b$ при $b>c$ и $x \le b$ при $b=c$ (существует при $b \ge c$).

4. Вероятностные расчеты в непрерывной логике

На практике может возникнуть необходимость изучения функций НЛ, аргументы которых – случайные величины. Направление, занимающееся этим изучением, называется *вероятностной НЛ.* Задача вероятностной НЛ – отыскание распределений и моментов функций НЛ, аргументы которых распределены по известным законам.

1) Пусть, например, функция НЛ имеет вид конъюнкции

$$y = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i, \qquad (1.30)$$

а ее аргументы x_i – независимые случайные величины с функциями распределения $F_{x_i}(x) = P(x_i < x)$, где P – символ вероятности, и плотностями вероятности $g_{x_i}(x) = \frac{d}{dx} F_{x_i}(x)$. Тогда случайна также величина y с некоторой функцией распределения $F_y(x)$. Найдем $F_y(x)$. По определению конъюнкции НЛ (1.20) $y = \min_i x_i$. Поэтому $y \geq x$ только при $x_1 \geq x, ..., x_n \geq x$. Отсюда

$$F_y(x) = P(y < x) = 1 - P(y \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(x_i \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P(x_i < x)] = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{x_i}(x)].$$

Таким образом,

$$F_y(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{x_i}(x)]. \quad (1.31)$$

Дифференцируя по x, найдем плотность вероятности y:

$$g_y(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{x_j}(x) \prod_{i \neq j} [1 - F_{x_i}(x)]. \quad (1.32)$$

Для одинаково распределенных аргументов x_i, $i = 1, ..., n$,

$$F_y(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \quad (1.33)$$

$$g_y(x) = ng(x)[1 - F(x)]^{n-1}, \quad (1.34)$$

где $F(x)$ и $g(x)$ – функция распределения и плотность вероятности аргумента.

2) Рассмотрим функцию НЛ – дизъюнкцию

$$y = \bigvee_{i=1}^{n} x_i \quad (1.35)$$

с прежними (см. п. 1) случайными аргументами x_i. Так как по определению дизъюнкции (1.21) $y = \max_i (x_i)$, то $y < x$ только при $x_1 < x, ..., x_n < x$. Отсюда функция распределения величины y.

$$F_y(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{x_i}(x), \quad (1.36)$$

а ее плотность вероятности

$$g_y(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{x_j}(x) \prod_{i \neq j} F_{x_i}(x). \quad (1.37)$$

Для одинаково распределенных аргументов x_i, $i = 1, ..., n$

$$F_y(x) = [F(x)]^n, \quad (1.38)$$

$$g_y(x) = ng(x)[F(x)]^{n-1}. \quad (1.39)$$

3) Рассмотрим функцию НЛ в виде ДНФ без общих аргументов в различных конъюнкциях. Все аргументы – независимые случайные величины. Распределение такой функции можно найти, используя формулы распределения конъюнкции (п. 1) и дизъюнкции (п. 2).

Пример 1.12. Функция НЛ имеет вид: $D = x_1 x_2 \vee x_3 x_4$. Аргументы x_i независимы и распределены по одному и тому же закону с функцией распределения $F(x)$ и плотностью вероятности $g(x)$. Найдем распределение величины D.

Согласно (1.33), (1.34) конъюнкции x_1x_2 и x_3x_4 имеют одинаковые функцию распределения $\hat{F}(x)=1-[1-F(x)]^2=F(x)[2-F(x)]$ и плотность вероятности $\hat{g}(x)=2g(x)[1-F(x)]$. Величина D согласно (1.38), (1.39) имеет функцию распределения

$$F_D(x)=\hat{F}^2(x)=F^2(x)[2-F(x)]^2$$

и плотность вероятности

$$g_D(x)=2\hat{g}(x)\hat{F}(x)=4g(x)F(x)[1-F(x)][2-F(x)].$$

4) Для отыскания распределения функции НЛ общего вида используется метод расчленения (см. п. 1.3).

Пример 1.13. Функция НЛ имеет вид: $y=x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ (функция-медиана, принимает значение средней из переменных x_1,x_2,x_3). Аргументы x_i зависимы и распределены с совместной плотностью вероятности

$$g(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} g(x_1,x_2,x_3) & \text{при } x_1\le x_2\le x_3; \\ g(x_1,x_2,x_3) & \text{при } x_3\le x_2\le x_1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найдем функцию распределения $F_y(x)$ величины y. Сначала расчленим событие $(y<x)$:

$$(y<x)=(x_1\le x_2\le x_3,\, x_2<x)\cup(x_1\le x_3\le x_2,\, x_3<x)\cup(x_3\le x_1\le x_2, x_1<x)\cup$$
$$\cup(x_2\le x_1\le x_3,\, x_1<x)\cup(x_2\le x_3\le x_1,\, x_3<x)\cup(x_3\le x_2\le x_1,\, x_2<x)\,.$$

Отсюда с учетом заданной совместной плотности вероятности аргументов функции $f(\cdot)$ получаем

$$F_y(x)=P(y<x)=\iiint\limits_{\substack{x_1\le x_2\le x_3\\ x_2<x}} g_1(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3+\iiint\limits_{\substack{x_3\le x_2\le x_1\\ x_2<x}} g_2(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3\,,$$

и для получения явного выражения $F_y(x)$ остается задать явные выражения функций $g_1(\cdot)$ и $g_2(\cdot)$ и проинтегрировать.

Другой универсальный прием основан на методе Монте-Карло, т.е. 1) генерировании N независимых наборов случайных аргументов $x_1,..., x_n$ заданной функции НЛ $y=f(x_1,..., x_n)$ в соответствии с заданным распределением этих аргументов; 2) подсчете для каждого набора $(x_1,..., x_n)$ соответствующего значения функции y; 3) подсчете частоты попадания значений функции y в различные подобласти области ее определения, что дает оценку распределения значений y. Этот прием, в отличие, от предыдущего, применим к весьма сложным функциям НЛ. Однако его погрешность мала лишь при больших N.

5) Как следует из пп. 1, 2, для отдельных классов функций НЛ $y=f(x_1,...,x_n)$, вероятностное распределение значений y можно найти, минуя аналитическое представление функции – базируясь лишь на ее содержательном смысле. Рассмотрим теперь более сложный пример таких функций – порядковую r-функцию

$$X_n^r=\left|\begin{matrix}x_1\\ \cdots \\ x_n\end{matrix}\right|^{(r)} \tag{1.40}$$

со случайными независимыми элементами x_i, распределенными по одному и тому же закону с распределением $F(x)$ и плотностью вероятности $g(x)$. Найдем плотность вероятности $g_n^r(x)$ величины X_n^r.

Расположим элементы ЛО (1.40) в порядке неубывания: $x^{(1)} \le x^{(2)} ... \le x^{(n)}$. По определению $X_n^r = x^{(r)}$. Значит, среди n элементов x_i имеется $r-1$ не больших X_n^r и $n-r$ не меньших X_n^r. Найдем вероятность $g_n^r(x)dx$ того, что значение X_n^r находится в интервале $(x, x+dx)$. Ясно, что

$$g_n^r(x)dx = P_1 P_2 P_3, \tag{1.41}$$

где $P_1 = ng(x)dx$ – вероятность того, что какой-либо из n элементов x_i находится в интервале $(x, x+dx)$; $P_2 = C_{n-1}^{r-1} F^{r-1}(x)$ – вероятность того, что из оставшихся $n-1$ элементов x_i ровно $r-1$ каких-то элементов находятся в интервале $(-\infty, x)$; $P_3 = [1-F(x)]^{n-r}$ – вероятность того, что оставшиеся $n-r$ элементов x_i находятся в интервале $(x+dx, \infty)$.

Подставив выражения P_i в (1.41), получим

$$g_n^r(x) = nC_{n-1}^{r-1} F^{r-1}(x) g(x) [1-F(x)]^{n-r}. \tag{1.42}$$

Из (1.42) при $r=1$ и $r=n$ как частные случаи следуют ранее полученные выражения (1.34) и (1.39) плотности вероятности двух функций НЛ: конъюнкции и дизъюнкции.

Заключение

Работа публикуется в двух частях. В настоящей статье – первой части работы описан математический аппарат создаваемой автором логической теории надежности. Изложены дискретная и непрерывная логики, включая логические уравнения и неравенства. Описаны также вероятностные расчеты с логическими функциями, имеющими случайные аргументы.

Во второй части работы на основе разработанного математического аппарата логической теории надежности будет решена задача построения автоматной модели надежности систем, которая позволит вести практические расчеты надежности реальных технических систем.

Данная работа продолжает цикл исследований автора, посвященный разработке математического аппарата логической теории надежности. В частности данная работа отличается от ранее опубликованных работ автора [7, 8] усовершенствованием расчетных формул, что должно облегчить инженерное приложение разработанного математического аппарата и упростить вычислительную сложность расчета надежности реальных технических систем.

Литература

1. Ллойд Д. К., Липов М. Надежность: организация, исследования, методы, математический аппарат. – М.: Советское радио, 1964. – 350 с.

2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. – М.: Советское радио, 1969. – 410 с.

3. Райншке К. Модели надежности и чувствительности систем. – М.: Мир, 1979. – 454 с.

4. Левин Б. Р. Теория надежности радиотехнических систем. – М.: Советское радио, 1978. – 264 с.

5. Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. – М.: Энергия, 1974. – 350 с.

6. Левин В. И. Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. – М.: Советское радио, 1982. – 176 с.

7. Левин В. И. Логические методы в теории надежности. I. Математический аппарат // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2009. Т. 15. № 4. С. 873-884.

8. Левин В.И. Логическое моделирование надежности систем управления. I // Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского. 2011. № 26. С. 568-577.

References

1. Lloyd D. K., Lipov M. *Nadezhnost: organizaciya, issledovaniya, metody, matematicheskiy apparat* [Reliability: organization, research, methods, mathematical means] Moscow, Sovetskoe radio, 1964. – 350 p. (in Russian).

2. Barlow R. E., Proshan F. *Mathematical Theory of Reliability*. N.-Y., John Wiley and Sons, 1965.

3. Rainshke K. *Modeli nadezhnosti i chuvstvitelnosti system* [Models of Reabliability and Sensitivity of Systems]. Moscow, Mir, 1979. 454 p. (in Russian).

4. Levin B. R. *Teoriya nadezhnosti radiotehnicheskih system* [Theory of Reliability of Radiotechnical Systems]. Moscow, Sovetskoe radio, 1978. 264 p. (in Russian).

5. Pospelov D. A. *Logicheskie metody analiza i sinteza skhem* [Logical Methods of Analysis snd synthesis of Schemes]. Moscow, Energiya, 1974. 350 p. (in Russian).

6. Levin V. I. *Beskonechnoznachnaya logika v zadachah kibernetiki* [Continuous Logic in Problems of Cybernetics]. Moscow, Sovetskoe radio, 1982. 176 p. (in Russian).

7. Levin V. I. Logical Methods in Reliability Theory. I. Mathematical Apparatus. *Transaction of the TSTU*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 873-884 (in Russian).

8. Levin V. I. Logical Modeling of Reliability of Control Systems. Izvestiia Penzenskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. V.G. Belinskogo, 2011, no. 26, pp. 568-577 (in Russian).

Статья поступила 6 ноября 2017 г.

Информация об авторе

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории;

принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Evaluation of Reliability of Systems by Logical Methods

V. I. Levin

Relevance. *In recent years, the increasing attention of scientists and designers of communication systems has been acquiring the issues of improving methods for assessing the reliability and safety of technical systems, in connection with the tasks put forward to increase the values of these characteristics.* ***Purpose*** *of the article is to develop a new, logical model of the reliability of technical systems and the corresponding logical methods for assessing the reliability of such systems, using not traditional probabilistic but deterministic logical reliability indicators.* ***Method.*** *To achieve this goal, it was suggested to use as the initial data the observed moments of successive failures and recovery of the elements of the technical system, and as the reliability characteristics of the system itself, the moments of successive failures and recovery of this system. In this case, the problem of estimating the reliability of a system is reduced to constructing its mathematical model in the form of logical functions expressing the moments of its successive failures and restores through analogous moments of all its elements. In this connection, a logical mathematical apparatus designed to calculate the logical function of the reliability of technical systems is developed in detail.* ***Novelty*** *of the work is the construction of an adequate logical model of the system's reliability, which makes it possible to reduce the reliability estimate of a technical system to the calculation of its logical reliability functions.* ***Result.*** *In the article the logical model of reliability and methods of its investigation are developed in detail, allowing to introduce new indicators of reliability of technical systems that do not require for their evaluation the use of probability methods and initial statistical data on element failures.*

Keywords: *system, reliability, a model of reliability, two-valued logic, continuous logic, laws of logic.*

Information about Author

Vitaly Ilich Levin – Doctor of Technical Sciences, Full Professor. Honoured Scientist of Russia. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economics, sociology, history; decision making, optimization, recognition, automata theory, reliability theory, history of science, problems of education. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: Russia, 440039, Penza, pr. Baydukova / Gagarin st., 1a/11.