УДК 62–50:519.7/8

Многомерные интервалы и их применение в технике, экономике и социальной сфере

Левин В.И.

Актуальность. *В последние десятилетия в гражданской и военной сферах все чаще встречаются новые технологии, связанные с изучением неопределенности. Эти технологии широко применяются в технике, экономике, социальной сфере. Для их поддержки необходимы новые математические модели и методы. В связи с этим данная статья, посвященная разработке новой модели неопределенности (многомерный интервал) и математических методов ее изучения, является актуальной.* ***Цель статьи*** *заключается в детальной разработке новой математической модели неопределенности – многомерного интервала, являющегося множеством конечного числа независимых интервалов неопределенности, системы алгебраических операций над многомерными интервалами и правил выполнения этих операций.* ***Метод.*** *Для достижения поставленной цели предложено распространить на изучение многомерных интервалов известный в интервальной математике метод изучения интервалов, основанный на определении алгебраических операций над интервалами в виде теоретико-множественного обобщения соответствующих операций над вещественными числами.* ***Новизна.*** *Новизна работы заключается в предложенной новой математической модели неопределенности систем в виде многомерных интервалов, совместно с математическим аппаратом, позволяющим выполнять различные операции над многомерными интервалами и тем самым дающим возможность выполнять математическое моделирование систем с неопределенностью.* ***Результат****. В статье детально разработана новая математическая модель неопределенности – многомерный интервал. Определены алгебраические операции над многомерными интервалами, выведены правила их выполнения. Предложен алгоритм изучения неопределенных систем с многомерно-интервальными параметрами.*

Ключевые слова: *модель неопределенности, интервал, многомерный интервал, моделирование неопределенных систем.*

Введение

Известно, что во время Второй Мировой войны в практику военных действий были введены многие новые технологии, связанные с присущей этим действиям неопределенностью. Сюда относятся обнаружение воздушных целей с помощью радаров, шифровка и дешифровка сообщений, управление огнем зенитной артиллерии, расчет процессов при изготовлении и испытаниях атомного оружия и др. Изучение неопределенности потребовало применения соответствующих математических методов – теории вероятностей, теории случайных процессов и т.д. После войны эти работы продолжились и распространились на гражданские области – технику, экономику, а также и социальную сферу. При этом значительно расширилось понятие неопределенности, оно стало включать не только случайность возможных исходов, которая количественно изучается вероятностными методами, но и неединственность исходов или их незнание, дрейф переменных, семантическую неопределенность целей, многокритериальность принятия решений, недоопределенность модели или структуры исследуемой системы и т.д. Новые виды неопределенности изучаемых систем привели к разработке новых математических методов их изучения: теория нечетких множеств, многозначная логика, сверхслучайные процессы и др. Одним из самых популярных методов стала также интервальная математика, которая занимается изучением величин, определяемых с точностью до интервалов возможных значений [1, 2]. Но отдельные интервалы, изучаемые в интервальной математике, не могут охватить все случаи, встречающиеся на практике. Например, ситуация, характеризующая условия проведения военной операции, может задаваться несколькими независимыми интервалами, каждый из которых определяет множество возможных значений одного из параметров условий. Такими параметрами могут быть, например, время, температура, сила ветра и т.д. Аналогично, неопределенная ситуация, характеризующая технологический процесс производства, может определяться набором интервалов, задающих температуру процесса, давление, скорость движущихся механизмов и т.д. Во всех этих примерах мы имеем неопределенные объекты нового вида – совокупности совместно рассматриваемых независимых интервалов, задающих области возможных значений параметров различной природы. Такие объекты естественно называть многомерными интервалами. Настоящая статья полностью посвящена теории и возможным применениям многомерных интервалов. Вместе с предыдущей статьей автора [3], посвященной полиинтервалам, ее можно рассматривать как вклад в дальнейшее развитие интервальной математики.

1. Постановка задачи

Как подход к изучению неопределенных систем, интервальная математика строится, как известно, на основе понятия интервала, рассматриваемого как множество всех возможных значений неполностью определенной величины $\tilde{a}$, задаваемой только ее нижней a_1 и верхней a_2 границами. Соответственно этому величина $\tilde{a}$ записывается в форме ограниченного интервала неопределенности вида множества

$$\tilde{a} \equiv [a_1, a_2] = \{a \mid a_1 \le a \le a_2\}. \tag{1}$$

Здесь предполагается, что неизвестное «истинное» значение неопределенной величины $\tilde{a}$ достоверно лежит в пределах интервала $[a_1, a_2]$, не выходя за его границы a_1 и a_2. Причем все значения в пределах этого интервала считаются равновозможными в том смысле, что нет никаких оснований предпочитать одно значение другому. Здесь понятие равновозможности не означает задание равномерного вероятностного или иного распределения возможных значений внутри данного интервала. Над интервалами вида (1) вводятся алгебраические операции, аналогичные соответствующим операциям над числами. Для этого используется следующая теоретико-множественная конструкция

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \bullet b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \circ \tilde{a} = \{\bullet a \mid a \in \tilde{a}\}, \tag{2}$$

т.е. любая операция над интервалами $\circ$ определяется на основе соответствующей операции над точными величинами $\bullet$, при условии, что конкретные значения этих величин пробегают все возможные значения из соответствующих интервалов. Из определения (2) получаются следующие правила выполнения операций над интервалами:

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]; \quad [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1];$$

$$k \cdot [a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0, \\ [ka_2, ka_1], & k < 0; \end{cases} \quad [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j}(a_i \cdot b_j), \max_{i,j}(a_i \cdot b_j)]; \tag{3}$$

$$[a_1, a_2]/[b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1], \text{ при } 0 \notin [b_1, b_2].$$

Продолжим развитие интервальной математики, введя понятие многомерного интервала как совокупности (множества) совместно рассматриваемых независимых интервалов

$$\tilde{M} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_p\}, \text{ где } \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_p - \text{ интервалы вида (1), т.е. } \tilde{a}_i = [a_{i1}, a_{i2}]. \tag{4}$$

Операции над многомерными интервалами определим аналогично операциям над интервалами, используя теоретико-множественные конструкции вида (2). Пусть $\tilde{M}$ – многомерный интервал вида (4), имеющий размерность p, а

$$\tilde{N} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_p\}, \text{ где } \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_p - \text{ интервалы вида (1), т.е. } \tilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}], - \tag{5}$$

другой многомерный интервал вида (4) той же размерности. Тогда операции над многомерными интервалами определятся в виде

$$\tilde{M} \circ \tilde{N} = \{\tilde{a}_i \bullet \tilde{b}_i \mid \tilde{a}_i \in \tilde{M}, \tilde{b}_i \in \tilde{N}\}, \quad \circ \tilde{M} = \{\bullet \tilde{a}_i \mid \tilde{a}_i \in \tilde{M}\}. \tag{6}$$

Здесь $\tilde{M}$ – p-мерный интервал вида (4), $\tilde{N}$ – p-мерный интервал того же вида (5), но с другими составляющими его одиночными интервалами вида (1). Задача данной работы состоит в том, чтобы, исходя из определения операций над многомерными интервалами, вывести правила выполнения этих операций, аналогичные правилам (3) операций над интервалами.

2. Решение задачи

Формулы (6) показывают, что выполнение операций над многомерными интервалами может быть сведено к выполнению соответствующих операций над одиночными интервалами. Именно, для выполнения операции $\circ$ над парой многомерных интервалов $\tilde{M}, \tilde{N}$ нужно выполнить соответствующую операцию $\bullet$ для каждой пары $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$ их одиночных интервалов с одинаковыми номерами i и объединить полученные результаты в единое множество, которое и будет искомым результатом $\tilde{M} \circ \tilde{N}$. Аналогично, для выполнения операции $\circ$ над одним многомерным интервалом $\tilde{M}$ нужно выполнить соответствующую операцию $\bullet$ для каждого его одиночного интервала $\tilde{a}_i$ и объединить полученные результаты в единое множество, которое и даст искомый результат $\circ \tilde{M}$. Используя изложенный алгоритм, можно без труда установить правила для конструктивного выполнения различных операций над многомерными интервалами, имеющие вид формул и по форме аналогичные правилам (3) операций над одиночными интервалами.

Начнем с установления формулы для конструктивного выполнения операции сложения многомерных интервалов. Для этого достаточно применить изложенный выше алгоритм, учитывая, что в данном случае операция $\circ$ есть сложение двух многомерных интервалов $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$, а операция $\bullet$ представляет собой сложение двух одиночных интервалов $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i$, из которых состоят $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ (см. (5), (6)), выполняемое по соответствующей формуле (3), в результате получим искомую формулу

$$\begin{gathered}\tilde{M}+\tilde{N} \equiv \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_p\} + \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_p\} = \{\tilde{a}_1+\tilde{b}_1, \tilde{a}_2+\tilde{b}_2, ..., \tilde{a}_p+\tilde{b}_p\}, \\ \text{где } \tilde{a}_i+\tilde{b}_i = [a_{i1}+b_{i1}, a_{i2}+b_{i2}], \quad i=\overline{1,p}.\end{gathered} \tag{7}$$

Аналогично устанавливаются формулы для конструктивного выполнения остальных операций над многомерными интервалами. Формула для конструктивного выполнения вычитания многомерных интервалов такова:

$$\begin{gathered}\tilde{M}-\tilde{N} \equiv \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_p\} - \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_p\} = \{\tilde{a}_1-\tilde{b}_1, \tilde{a}_2-\tilde{b}_2, ..., \tilde{a}_p-\tilde{b}_p\}, \\ \text{где } \tilde{a}_i-\tilde{b}_i = [a_{i1}-b_{i2}, a_{i2}-b_{i1}], \quad i=\overline{1,p}.\end{gathered} \tag{8}$$

Формула для конструктивного выполнения операции умножения многомерного интервала на число

$$k\tilde{M} \equiv k\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_p\} = \{k\tilde{a}_1, k\tilde{a}_2, ..., k\tilde{a}_p\}, \text{ где } k\tilde{a}_i = \begin{cases}[ka_{i1}, ka_{i2}], & k>0, \\ [ka_{i2}, ka_{i1}], & k<0,\end{cases} \quad i=\overline{1,p}. \tag{9}$$

Выражение для конструктивного выполнения операции умножения многомерных интервалов

$$\begin{gathered}\tilde{M}\cdot\tilde{N} \equiv \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_p\}\cdot\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_p\} = \{\tilde{a}_1\cdot\tilde{b}_1, \tilde{a}_2\cdot\tilde{b}_2, ..., \tilde{a}_p\cdot\tilde{b}_p\}, \\ \text{где } \tilde{a}_i\cdot\tilde{b}_i = [a_{i1}, a_{i2}]\cdot[b_{i1}, b_{i2}] = \left[\min_{r,s}(a_{ir}\cdot b_{is}), \max_{r,s}(a_{ir}\cdot b_{is})\right], \quad i=\overline{1,p}, \quad r,s=1,2.\end{gathered} \tag{10}$$

Формула для конструктивного выполнения операции деления многомерных интервалов

$$\begin{gathered}\tilde{M}/\tilde{N} \equiv \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_p\}/\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_p\} = \{\tilde{a}_1/\tilde{b}_1, \tilde{a}_2/\tilde{b}_2, ..., \tilde{a}_p/\tilde{b}_p\}, \\ \text{где } \tilde{a}_i/\tilde{b}_i = [a_{i1}, a_{i2}]\cdot[1/b_{i2}, 1/b_{i1}], \quad i=\overline{1,p}.\end{gathered} \tag{11}$$

В формуле (11) выражение для частного двух интервалов $\tilde{a}_i/\tilde{b}_i$ в виде произведения двух интервалов вычисляется по последней формуле (10).

Формулы (7)–(11) определяют правила конструктивного выполнения всех введенных выше алгебраических операций над многомерными интервалами путем сведения этих операций к соответствующим, хорошо известным операциям над одиночными интервалами.

Теперь мы можем изложить алгоритм решения различных задач, связанных с исследованием систем, имеющих многомерные интервальные характеристики.

Шаг 1. Построение математической модели, представляющей решение задачи как вычисление и анализ некоторой функции $\tilde{F}$ от аргументов – многомерных интервалов.

Шаг 2. Составление по построенной модели блок-схемы алгоритма вычисления и анализа функции $\tilde{F}$.

Шаг 3. Вычисление и анализ, по составленной блок-схеме алгоритма, многомерной интервальной функции $\tilde{F}$, с применением формул (7)–(11) выполнения различных операций над многомерными интервалами.

Пример. Работник служит в двух фирмах: A и B. В обеих фирмах его месячная заработная плата выплачивается в двух различных валютах – рублях и долларах США. При этом в фирме A она составляет 55000 ± 1000 рублей плюс 1000 ± 100 долларов, в фирме B – 60000 ± 1500 рублей плюс 1200 ± 100 долларов. Нужно определить суммарную месячную зарплату работника.

Решение. *Шаг 1.* В фирме A первую зарплату работника можно представить в виде интервала $\tilde{a}_1 = [a_{11}, a_{12}] = [54000, 56000]$, а вторую зарплату – как интервал $\tilde{a}_2 = [a_{21}, a_{22}] = [900, 1100]$. Аналогично, в фирме B первую зарплату работника можно представить в виде интервала $\tilde{b}_1 = [b_{11}, b_{12}] = [58500, 61500]$, а вторую – в виде интервала $\tilde{b}_2 = [b_{21}, b_{22}] = [1100, 1300]$. Тогда месячную зарплату работника в фирмах A и B можно представить соответственно следующими двумерными интервалами

$$\tilde{M} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\} = \{[54000, 56000], [900, 1100]\},\ \tilde{N} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\} = \{[58500, 61500], [1100, 1300]\}.$$

Суммарная месячная зарплата работника $\tilde{P}$ равна сумме его месячных зарплат в фирмах A и B, т.е. $\tilde{P} = \tilde{M} + \tilde{N}$. После подстановки значений $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ окончательно получаем

$$\tilde{P} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\} + \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\} = \{[54000, 56000], [900, 1100]\} + \{[58500, 61500], [1100, 1300]\}.$$

Последняя формула и есть математическая модель решения задачи в виде вычисления суммы двух двумерных интервалов.

Шаг 2. Блок-схема алгоритма вычисления функции-модели, полученной на шаге 1 алгоритма, очевидна и содержит одну ступень, на которой вычисляется сумма двух двумерных интервалов.

Шаг 3. Вычисляем двумерную интервальную функцию-модель, найденную на шаге 1. Эта функция есть сумма двух двумерных интервалов. Применяя формулу (7) сложения p-мерных интервалов для случая $p = 2$, находим искомое значение

$$\tilde{P} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\} + \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\} = \{[54000, 56000], [900, 1100]\} +$$
$$+ \{[58500, 61500], [1100, 1300]\} = \{[112500, 117500], [2000, 2400]\}.$$

Таким образом, суммарная месячная зарплата работника находится в интервалах $[112500, 117500]$ рублей и $[2000, 2400]$ долларов или, в иной форме записи, 115000 ± 2500 и 2200 ± 200 долларов.

3. Обсуждение

Как мы видели выше, дальнейшее развитие концепции интервальной неопределенности [1] приводит к понятию многомерного интервала, характеризующего более сложную неопределенность, имеющую вид множества независимых интервалов неопределенности. Такая неопределенность характеризуется тем, что параметр системы не просто принимает какое-то, заранее неизвестное значение внутри заданного интервала, а имеется целое множество интервалов, внутри каждого из которых и принимают свои, заранее неизвестные значения соответствующие параметры системы. Эта, более сложная модель неопределенности систем встречается достаточно часто в военном деле, технике, экономике и других областях и потому заслуживает изучения. Это изучение естественно проводить, используя подходы, имеющиеся в интервальной математике [1, 2] и развивая их в направлении учета множественности интервалов. Подобно тому, как интервальная математика базируется на алгебре интервалов, математика многомерных интервалов базируется на алгебре таких интервалов. При этом, так же, как в алгебре интервалов, в алгебре многомерных интервалов существуют простые зависимости между сложностью (длиной) операндов и сложностью результатов операции.

4. Заключение

В данной статье сформулирована задача изучения новой модели неопределенности – так называемого многомерного интервала, обобщающей известную модель неопределенности – интервал – на случай существования нескольких независимых, рассматриваемых совместно интервалов неопределенности. С помощью известной из интервальной математики теоретико-множественной конструкции, аналогично операциям над интервалами, введены операции над многомерными интервалами. Разработана методика сведения операций над многомерными интервалами к операциям над интервалами. С ее помощью выведены формулы для конструктивного выполнения всех операций над многомерными интервалами и построен соответствующий алгоритм. На примере из экономики проиллюстрирована практическая польза разработанной теории и методов.

Литература

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М: Мир, 1987. – 370 с.
2. Левин В.И. Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности. – Пенза: Изд-во Пензенского технологического ин-та, 1998. – 55 с.
3. Левин В.И. Полиинтервалы, их исчисление и применение // Системы управления, связи и безопасности. – 2016. – № 3. – С. 239–246.

References

1. Alefeld, G., Herzberger, Ju., *Einführung in die Intervallrechnung* [Introduction to the Interval Computations]. Zürich, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1974, 398 s. (in German).
2. Levin V.I. *Intervalnaya matematika i issledovanie system v usloviyah neopredelennosti* [Interval Mathematics and Research of Systems in Condition of

Uncertainty], Penza, Penza Technological Institute Publishing, 1998, 55 p. (in Russian).

3. Levin V. I. Polyintervals: Calculus and Applications. *Systems of Control, Communication and Security*, 2016, no. 3, pp. 239-246. Available at: http://sccs.intelgr.com/archive/2016-03/07-Levin.pdf (accessed 20 December 2016) (in Russian).

Информация об авторе

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Multidimensional Intervals and Their Application to Engineering, Economy and Social Area

V. I. Levin

Relevance. *In recent decades there are more and more new technologies in the civilian and military spheres which associated with studying of uncertainty. These technologies are widely used in engineering, economics, social sphere. To support their new mathematical models and methods are needed. In this regard, this article dedicated to the development of new model of uncertainty (multidimensional interval) and mathematical methods of its study is relevant.* ***The purpose*** *of the article is in the detailed design of a new adequate mathematical model of uncertainty – multidimensional interval, which is a set of a finite number of independent intervals of uncertainty, the system of algebraic operations on multidimensional intervals and rules to perform these operations.* ***Method.*** *To accomplish this goal we propose to extend to study multidimensional intervals the method from the interval mathematics based on the determination of algebraic operations on intervals in form of set-theoretic generalization of operations on real numbers.* ***Novelty.*** *The novelty of the work lies in the proposed new mathematical model of uncertainty of systems in form of multidimensional intervals, together with mathematical tools allowing to perform various operations on multidimensional intervals and thereby enabling them to perform mathematical modeling of uncertain systems.* ***Result.*** *The article detailed developed a new mathematical model of uncertainty – multidimensional interval. The algebraic operations on multidimensional intervals are determined and rules for their implementation are output. The algorithm of study of uncertain systems with parameters in form of multidimensional intervals is presented.*

Keywords: *model of uncertainty, interval value, multidimensional interval, modeling of systems with uncertainty.*

Information about Author

Vitaly Ilyich Levin – the Doctor of Engineering Sciences, Professor, PhD, Full Professor. Honored worker of science of the Russian Federation. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economy, sociology, history; decision-making; optimization; automata theory; theory of reliability; history of science; problems of education. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: 440039, Russia, Penza, pr. Baydukova / Gagarin st., 1a/11.