УДК 62–50:519.7/8

Полиинтервалы, их исчисление и применение

Левин В.И.

Актуальность. *В последние десятилетия в военной и гражданской сферах все чаще встречаются новые технологии, связанные с изучением неопределенности. Эти технологии широко применяются в технике, экономике, социальной сфере. Для их поддержки необходимы новые математические модели и методы. В связи с этим данная статья, посвященная разработке новой модели неопределенности (полиинтервал) и математических методов ее изучения, является актуальной.* ***Цель статьи*** *заключается в детальной разработке новой математической модели неопределенности – полиинтервала, являющегося последовательностью конечного числа интервалов неопределенности, системы алгебраических операций над полиинтервалами и правил выполнения этих операций.* ***Метод.*** *Для выполнения поставленной цели предложено распространить на изучение полиинтервалов известный в интервальной математике метод изучения интервалов, основанный на определении алгебраических операций над интервалами в виде теоретико-множественных обобщений соответствующих операций над вещественными числами.* ***Новизна.*** *Новизна работы заключается в предложенной новой математической модели неопределенности систем в виде полиинтервалов, совместно с математическим аппаратом, позволяющим выполнять различные операции над полиинтервалами и тем самым дающим возможность выполнять математическое моделирование систем с неопределенностью.* ***Результат****. В статье детально разработана новая математическая модель неопределенности – полиинтервал. Определена система алгебраических операций над полиинтервалами и выведены правила их выполнения. Дан алгоритм изучения неопределенных систем с полиинтервальными параметрами.*

Ключевые слова: *интервал, полиинтервал, неопределенность, алгебра полиинтервалов, моделирование систем.*

Введение

Известно, что в период Второй мировой войны в практику ведения военных действий было введено множество новых технологий: обнаружение воздушных целей с помощью радаров, управление огнем зенитной артиллерии, шифровка и дешифровка информации, атомное оружие и т.д. Все эти технологии в той или иной степени были связаны с изучением неопределенности, присущей любым военным действиям, и использовали соответствующие математические методы, в первую очередь, теорию вероятностей. После войны эти работы были продолжены и распространены на гражданскую сферу – экономику, технику, социум. При этом расширилось само понимание неопределенности, в которую теперь стали включать не только случайность возможных исходов, но и их неединственность или их незнание, дрейф переменных, семантическую неопределенность целей, многокритериальность при принятии решений, недоопределенность модели или структуры изучаемой системы и т.д. Новые подходы к описанию неопределенности изучаемых систем привели к появлению новых математических методов для их изучения: теория нечетких множеств, многозначная логика, теория сверхслучайных процессов и др. Одним из наиболее популярных методов стала интервальная математика, занимающаяся изучением величин, определяемых с точностью до интервалов возможных значений [1, 2]. Но одиночные интервалы, являющиеся объектом изучения в интервальной математике, не охватывают всех ситуаций, встречающихся на практике. Например, неопределенный период времени, в течение которого возможно успешное проведение военной операции, может включать несколько последовательных временных интервалов, скажем $([4^{00},5^{30}],[21^{00},23^{00}],[24^{00},2^{00}])$. Аналогично, участок пространства, в рамках которого возможно наблюдение некоторых объектов, может включать в себя несколько последовательных угловых интервалов, скажем $([15^\circ,21^\circ],[28^\circ,35^\circ],[48^\circ,53^\circ])$. Очевидным образом, на практике могут появляться и другие подобные примеры. Во всех таких примерах мы сталкиваемся с новыми неопределенными объектами, которые имеют вид последовательностей интервалов неопределенности. Каждый такой объект естественно назвать полиинтервалом. Настоящая статья полностью посвящена теории и возможным применениям полиинтервалов.

1. Постановка задачи

Распространенный подход к изучению неопределенных систем, известный под названием интервальной математики [1, 2], строится на базе понятия интервала, трактуемого как множество всех возможных значений неполностью определенной величины $\tilde{a}$, задаваемой лишь ее нижней a_1 и верхней a_2 границами. Величину $\tilde{a}$ можно записать в виде следующего ограниченного интервала неопределенности

$$\tilde{a} \equiv [a_1, a_2] = \{a \mid a_1 \le a \le a_2\}. \tag{1}$$

Здесь предполагается, что неизвестное «истинное» значение неопределенной величины $\tilde{a}$ достоверно лежит в пределах интервала $[a_1, a_2]$, не выходя за его границы a_1 и a_2. Причем все значения в пределах этого интервала считаются «равновозможными» в том смысле, что нет никаких оснований предпочитать одно значение другому. Заметим, что в данном случае понятие равновозможности не означает задание равномерного вероятностного или какого-либо иного распределения возможных значений внутри указанного интервала. Над интервалами вида (1) вводятся алгебраические операции, аналогичные соответствующим операциям над числами. Для этого используется теоретико-множественная конструкция

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \bullet b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \circ\tilde{a} = \{\bullet a \mid a \in \tilde{a}\}. \tag{2}$$

т.е. любая операция над интервалами $\circ$ определяется на основе соответствующей операции над точными величинами $\bullet$, при условии, что конкретные значения этих величин пробегают все возможные значения из соответствующих интервалов. Из этого определения вытекают простые правила выполнения операций над интервалами:

$$\begin{aligned}
&[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,a_2+b_2];\\
&[a_1,a_2]-[b_1,b_2]=[a_1-b_2,a_2-b_1];\\
&k\cdot[a_1,a_2]=\begin{cases}[ka_1,ka_2], & k>0,\\ [ka_2,ka_1], & k<0;\end{cases}\\
&[a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=[\min_{i,j}(a_i\cdot b_j),\max_{i,j}(a_i\cdot b_j)];\\
&[a_1,a_2]/[b_1,b_2]=[a_1,a_2]\cdot[1/b_2,1/b_1],\ \text{при}\ 0\notin[b_1,b_2].
\end{aligned} \tag{3}$$

Мы продолжим развитие интервальной математики, введя понятие полиинтервала как последовательности нескольких одиночных интервалов неопределенности

$$\tilde{A}=(\tilde{a},\tilde{b},...,\tilde{d}), \tag{4}$$

где $\tilde{a},\tilde{b},...,\tilde{d}$ – одиночные интервалы вида (1).

Операции над полиинтервалами введем аналогично операциям над интервалами, т.е. с помощью теоретико-множественной конструкции типа (2)

$$\tilde{A}\circ\tilde{B}=\{a\bullet b\,|\,a\in\tilde{A},b\in\tilde{B}\},\quad \circ\tilde{A}=\{\bullet a\,|\,a\in\tilde{A}\}. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{A}$ – полиинтервал вида (4), $\tilde{B}$ – другой полиинтервал того же вида, но с другими составляющими его одиночными интервалами вида (1). Задача работы заключается в том, чтобы на базе определения (5) операций над полиинтервалами вывести правила выполнения указанных выше операций, аналогичные правилам (3) выполнения операций над интервалами.

2. Математический аппарат

Будем представлять полиинтервалы (4) в теоретико-множественных терминах таким образом:

$$\tilde{A}=\tilde{a}\cup\tilde{b}\cup...\cup\tilde{d}. \tag{6}$$

Пусть заданы два полиинтервала $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ следующего вида

$$\tilde{A}=\bigcup_{i=1}^{m}\tilde{a}^i,\quad \tilde{B}=\bigcup_{j=1}^{n}\tilde{b}^j, \tag{7}$$

где $\tilde{a}^i=[a_1^i,a_2^i]$, $i=\overline{1,m}$ и $\tilde{b}^j=[b_1^j,b_2^j]$, $j=\overline{1,n}$ – одиночные интервалы, составляющие $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ соответственно. Требуется выполнить операцию $\circ$ над этими полиинтервалами. Согласно определению (5) имеем с учетом вида (7) полиинтервалов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$

$$\tilde{A}\circ\tilde{B}=\{a\bullet b\,|\,a\in\bigcup_{i=1}^{m}\tilde{a}^i,b\in\bigcup_{j=1}^{n}\tilde{b}^j\}. \tag{8}$$

На основании ассоциативного закона алгебры множеств выражение (8) можно представить как

$$\tilde{A}\circ\tilde{B}=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}\{a\bullet b\,|\,a\in\tilde{a}^i,b\in\tilde{b}^j\}. \tag{9}$$

Однако, согласно определению (2) выражение в фигурных скобках формулы (9) равно $\tilde{a}^i \circ \tilde{b}^j$. Так что окончательно получаем

$$\tilde{A} \circ \tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^i \circ \tilde{b}^j),$$

или в развернутом виде

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^i \right) \circ \left(\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{b}^j \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^i \circ \tilde{b}^j) \qquad (10)$$

Выражение для операции $\circ$ над одним полиинтервалом $\tilde{A}$ вида (7) имеет вид, аналогичный (10)

$$\circ \tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{m} (\circ \tilde{a}^i)$$

или в развернутом виде

$$\circ \left(\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^i \right) = \bigcup_{i=1}^{m} (\circ \tilde{a}^i). \qquad (11)$$

Формулы (10), (11) сводят выполнение операций над полиинтервалами к выполнению тех же самых операций над одиночными интервалами. Поскольку для последних имеются формулы их конструктивного выполнения (3), то путем совместного применения формул (3), (10), (11) решается и поставленная задача конструктивного выполнения различных операций над полиинтервалами.

3. Решение задачи

Установим сначала вид формулы для конструктивного выполнения операции сложения полиинтервалов. Для этого подставим в исходную формулу (10) выражения сумм интервалов согласно (3) и учтем, что в этом случае операция $\circ$ есть сложение $+$. В результате получим искомую формулу в следующем виде

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} [a_1^i, a_2^i] + \bigcup_{j=1}^{n} [b_1^j, b_2^j] = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} [a_1^i + b_1^j, a_2^i + b_2^j]. \qquad (12)$$

Аналогично устанавливается формула для конструктивного выполнения операции вычитания полиинтервалов. Для этого подставляем в исходную формулу (10) выражения разностей интервалов согласно (3), при этом учитывая, что здесь операция $\circ$ есть вычитание $-$. В результате мы получаем формулу

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} [a_1^i, a_2^i] - \bigcup_{j=1}^{n} [b_1^j, b_2^j] = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} [a_1^i - b_2^j, a_2^i - b_1^j]. \qquad (13)$$

Формула для конструктивного выполнения операции умножения полиинтервала на число находится аналогично. При этом используем выражение произведения интервала на число (3), а в качестве исходной формулы используем не (10), а (11).

В результате находим

$$k\tilde{A} = k\left(\bigcup_{i=1}^{m}[a_1^i, a_2^i]\right) = \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{m}[ka_1^i, ka_2^i], & k > 0, \\ \bigcup_{i=1}^{m}[ka_2^i, ka_1^i], & k < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Аналогично формулам (12), (13) для конструктивного выполнения операций сложения и вычитания полиинтервалов находим формулы для конструктивного выполнения операций умножения и деления полиинтервалов. При этом опираемся на правила умножения и деления интервалов (3), но в качестве исходной формулы снова используем формулу (10). В результате получаем формулу умножения полиинтервалов в виде

$$\bigcup_{i=1}^{m}[a_1^i, a_2^i]\cdot\bigcup_{j=1}^{n}[b_1^j, b_2^j] = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}[a_1^i, a_2^i]\cdot[b_1^j, b_2^j] = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}\left[\min_{s,q}(a_s^i b_q^j), \max_{s,q}(a_s^i b_q^j)\right] \quad (15)$$

и формулу деления полиинтервалов в виде

$$\bigcup_{i=1}^{m}[a_1^i, a_2^i]\Big/\bigcup_{j=1}^{n}[b_1^j, b_2^j] = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}[a_1^i, a_2^i]\cdot[1/b_2^j, 1/b_1^j] = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}\left[\min_{s,q}(a_s^i / b_q^j), \max_{s,q}(a_s^i / b_q^j)\right] \quad (16)$$

при $0 \notin [b_1^j, b_2^j], \quad j = \overline{1,n}.$

Формулы (12)–(16) дают правила конструктивного выполнения всех введенных выше алгебраических операций над полиинтервалами путем сведения указанных операций к соответствующим хорошо известным операциям над одиночными интервалами.

Теперь алгоритм решения разнообразных задач, возникающих при исследовании систем с полиинтервальными характеристиками, можно представить следующим образом.

Шаг 1. Построение математической модели, представляющей решение задачи как вычисление и анализ функции F аргументов-полиинтервалов.

Шаг 2. Составление по построенной модели блок-схемы алгоритма вычисления (анализа) функции F.

Шаг 3. Вычисление (анализ), по имеющейся блок-схеме алгоритма, полиинтервальной функции F, с использованием формул (12)–(16) выполнения различных операций над полиинтервалами. Заметим, что заключительной операцией во всех формулах является объединение интервалов, выполняемое известными методами [3].

Пример. Работник служит в двух фирмах: A и B. Причем в фирме A его месячная заработная плата в зависимости от заказов оценивается в размере 10000±1000 руб. или 15000±1500 руб. В фирме B его месячная зарплата оценивается (также в зависимости от заказов) в размере 3000±500 руб. или же 8000±1000 руб. Оценить суммарную месячную зарплату работника.

Решение. *Шаг 1.* В фирме A 1-ю зарплату можно представить в виде интервала $[a_1^1, a_2^1] = [9000, 11000]$, 2-ю – как интервал $[a_1^2, a_2^2] = [13500, 16500]$. Аналогично этому, в фирме B 1-ю зарплату можно представить в виде интервала $[b_1^1, b_2^1] = [2500, 3500]$, а 2-ю – в виде интервала $[b_1^2, b_2^2] = [7000, 9000]$. Итак, месячную зарплату в фирмах A и B можно представить соответственно следующими полиинтервалами

$$\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{2}[a_1^i, a_2^i] = [9000, 11000] \cup [13500, 16500],$$

$$\tilde{B} = \bigcup_{j=1}^{2}[b_1^j, b_2^j] = [2500, 3500] \cup [7000, 9000].$$

Месячная суммарная зарплата работника $\tilde{C}$ равна сумме его месячных зарплат в фирмах A и B, т.е. $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$. После подстановки значений полиинтервалов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ получаем

$$\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^{2}[a_1^i, a_2^i] + \bigcup_{j=1}^{2}[b_1^j, b_2^j] =$$

$$= ([9000, 11000] \cup [13500, 16500]) + ([2500, 3500] \cup [7000, 9000]).$$

Последняя формула и есть математическая модель решения задачи в виде вычисления суммы двух полиинтервалов.

Шаг 2. Блок-схема алгоритма вычисления функции-модели, полученной на шаге 1 алгоритма, очевидна и содержит всего одну ступень, на которой вычисляется сумма двух полиинтервалов.

Шаг 3. Вычисляем полиинтервальную функцию-модель, полученную на шаге 1. Эта функция – сумма двух полиинтервалов, содержащих каждый два интервала. По формуле (12) сложения полиинтервалов находим

$$\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^{2}[a_1^i, a_2^i] + \bigcup_{j=1}^{2}[b_1^j, b_2^j] =$$

$$= [a_1^1 + b_1^1, a_2^1 + b_2^1] \cup [a_1^1 + b_1^2, a_2^1 + b_2^2] + [a_1^2 + b_1^1, a_2^2 + b_2^1] \cup [a_1^2 + b_1^2, a_2^2 + b_2^2],$$

что после подстановки численных значений переменных a_k^i, b_s^j дает

$$\tilde{C} = [9000 + 2500, 11000 + 3500] \cup [9000 + 7000, 11000 + 9000] \cup$$

$$\cup [13500 + 2500, 16500 + 3500] \cup [13500 + 7000, 16500 + 9000] =$$

$$= [11500, 14500] \cup [16000, 20000] \cup [16000, 20000] \cup [20500, 25500] =$$

$$= [11500, 14500] \cup [16000, 20000] \cup [20500, 25500].$$

Таким образом, суммарная месячная зарплата работника, в зависимости от заказов у фирм $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, может лежать в интервалах $[11500, 14500]$ или $[16000, 20000]$ или $[20500, 25500]$ рублей или, в другой форме записи, составлять 13000 ± 1500 или 18000 ± 2000 или 23000 ± 2500 рублей.

4. Обсуждение

Как показано выше, дальнейшее развитие концепции интервальной неопределенности приводит к понятию полиинтервала, характеризующего более сложную неопределенность, имеющую вид последовательности интервалов неопределенности. Такая неопределенность характеризуется тем, что параметр системы не просто принимает какое-то, заранее неизвестное, значение внутри определенного заданного интервала, но еще сначала выбирает какой-нибудь, заранее неизвестный, интервал из нескольких заданных интервалов, внутри которого затем принимает какое-то, заранее неизвестное значение. Эта более сложная модель неопределенности встречается очень часто в военном деле, экономике, технике и иных областях и потому заслуживает изучения и разработки. Логично осуществлять эту разработку, используя подходы интервальной математики [1, 2] и развивая их в направлении учета многоинтервальности. Подобно тому, как интервальная математика базируется на алгебре интервалов, полиинтервальная математика базируется на алгебре полиинтервалов. Однако, в отличие от алгебры интервалов, в алгебре полиинтервалов не имеется простых зависимостей между сложностью (длиной) операндов и сложностью результата операции. Это вызвано большей сложностью неопределенных систем, описываемых алгеброй полиинтервалов.

Заключение

В статье сформулирована задача изучения новой модели неопределенности – так называемого полиинтервала, обобщающей известную модель неопределенности – интервал – на случай существования нескольких последовательных интервалов неопределенности. С помощью известной из интервальной математики теоретико-множественной конструкции, аналогично операциям над интервалами, введены операции над полиинтервалами. Разработана методика сведения операций над интервалами к операциям над полиинтервалами. С ее помощью выведены формулы для конструктивного выполнения всех операций над полиинтервалами и построен соответствующий алгоритм. На примере из области экономики проиллюстрирована практическая польза разработанной теории и методов.

Литература

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М: Мир, 1987. – 370 с.

2. Левин В. И. Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности. – Пенза: Изд-во Пензенского технологического института, 1998. – 55 с.

3. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. – 232 с.

References

1. Alefeld, G., Herzberger, Ju., *Einführung in die Intervallrechnung* [Introduction to the Interval Computations]. Zürich, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1974. 398 p. (in German).

2. Levin V. I. *Intervalnaya matematika i issledovanie system v usloviyah neopredelennosti* [Interval Mathematics and Research of Systems in Condition of Uncertainty]. Penza, Penza Technological Institute Publishing, 1998. 55 p. (in Russian).

3. Stoll R. R. *Sets, Logic and Axiomatic Theories*. San Francisco, W.H. Freeman and Co., 1961, 206 p.

Информация об авторе

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Polyintervals: Calculus and Applications

V. I. Levin

Relevance. *In recent decades there are more and more new technologies in the military and civilian spheres which associated with studying of uncertainty. These technologies are widely used in engineering, economics, social sphere. To support their new mathematical models and methods are needed. In this regard, this article dedicated to the development of new model of uncertainty (polyinterval) and mathematical methods of its study is relevant.* ***The purpose*** *of the article is in the detailed design of a new adequate mathematical model of uncertainty - polyinterval, which is a sequence of a finite number of intervals of uncertainty, the system of algebraic operations on polyintervals and rules to perform these operations.* ***Method.*** *To accomplish this goal we propose to extend to study polyintervals the method from the interval mathematics based on the determination of algebraic operations on intervals in form of set-theoretic generalizations of operations on real numbers.* ***Novelty.*** *The novelty of the work lies in the proposed new mathematical model of uncertainty in form of systems of polyintervals, together with mathematical tools allowing to perform various operations on polyintervals and thereby enabling them to perform mathematical modeling of uncertain systems.* ***Result.*** *The article detailed developed a new mathematical model of uncertainty – polyinterval. The system of algebraic operations on polyintervals is determined and rules for their implementation are output. The algorithm of study of uncertain systems with polyinterval parameters is given.*

Keywords *interval value, polyinterval value, uncertainty, algebra of polyinterval values, system modeling.*

Information about Author

Vitaly Ilyich Levin – the Doctor of Engineering Sciences, Professor, PhD, Full Professor. Honored worker of science of the Russian Federation. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economy, sociology, history; decision-making; optimization; automata theory; theory of reliability; history of science; problems of education. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: 440039, Russia, Penza, pr. Baydukova / Gagarin st., 1a/11.