№1. 2016
sccs.intelgr.com

УДК 62–50:519.7/8

Теоретические основы исследования интервальных функций методами интервально-дифференциального исчисления

Левин В. И.

Актуальность. *Рассмотрены существующие подходы к расчету, анализу, синтезу и оптимизации систем в условиях неопределенности. Исследование неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками данных систем. Эти задачи значительно сложнее их детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с детерминированными (точно известными) параметрами. Усложнение связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел сложнее алгебры детерминированных чисел.* ***Цель статьи.*** *В данной статье сформулирована и подробно описана задача вычисления и анализа поведения неполностью определенной функции, заданной с точностью до интервала значений.* ***Метод.*** *Для решения этой задачи предложен метод детерминизации, который позволяет свести задачу к двум аналогичным – для верхней и нижней граничных функций исходной неполностью определенной функции. В этом методе использован аппарат интервальной математики и интервально-дифференциального исчисления. Выделены различные типы возможного поведения интервальных функций (постоянство, возрастание, убывание, расширение, сужение) и различные типы экстремальных точек таких функций (например, точка максимума, точка минимума, точка максимального расширения, точка минимального расширения).* ***Новизна.*** *Доказаны теоремы, позволяющие определять участки различного поведения интервальных функций и точки с различными видами экстремума.* ***Результат****. Подробно рассмотрена и проиллюстрирована на примере работа предложенного алгоритма детерминизации, позволяющего анализировать поведение интервальных функций.*

Ключевые слова: *оптимизация, неопределенность, детерминированная функция, интервальная функция, анализ поведения функций.*

Введение

Современная наука и практика обработки информации хорошо справляется с задачами исследования различных систем с полностью определенными (детерминированными) параметрами. Эти задачи обычно формулируются как задачи расчета, анализа и синтеза тех или иных функций с детерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками изучаемых систем. Однако на практике часто встречаются другие системы – системы с неточно известными, т.е. неполностью определенными (недетерминированными) параметрами. Причины появления таких систем заключаются в естественной неопределенности, свойственной многим реальным процессам, происходящим в системах; в неточном задании параметров большинства систем из-за неизбежных погрешностей при их вычислении или измерении; в изменении во времени некоторых параметров систем; в необходимости совместного исследования целых семейств однотипных систем, имеющих одинаковые функции-характеристики и различающиеся лишь значениями параметров этих функций.

Исследование введенных неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками данных систем. Все эти задачи значительно сложнее их вышеупомянутых детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с полностью определенными (детерминированными) параметрами. Усложнение связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел всегда сложнее алгебры детерминированных чисел.

В настоящей статье исследуются указанные более сложные задачи расчета и анализа неточно заданных (недетерминированных) функций интервального типа. В качестве математического аппарата используется интервальная алгебра и интервально-дифференциальное исчисление. Целью работы является устранение противоречия между требующими решения новыми сложными задачами и существующими подходами, не пригодными для их решения. Для этого разрабатываются новые, адекватные этим задачам модели и методы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим обычную (детерминированную) функцию одной независимой переменной

$$y = f(x), \tag{1}$$

однозначно отображающую заданное множество $X = \{x\}$ независимых переменных x в заданное множество $Y = \{y\}$ зависимых переменных y в соответствии с некоторым законом f, который и называется функцией. Хорошо известно, что задача расчета (вычисления значений) функции (1) решается с помощью адекватного этой задаче математического аппарата алгебры вещественных чисел, при использовании подходящих методов вычисления, а задача анализа поведения функции (1) – с помощью адекватного ей аппарата классического дифференциального исчисления [1].

Теперь рассмотрим недетерминированную (именно, интервальную) функцию одной независимой переменной [2]

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x), \tag{2}$$

однозначно отображающую заданное множество $X = \{x\}$ независимых вещественных (как и в случае (1)) переменных x в заданное множество $\tilde{Y} = \{\tilde{y}\}$ зависимых переменных-интервалов $\tilde{y} = [y_1, y_2]$, в соответствии с законом $\tilde{f}$, который и называется интервальной функцией. Согласно определению (2), любую интервальную функцию $\tilde{f}$ можно представить в виде пары обычных функций f_1, f_2

$$\tilde{f} = \{f_1, f_2\}, \tag{3}$$

которые имеют вид

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x). \tag{4}$$

Из выражений (3), (4) видно, что интервальная функция $\tilde{f}$ эквивалентна паре обычных функций f_1, f_2, из которых первая однозначно отображает заданное множество $X=\{x\}$ независимых переменных x функции $\tilde{f}$ в множество $Y_1=\{y_1\}$ нижних границ интервалов $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – зависимых переменных этой функции, а вторая однозначно отображает то же множество $X=\{x\}$ в множество $Y_2=\{y_2\}$ верхних границ тех же интервалов $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ – зависимых переменных этой функции.

Задача настоящей работы заключается в построении двух систематических процедур (алгоритмов), связанных с изучением интервальных функций вида (2). А именно:

1. Процедура расчета (вычисления значений) интервальной функции.
2. Процедура анализа поведения интервальной функции.

В литературе хорошо изучена только задача вычисления интервальной функции, которая сводится к вычислению детерминированных нижней и верхней граничных функций интервальной функции [3, 4]. Задача анализа поведения интервальной функции изучена гораздо хуже, что связано с разнобоем в выборе критериев сравнения интервальных чисел [5, 6]. Реальные достижения здесь имеются лишь в нахождении точек оптимума интервальных функций [7]. В связи с этим, излагаемый в статье подход к вычислению и анализу поведения интервальной функции, основанный на математически строгом и едином методе детерминизации, т.е. сведение исследования интервальной функции к изучению ее верхней и нижней граничных функций, является весьма актуальным. Другие подходы к задаче изложены в [8, 9].

2. Решение задачи вычисления интервальной функции

Начнем с решения базовой задачи расчета (вычисления значений) интервальной функции. Здесь возможны два случая.

Случай 1. Интервальная функция задана в разделенном виде, в котором верхняя и нижняя границы интервального значения функции выражены каждая по отдельности. Этот вид представления интервальной функции вытекает из выражений (2)–(4). Именно, из (2), (3) следует явное представление интервальной функции в виде интервала

$$[y_1, y_2]=[f_1(x), f_2(x)], \tag{5}$$

границы которого согласно (5) выражаются формулами

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x). \tag{6}$$

Таким образом, вычисление интервального значения $\tilde{y}=[y_1,y_2]$ интервальной функции (2), соответствующего значению x независимой переменной этой функции, осуществляется по следующему алгоритму.

Шаг 1. Записываем вычисляемую интервальную функцию типа (2) в разделенном виде (5), (6) с помощью нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций функции (2).

Шаг 2. Вычисляем нижнюю граничную функцию f_1, используя для этого какой-либо подходящий известный метод вычисления обычных (детерминированных) функций [3].

Шаг 3. Вычисляем верхнюю граничную функцию f_2, используя ту же методику, что и на шаге 2.

Шаг 4. Соединяя вычисленные значения нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций, получаем явное представление (5) вычисленной интервальной функции (2) в виде интервала.

Случай 2. Интервальная функция дана в неразделенном виде, т.е. в виде суперпозиции элементарных интервальных функций: интервального сложения и вычитания, умножения интервала на вещественное число, умножения и деления интервалов [4]. В этом случае перед собственно вычислением интервальная функция приводится к разделенному виду, после чего к функции применяется четырехшаговый алгоритм случая 1. Приведение любой интервальной функции к разделенному виду можно осуществить с помощью основных формул интервальной математики, выражающих результаты элементарных преобразований интервалов [4]

$$\begin{aligned}
&[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,a_2+b_2];\\
&[a_1,a_2]-[b_1,b_2]=[a_1-b_2,a_2-b_1];\\
&k\cdot[a_1,a_2]=\begin{cases}[ka_1,ka_2], & k>0,\\ [ka_2,ka_1], & k<0;\end{cases}\\
&[a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=[\min_{i,j}(a_i\cdot b_j),\max_{i,j}(a_i\cdot b_j)];\\
&[a_1,a_2]/[b_1,b_2]=[a_1,a_2]\cdot[1/b_2,1/b_1],
\end{aligned} \tag{7}$$

при условии, что интервал $[b_1,b_2]$ не содержит нуля.

Пример 1. Привести к разделенному виду интервальную функцию

$$\tilde{y}=([2,3]x+[1,2]x)\cdot([5,7]x+[4,6]x)$$

в области $x\ge 0$.

Решение. Применяя к заданной интервальной функции последовательно третью, первую и четвертую формулы (7), получим нужный вид функции

$$\begin{aligned}
\tilde{y}&=[y_1,y_2]=([2x,3x]+[x,2x])\cdot([5x,7x]+[4x,6x])=[3x,5x]\cdot[9x,11x]=\\
&=[\min(3\cdot 9x^2,3\cdot 11x^2,5\cdot 9x^2,5\cdot 11x^2),\max(3\cdot 9x^2,3\cdot 11x^2,5\cdot 9x^2,5\cdot 11x^2)]=\\
&=[27x^2,55x^2].
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_1=27x^2,\quad y_1=55x^2,$$

и наконец, разделенная форма заданной интервальной функции

$$\tilde{y}=[y_1,y_2]=[27x^2,55x^2].$$

3. Решение задачи анализа поведения интервальной функции: сравнение интервалов

Перейдем к описанию упомянутой ранее (п. 1) задачи анализа поведения интервальной функции. Постановка этой задачи аналогична постановке задачи анализа поведения обычной детерминированной функции и включает, в первую очередь, отыскание

1) интервалов возрастания функции;
2) интервалов убывания функции;
3) интервалов постоянства значений функции;
4) точек максимума функции;
5) точек минимума функции.

Постановка задачи анализа поведения интервальной функции может еще включать отыскание особых интервалов (особых точек) интервальной функции. Существование таких интервалов (таких точек) связано с интервальным характером этой функции. У обычных детерминированных функций такие интервалы (точки) отсутствуют.

Очевидно, решение задач анализа поведения интервальной функции требует сравнения величин интервалов. В связи с этим ниже кратко изложены основные результаты теории сравнения интервалов [5, 6].

Рассмотрим два интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$. Попытаемся сравнить величины этих интервалов, рассматривая их как интервальные числа. Прямое сравнение интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ на основе отношений отдельных пар вещественных чисел (a_i,b_j), где $a_i\in\tilde{a}, b_j\in\tilde{b}$, не всегда возможно, так как в общем случае одни пары чисел будут находиться в отношении $(a_i>b_j)$, а другие – в противоположном отношении $(a_i<b_j)$. Поэтому остается реализовать сравнение интервалов на теоретико-множественном уровне, рассматривая каждый интервал их как единое целое, не делимое на части. При этом операции взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ двух интервалов $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ можно ввести в виде следующих теоретико-множественных конструкций

$$\tilde{a}\vee\tilde{b}=\{a\vee b\,|\,a\in\tilde{a},b\in\tilde{b}\},\quad \tilde{a}\wedge\tilde{b}=\{a\wedge b\,|\,a\in\tilde{a},b\in\tilde{b}\}. \tag{8}$$

Таким образом, взятие максимума (минимума) двух интервалов $\tilde{a},\tilde{b}$ определяется, согласно (8), как нахождение множества максимумов (минимумов) двух точных величин a и b, при условии, что эти величины пробегают все возможные значения соответственно из интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Теперь для того, чтобы интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно было сравнить по величине, установив их отношение $\tilde{a}\geq\tilde{b}$ или $\tilde{a}\leq\tilde{b}$, нужно, чтобы 1) введенные операции $\vee,\wedge$ над этими интервалами существовали; 2) эти операции давали в результате один из операндов: $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$; 3) эти операции были согласованы, т.е. если большим (меньшим) оказывается один из интервалов, то меньшим (большим) является другой из них. Сформулированное условие сравнимости величин интервалов является, очевидно необходимым и достаточным.

Нетрудно доказать, что условие согласованности операций $\vee,\wedge$ над интервалами всегда выполняется. Очевидно также, что эти операции существуют для любой пары интервалов $\tilde{a},\tilde{b}$, причем результатом операции в общем случае оказывается некоторый новый интервал, отличный как от $\tilde{a}$, так и от $\tilde{b}$. Таким образом, необходимым и достаточным условием сравнимости интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ оказывается условие, по которому операции $\tilde{a} \vee \tilde{b}$ и $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ должны иметь своим результатом один из интервалов – $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$. Из этой формулировки условия сравнимости интервалов выводятся различные его конструктивные формы, удобные для практического применения. Эти формы содержатся в нижеследующих теоремах 1–4.

Теорема 1. Для того, чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_1 \geq b_1, \quad a_2 \geq b_2, \tag{9}$$

а для того, чтобы эти интервалы были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq b_2. \tag{10}$$

Из теоремы видно, что интервалы $\tilde{a}, \tilde{b}$ сравнимы по величине (по отношению $\geq$ или $\leq$) и находятся в этом отношении только тогда, когда в таком же отношении находятся их одноименные границы a_1, b_1 и a_2, b_2.

Значение теоремы 1 в том, что она сводит сравнение интервалов и выбор большего (меньшего) из них к очевидной операции сравнения границ указанных интервалов, являющихся вещественными числами.

Теорема 2. Для того, чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были несравнимы по величине (по отношению $\geq$ или $\leq$), т.е. не находились в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1 < b_1, a_2 > b_2) \quad \text{или} \quad (b_1 < a_1, b_2 > a_2). \tag{11}$$

Интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не сравнимы по отношениям $\geq, \leq$ только тогда, когда один из них полностью накрывает другой. Смысл предложения 2 в том, что оно выявляет существование случаев несравнимости интервалов по отношениям $\geq$ и $\leq$, в отличие от вещественных чисел, которые всегда сравнимы по этим отношениям. Несравнимость некоторых интервалов – естественный результат того, что интервальные числа, в отличие от обычных вещественных чисел, задаются не точно, а с неопределенностью (число принимает некоторое значение в заданном интервале, но при этом не уточняется, какое именно это значение).

Будем рассматривать теперь систему нескольких интервалов

$$\tilde{a}_1 = [a_{11}, a_{12}], \tilde{a}_2 = [a_{21}, a_{22}], \tilde{a}_3 = [a_{31}, a_{32}], \ldots \tag{12}$$

Сравнение по отношениям $\geq, \leq$ величин интервалов указанной системы (12), рассматриваемых как интервальные числа, реализуется в результате попарного сравнения указанных интервалов, выполняемого в соответствии с теоремами 1, 2. Главные результаты, получаемые этим путем, содержатся в нижеследующих теоремах 3 и 4.

Теорема 3. Для того, чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал максимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\geq$, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\begin{aligned} &a_{11} \ge a_{21},\ a_{11} \ge a_{31},\ a_{11} \ge a_{41},... \\ &a_{12} \ge a_{22},\ a_{12} \ge a_{32},\ a_{12} \ge a_{42},... \end{aligned}. \tag{13}$$

Теорема 4. Для того, чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал минимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\le$, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы рассматриваемого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов по условиям

$$\begin{aligned} &a_{11} \le a_{21},\ a_{11} \le a_{31},\ a_{11} \le a_{41},... \\ &a_{12} \le a_{22},\ a_{12} \le a_{32},\ a_{12} \le a_{42},... \end{aligned} \tag{14}$$

Как показывают теоремы 3, 4, интервал является максимальным (минимальным) в системе интервалов только тогда, когда максимальны (минимальны) его нижняя граница – среди нижних границ всех интервалов и его верхняя граница – среди верхних границ всех интервалов. Подобно случаю сравнения двух интервалов, сравнение любого числа интервалов системы не выявит максимального (минимального) интервала, если интервалы, входящие в систему, попарно не сравнимы.

До сих пор мы имели в виду процедуры выделения, вообще говоря, нестрого максимального (нестрого минимального) интервала, основанные на теоретико-множественных операциях (8) для вычисления нестрогого максимума (нестрогого минимума) двух интервалов. Аналогично этому вводятся процедуры выделения строго максимального (строго минимального) интервала, т.е. единственного интервала, являющегося максимальным (минимальным).

Будем считать совпадающие интервалы $\tilde{a},\tilde{b}$ равными по определению, т.е. для интервалов $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$, взятых произвольно, условие их равенства вводится таким образом:

$$(\tilde{a}=\tilde{b}) \Leftrightarrow (a_1=b_1, a_2=b_2). \tag{15}$$

Из формулы (15) следует, что неравными являются интервалы, удовлетворяющие условию

$$(\tilde{a} \ne \tilde{b}) \Leftrightarrow (a_1 \ne b_1 \text{ или } a_2 \ne b_2). \tag{16}$$

Теперь определение того, что некоторый интервал $\tilde{a}$ является строго максимальным из двух интервалов $\tilde{a},\tilde{b}$ можно записать в виде

$$(\tilde{a} > \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}, \tilde{a} \ne \tilde{b}), \tag{17}$$

аналогичным образом, определение того, что интервал $\tilde{a}$ является строго минимальным из двух интервалов $\tilde{a},\tilde{b}$ записывается в виде

$$(\tilde{a} < \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{b}, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{a}, \tilde{a} \ne \tilde{b}). \tag{18}$$

Здесь $\vee, \wedge$ – теоретико-множественные операции (8) вычисления максимума и минимума двух интервалов.

Из формулировки условий (17), (18) сравнимости интервалов как строгих неравенств между ними можно вывести различные конструктивные формы этих условий, удобные для практического применения. Эти формы содержатся в следующих предложениях 5–8, которые подобны предложениям 1–4, дающим удобные конструктивные формы сравнимости интервалов в виде нестрогих неравенств.

Теорема 5. Для того, чтобы два интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2],\tilde{b}=[b_1,b_2]$ были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a}>\tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1>b_1,\, a_2\ge b_2) \text{ или } (a_1\ge b_1,\, a_2>b_2), \tag{19}$$

а для того, чтобы эти интервалы были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a}<\tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1<b_1,\, a_2\le b_2) \text{ или } (a_1\le b_1,\, a_2<b_2). \tag{20}$$

Из данной теоремы вытекает, что интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ сравнимы по величине (по отношению $>$ или $<$) и находятся в указанном отношении только тогда, когда в том же отношении находятся их нижние границы a_1,b_1 (при этом верхние границы a_2,b_2 находятся в соответствующем нестрогом отношении – для $>$ это $\ge$, а для $<$ это $\le$) или их верхние границы a_2,b_2 (при этом нижние границы a_1,b_1 находятся в соответствующем нестрогом отношении).

Теорема 6. Для того, чтобы два интервала $\tilde{a}=[a_1,a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ были не сравнимы по величине (по отношению $>$ или $<$), т.е. не находились в отношении $\tilde{a}>\tilde{b}$ или $\tilde{a}<\tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1<b_1,\, a_2>b_2) \text{ или } (b_1<a_1,\, b_2>a_2) \text{ или } (a_1=b_1,\, a_2=b_2). \tag{21}$$

Итак, интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не сравнимы по отношениям $>,<$ только в тех случаях, когда один из них полностью «накрывает» другой либо когда интервалы равны между собой. Значение теоремы 6 в том, что она показывает существование случаев несравнимости интервалов по отношениям $>$ и $<$ даже тогда, когда сравниваемые интервалы не равны между собой, а только «накрывают» один другой. Эта ситуация существенно отличается от ситуации со сравнением вещественных чисел, где неравные числа всегда сравнимы по отношениям $>$ и $<$.

Рассмотрим теперь систему нескольких интервалов (12). Сравнение по отношениям $>$ и $<$ величин интервалов системы (12), рассматриваемых как интервальные числа, реализуется путем попарного сравнения этих интервалов, в соответствии с теоремами 5 и 6. Основные результаты, получаемые этим путем, изложены в нижеследующих теоремах 7, 8.

Теорема 7. Для того, чтобы в системе из нескольких интервалов (12) существовал максимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $>$, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}>a_{21},\, a_{12}\ge a_{22}) \text{ или } (a_{11}\ge a_{21},\, a_{12}>a_{22})\\ (a_{11}>a_{31},\, a_{12}\ge a_{32}) \text{ или } (a_{11}\ge a_{31},\, a_{12}>a_{32})\\ (a_{11}>a_{41},\, a_{12}\ge a_{42}) \text{ или } (a_{11}\ge a_{41},\, a_{12}>a_{42})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}. \tag{22}$$

Теорема 8. Для того, чтобы в системе из нескольких интервалов (12) существовал минимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $<$, и этим интервалом являлся $\tilde{a}_1$, необходимо и достаточно, чтобы границы данного интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} < a_{21}, a_{12} \le a_{22}) \text{ или } (a_{11} \le a_{21}, a_{12} < a_{22}) \\ (a_{11} < a_{31}, a_{12} \le a_{32}) \text{ или } (a_{11} \le a_{31}, a_{12}, < a_{32}) \\ (a_{11} < a_{41}, a_{12} \le a_{42}) \text{ или } (a_{11} \le a_{41}, a_{12} < a_{42}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}. \qquad (22)$$

4. Решение задачи анализа поведения интервальной функции. Основные теоремы и алгоритм

В предыдущем пункте мы изложили вспомогательный для задачи анализа поведения интервальной функции материал, связанный со сравнением интервальных величин. Теперь мы займемся собственно анализом поведения интервальных функций.

Рассмотрим произвольную интервальную функцию (2). Предположим, эта функция задана в разделенном виде (5), (6). Это не ограничивает общности рассмотрения, так как функция, заданная в неразделенном виде, всегда может быть приведена к разделенному виду (см. п. 3). Будем также считать, что нижняя и верхняя граничные функции нашей интервальной функции непрерывны и дифференцируемы. Сформулируем условия, при которых заданная функция возрастает, убывает, остается постоянной, достигает максимума (минимума), ведет себя иным, отличным от указанных, способом.

По аналогии с обычными (детерминированными) функциями [1] введем понятия возрастания, убывания, постоянства, максимума и минимума интервальной функции.

Определение 1. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется возрастающей на интервале (a,b), если для любых x_1 и x_2 из данного интервала, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1) < \tilde{f}(x_2)$.

Определение 2. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется убывающей на интервале (a,b), если для любых x_1 и x_2 из данного интервала, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1) > \tilde{f}(x_2)$.

Определение 3. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ является постоянной на интервале (a,b), если для любых x_1 и x_2 из упомянутого интервала, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$.

Определение 4. Точка $x = x_0$ называется точкой максимума интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ – максимумом указанной функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, истинно строгое неравенство $\tilde{f}(x_0) > \tilde{f}(x)$.

Определение 5. Точка $x = x_0$ называется точкой минимума интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ минимумом этой функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, выполняется строгое неравенство $\tilde{f}(x_0) < \tilde{f}(x)$.

Введем теперь понятия расширения и сужения интервальной функции, которые не применимы к обычным (детерминированным) функциям.

Определение 6. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется расширяющейся на интервале (a,b), если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала, для которых $x_1 < x_2$, интервал $\tilde{f}(x_2)$ полностью накрывает интервал $\tilde{f}(x_1)$.

Определение 7. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется сужающейся на интервале (a,b), если для любых x_1 и x_2 из указанного интервала, для которых $x_1 < x_2$, интервал $\tilde{f}(x_1)$ полностью накрывает интервал $\tilde{f}(x_2)$.

Определение 8. Точка $x = x_0$ называется точкой максимального расширения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $D(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ – максимальной шириной указанной функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, интервал $\tilde{f}(x_0)$ полностью «накрывает» интервал $\tilde{f}(x)$.

Определение 9. Точку $x = x_0$ будем называть точкой максимального сужения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $d(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ – минимальной шириной функции $\tilde{f}(x)$, если для всех точек x некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, интервал $\tilde{f}(x)$ полностью накрывает $\tilde{f}(x_0)$.

Сформулируем и докажем условия, которые определяют то или иное поведение интервальной функции.

Теорема 9. Для того, чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была возрастающей на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на указанном интервале ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ была возрастающей, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ – неубывающей либо, наоборот, функция $f_2(x)$ была возрастающей, а функция $f_2(x)$ – неубывающей.

Доказательство. Представим функцию $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ в интервальной форме (5): $\tilde{y} = [f_1(x), f_2(x)]$. Возрастание этой функции на интервале (a,b) согласно определению (1) означает, что для любых x_1, x_2 из этого интервала, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $[f_1(x_1), f_2(x_1)] < [f_1(x_2), f_2(x_2)]$, которое, согласно теореме 5, приводит к двум возможным вариантам:

$$f_1(x_1) < f_1(x_2),\ f_2(x_1) \le f_2(x_2) \text{ или } f_1(x_1) \le f_1(x_2),\ f_2(x_1) < f_2(x_2).$$

Итак, верно одно из двух: либо на интервале (a,b) нижняя граничная функция $f_1(x)$ интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ всюду является возрастающей, а ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ – неубывающей либо наоборот, $f_2(x)$ является возрастающей, а $f_1(x)$ – неубывающей, что и требовалось доказать.

Теорема 10. Для того, чтобы интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была убывающей на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ убывала, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ – не возрастала либо, наоборот, функция $f_2(x)$ была убывающей, а функция $f_1(x)$ – невозрастающей.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9, однако использует определение 2 вместо определения 1.

Теорема 11. Для того, чтобы интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была постоянной на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале ее нижняя $f_1(x)$ и верхняя $f_2(x)$ граничные функции были постоянными.

Доказательство следует прямо из определения интервала как множества всех вещественных чисел между заданными двумя числами – границами интервала, включая и сами эти границы.

Теорема 12. Для того, чтобы точка $x=x_0$ была точкой максимума интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ – максимумом этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке достигала максимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ и не достигала минимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ или достигала максимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ и не достигала минимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство. Представим функцию $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ в интервальной форме (5): $\tilde{y}=[f_1(x), f_2(x)]$. Существование максимума этой функции в точке $x=x_0$ по определению 4 означает, что для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0, не совпадающих с x_0, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_0)>\tilde{f}(x)$ или, в интервальной форме $[f_1(x_0), f_2(x_0)]>[f_1(x), f_2(x)]$. Последнее неравенство, согласно теореме 5, эквивалентно условию

$$(f_1(x_0)>f_1(x),\ f_2(x_0)\geq f_2(x)) \text{ или } (f_1(x_0)\geq f_1(x),\ f_2(x_0)>f_2(x)).$$

Условия левой скобки показывают, что в точке x_0 функция $f_1(x)$ обращается в максимум, а функция $f_2(x)$ не обращается в минимум. Условия же правой скобки показывают, что в точке x_0 функция $f_2(x)$ обращается в максимум, а функция $f_1(x)$ не обращается в минимум. Что и требовалось доказать.

Теорема 13. Для того, чтобы точка $x=x_0$ являлась точкой минимума интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ являлось ее минимумом, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке достигала минимума ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ и не достигала максимума ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ или, наоборот, достигала минимума верхняя граничная функция $f_2(x)$ и не достигала максимума нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство теоремы 13 аналогично доказательству теоремы 12, но привлекает определение 5.

Теорема 14. Для того, чтобы интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была расширяющейся на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале была убывающей ее нижняя граничная функция $f_1(x)$ и была возрастающей ее верхняя граничная функция $f_2(x)$.

Доказательство. Для любых x_1, x_2 из интервала (a,b), таких, что $x_1<x_2$, в силу расширения функции f на этом интервале должно выполняться такое условие: интервал $\tilde{f}(x_2)$ полностью накрывает интервал $\tilde{f}(x_1)$. Выражая эти интервалы явно в интервальной форме $\tilde{f}(x_1)=[f_1(x_1), f_2(x_1)], \tilde{f}(x_2)=[f_1(x_2), f_2(x_2)]$, будем иметь условие накрытия интервалов:

$$f_1(x_2)<f_1(x_1), \quad f_2(x_2)>f_2(x_1).$$

Первое неравенство показывает, что функция $f_1(x)$ является убывающей, второе – что $f_2(x)$ является возрастающей. Что и требовалось доказать.

Теорема 15. Для того, чтобы интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была сужающейся на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале была убывающей ее верхняя граничная функция $f_2(x)$ и была возрастающей ее нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.

Теорема 16. Для того, чтобы точка $x=x_0$ была точкой максимального расширения интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $D(x_0)=f_2(x_0)-f_1(x_0)$ максимальной шириной этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки x_0 слева функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была расширяющейся, а в некоторой окрестности точки x_0 справа она была сужающейся.

Теорема 17. Для того чтобы точка $x=x_0$ была точкой максимального сужения интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, а число $d(x_0)=f_2(x_0)-f_1(x_0)$ минимальной шириной указанной функции, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки x_0 слева функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ была сужающейся, а в некоторой окрестности точки x_0 справа она была расширяющейся.

Доказательства теорем 16, 17 следуют прямо из определений 8, 9 точек максимального расширения и сужения интервальной функции.

Анализ поведения интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, как показывает изложенный в этом параграфе материал, всегда сводится к анализу поведения двух обычных детерминированных функций: нижней $f_1(x)$ и верхней $f_2(x)$ граничных функций функции $\tilde{f}(x)$. Это позволяет использовать для анализа поведения интервальных функций хорошо известные и разработанные методы анализа поведения обычных (детерминированных) функций, основанные на использовании классического дифференциального исчисления [1]. При этом алгоритм анализа поведения произвольной интервальной функции может быть описан следующим образом.

Шаг 1. Проверка формы, в которой задана исходная интервальная функция $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, подлежащая анализу. Если эта форма неразделенная, т.е. не имеющая вида интервала $\tilde{y}=[y_1,y_2]=[f_1(x),f_2(x)]$, где $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ – соответственно нижняя и верхняя граничные функции заданной интервальной функции, то переход к шагу 2. Если она разделенная, т.е. имеющая указанный вид, то переход к шагу 3.

Шаг 2. Приведение функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ из неразделенного вида к разделенному с помощью базовых формул интервальной алгебры (7) (пример 1).

Шаг 3. Анализ поведения нижней граничной функции $y_1=f_1(x)$ интервальной функции $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$ с помощью известных методов анализа поведения обычных (детерминированных) функций, на основе классического дифференциального исчисления. В ходе этого анализа устанавливаем интервалы возрастания и убывания функции f_1, а также точки ее максимумов и минимумов.

Шаг 4. Анализ поведения верхней граничной функции $y_2=f_2(x)$ нашей интервальной функции. Он выполняется теми же методами и по той же программе, что и предыдущий шаг.

Шаг 5. Составление сводной таблицы поведения обеих граничных функций $y_1=f_1(x), y_2=f_2(x)$ (табл. 1) путем заполнения в ней первых 3 строк, в соответствии с результатом анализа поведения функций $f_1(x), f_2(x)$ (шаги 3, 4).

Таблица 1 – Сводная таблица поведения функций

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	(x_2,x_3)	x_3	(x_3,x_4)	…	(x_{n-1},x_n)	x_n	(x_n,∞)
$y_1=f_1(x)$	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	…	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная
$y_2=f_2(x)$	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	…	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная
$\tilde{y}=\tilde{f}(x)$	возрастание	максимум	убывание	минимум	расширение	максимальное расширение	сужение	…	сужение	максимальное сужение	расширение

Шаг 6. Анализ этой таблицы с помощью теорем 9–15, позволяющих идентифицировать последовательные интервалы $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n), (x_n, \infty)$ в ней как интервалы возрастания, убывания, расширения или сужения анализируемой интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а промежуточные точки $x_1, x_2, ..., x_n$ между интервалами как точки максимума (минимума) функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ или точки максимума (минимума) ее расширения или сужения. Например, если на некотором интервале (x_i, x_{i+1}) функция $f_2(x)$ возрастает, а на соседнем интервале (x_{i+1}, x_{i+2}) она убывает, так что в точке x_{i+1} она максимальна, и при этом функция $f_1(x)$ на обоих интервалах постоянная, то согласно теоремам 9, 10, 12 интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ на интервале (x_i, x_{i+1}) возрастает, в точке x_{i+1} достигает максимума, затем на интервале (x_{i+1}, x_{i+2}) убывает.

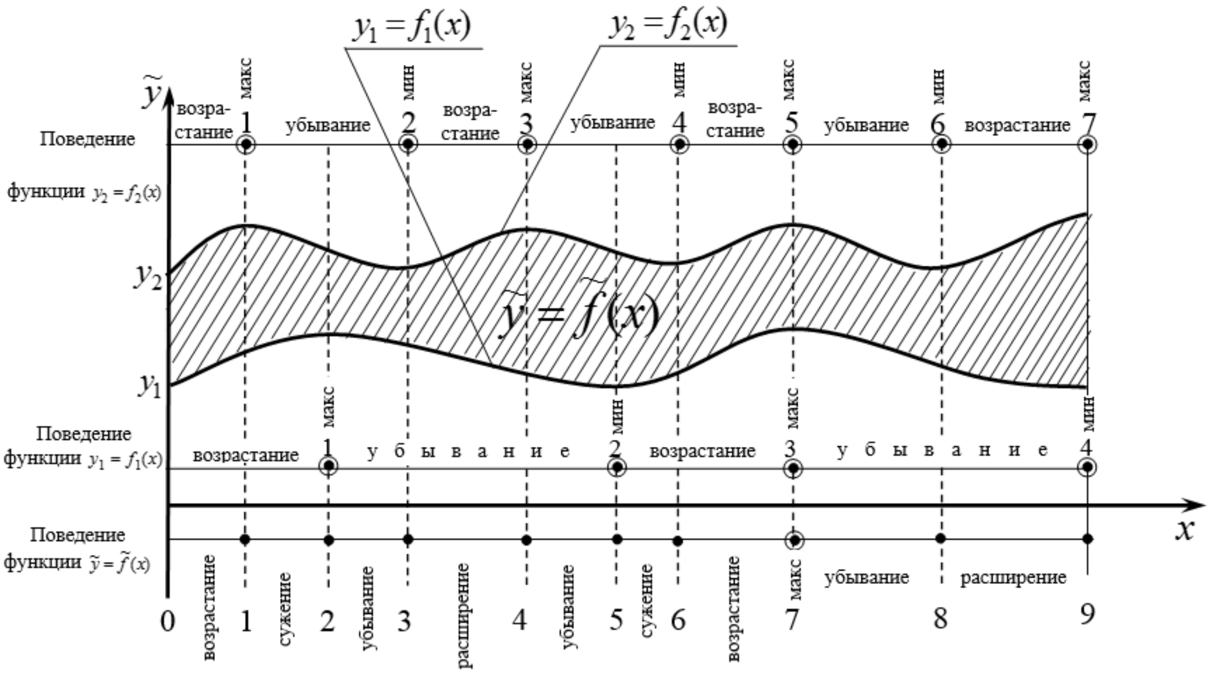

Рис. 1. График интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$

После выполнения шага 6 заполняют четвертую строку сводной таблицы поведения и на этом анализ поведения заданной интервальной функции заканчивается. Характерный возможный вид четвертой строки сводной таблицы поведения интервальной функции показан в табл. 1. По результатам анализа можно вычертить график интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ (см. рис. 1).

Заключение

В настоящей статье разработаны систематические методы решения задач расчета и анализа поведения недетерминированных функций интервального типа, в которых функции определяются с точностью до интервала возможных значений. В качестве математического аппарата использованы интервальная алгебра и дифференциальные характеристики верхней и нижней границ изучаемых интервальных функций, которые можно рассматривать как специальное дифференциальное исчисление для неточно задаваемых функций интервального типа. Использование разработанных методов и математического аппарата позволило достичь поставленной в работе цели – устранение противоречия между новыми сложными задачами и существующими, не пригодными для их решения подходами.

Литература

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Физматлит, 2001.

2. Левин В. И. Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления // Онтология проектирования. 2012. № 4.

3. Милн В. Э. Численный анализ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1980.

4. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М: Мир, 1987.

5. Левин В. И. Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности. – Пенза: Изд-во Пензенского технолог. ин-та, 1999. – 101 с.

6. Левин В. И. Оптимизация в условиях интервальной неопределенности. Метод детерминизации // Автоматика и вычислительная техника. 2012. № 4.

7. Левин В. И. Оптимизация в условиях неопределенности методом детерминизации // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. 2015. № 4 (35).

8. Вересников Г. С. Оптимизация с неопределенными параметрами // Управление развитием крупномасштабных систем. Материалы восьмой международной конференции. – М.: ИПУ РАН. Т.1. – 2015.

9. Гасанов И. И., Ерешко Ф. И. Модели неопределенности при управлении на финансовых рынках // Управление развитием крупномасштабных систем. Материалы восьмой международной конференции. – М.: ИПУ РАН. Т.1. – 2015.

References

1. Fihtengolc G. M. *Kurs differencialnogo i integralnogo ischisleniya* [Course of Differential and Integral Calculus]. Vol. 1. – M.: Fizmatlit, 2001. (in Russian).

2. Levin V. I. *Intervalnaya proizvodnaya i nachala nedeterministskogo differencialnogo ischisleniya* [Interval Derivative and Nondeterministic Differential Calculus] // Ontologiya proektirovaniya. – 2012. – № 4. (in Russian).

3. Milne W. E. *Numerical Calculus*. Princeton, University Press, 1949. – 393 p.

4. Alefeld G., Herzberger Ju., *Einführung in die Intervallrechnung* [Introduction to the Interval Computations]. Zürich, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1974, 398 p. (in German).

5. Levin V. I. *Intervalnye metody optimizacii sistem v usloviyah neopredelennosti* [Interval Methods of System Optimization in Condition of Uncertainty]. Penza, Penza State Technological Institute Publ., 1999. – 101 p. (in Russian).

6. Levin V. I. Optimization in Terms of Interval Uncertainty. The Determination Method. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2012, vol. 46, no. 4, pp. 157-163.

7. Levin V. I. Optimization in Condition of Uncertainty with Determination Method. *Radio Electronics. Computer Science. Control*, 2015, no.3. (in Russian).

8. Veresnikov G. S. Optimization with indefinite parameters. *Managing the development of large-scale systems. Proceedings of the eighth international conference*. Moscow, IC RAS, 2015, Vol. 1. (in Russian).

9. Gasanov I. I., Ereshko F. I. Models of uncertainty in the management of the financial markets. *Managing the development of large-scale systems. Proceedings of the eighth international conference*. Moscow, IC RAS, 2015, Vol. 1. (in Russian).

Информация об авторах

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Analysis of Interval Functions by Methods of Interval Differential Calculus

V. I. Levin

Relevance. *The existing approaches to the calculation, analysis, synthesis and optimization of systems in conditions of uncertainty. The studying of uncertain systems is formulated in the form of tasks of calculation, analysis and synthesis of various nondeterministic functions with parameters that serve as the respective characteristics of these systems. These problems are much more difficult their deterministic counterparts which should be solved in the study of systems with deterministic (exactly known) parameters. Complication is due to the fact that the algebra of undetermined numbers more complicated than algebra of deterministic numbers.* ***The purpose.*** *This article is formulated and described in detail the problem of calculating and analyzing the behavior of a particular function which is not fully given (only up to a range of values).* ***Method.*** *To solve this problem there is provided a method of determination, which reduces the problem to the two same – for the upper and lower boundary functions of the original incompletely defined function. In this method we use the apparatus of interval mathematics and interval-differential calculus. We distinguish different types of possible behavior of interval functions (consistency, increase, decrease, expansion, restriction) and various types of extreme points of functions (on a sample, the maximum point, a minimum point, the point of maximum extension, the minimum extension point).* ***Novelty.*** *Theorems for defining the areas of the different behavior of interval functions and terms with various kinds of extreme are proved.* ***Result****. We considered in detail and illustrated by example the work of the proposed algorithm of determination for analyzing the behavior of interval functions.*

Keywords: *optimization, uncertainty, exactly determined function, interval function, analysis of behavior of interval functions.*

Information about Author

Vitaly Ilich Levin – Doctor of Technical Sciences, Full Professor. Honoured Scientist of Russia. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economics, sociology, history; decision making, optimization, recognition, automata theory, reliability theory, history of science, problems of education. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: Russia, 440039, Penza, pr. Baydukova/ Gagarin st., 1a/11.