УДК 62-50; 519.7; 519.8

Интервальная задача оптимизации себестоимости и эффективности продукции

Левин В. И., Немкова Е. А.

Актуальность. *В статье рассмотрены существующие подходы к актуальной проблеме оптимизации себестоимости и эффективности продукции, выпускаемой производственными системами, функционирующими в условиях неопределенности. Дана точная постановка задачи условной оптимизации себестоимости и эффективности продукции производственной системы при интервальной неопределенности параметров целевой функции и ограничений. Целевая функция системы считается нелинейной.* ***Цель статьи.*** *Целью статьи является изложение идеи решения задачи условной нелинейной оптимизации системы при интервальной неопределенности ее параметров. Эта идея основана на правилах математической теории сравнения интервалов, позволяющих заменить сравнение интервалов и выделением большего (меньшего) интервала сравнением их нижних и верхних границ и выделение большей (меньшей) границы.* ***Используемые методы.*** *На базе изложенной идеи сформулирован и обоснован метод детерминизации решения задачи условной нелинейной оптимизации при интервальной неопределенности параметров оптимизируемой системы путем ее сведения к двум полностью определенным задачам условной оптимизации того же типа.* ***Новизна.*** *Сформулировано и доказано предложение, определяющее решение задачи условной нелинейной оптимизации при интервальной неопределенности параметров оптимизируемой системы через решения двух полностью определенных задач оптимизации того же типа. Также сформулирована и доказана теорема, определяющая необходимое и достаточное условие существования решения задачи условной нелинейной оптимизации при интервальной неопределенности ее параметров.* ***Результат.*** *Построен алгоритм решения задачи условной нелинейной оптимизации при интервальной неопределенности параметров оптимизируемой системы, который основан на методе детерминизации. Приведен пример работы алгоритма. Проведено сравнение предложенного подхода к решению задач условной нелинейной оптимизации с другими подходами. Указаны достоинства и недостатки различных подходов.*

Ключевые слова: *нелинейная оптимизация, неопределенность, оптимизация при интервальной неопределенности, метод детерминизации.*

Введение

Метод математической детерминизации как эффективный метод решения задач условной оптимизации при наличии интервальной неопределенности, подробно описанный в литературе, в последние два десятилетия уже неоднократно применялся для решения различных конкретных классов задач условной оптимизации при наличии интервальной неопределенности, таких как задача о назначениях, общая и булева задачи линейного математического программирования, задачи теории антагонистических игр и некоторые другие [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8].

В настоящей статье рассмотрены и решены методом математической детерминизации некоторые новые классы задач условной оптимизации при наличии интервальной неопределенности, связанные с математическим моделированием и оптимизацией производственных систем. Рассмотрение строится вокруг задачи дробно-линейного математического программирования, в терминах которой можно моделировать формирование удельной себестоимости и удельной эффективности продукции производственных систем и оптимизировать эти два показателя.

1. Постановка задачи

Предположим, что для производства n видов изделий в производственной системе используется m видов оборудования. Известно, что в данной производственной системе время обработки j-го изделия на i-м оборудовании составляет a_{ij}. Пусть также известны ограничения на время использования каждого i-го вида оборудования b_i, затраты c_j на производство одного изделия каждого j-го вида и эффективность d_j использования одного изделия каждого j-го вида. Необходимо составить такой план производства изделий $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, чтобы себестоимость получения единицы эффективности выпускаемых изделий была минимальной. Здесь x_j - план производства j-го изделия. Эта задача, связанная с производственной системой, приводит к математической задаче дробно-линейного математического программирования детерминированного типа, т.е. с полностью определенными параметрами c_j, d_j, b_i, a_{ij} [6, 11]. А именно, в принятых обозначениях сумма $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ показывает суммарные затраты на производство планового количества всех изделий, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ – суммарную эффективность использования всех изделий, произведенных по плану, а сумма $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j$ – суммарное время использования оборудования i-го вида, необходимое для производства планового количества всех изделий. Ясно, что тогда дробь $\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}$ показывает себестоимость единицы эффективности выпускаемых изделий, другими словами, удельную себестоимость эффективности этих изделий.

Итак, общая детерминированная задача дробно-линейного математического программирования определяет задачу оптимизации удельной себестоимости продукции производственной системы. Эта задача состоит в нахождении минимального значения дробно-линейной целевой функции

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \qquad (1)$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ (i = \overline{1,m}), \ \ x_j \ge 0, \ (j = \overline{1,n}), \qquad (2)$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} - некоторые постоянные положительные числа. В задаче предполагается, что знаменатель целевой функции $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ всегда неотрицателен и, кроме того, не равен 0 в области неотрицательных решений системы линейных неравенств (2).

Если поменять местами смысл коэффициентов c_j и d_j в (1), т.е. понимать под c_j эффективность использования одного изделия *j*-го вида, а под d_j - затраты на производство одного изделия *j*-го вида, то функция (1) приобретает смысл удельной эффективности выпускаемых изделий, приходящейся на единицу затрат, связанных с производством изделий, которую нужно максимизировать. При этом получаем двойственную к предыдущей общую задачу дробно-линейного программирования: найти максимальное значение дробно-линейной целевой функции (1) при ограничениях (2) с положительными коэффициентами c_j, d_j, b_i, a_{ij} и всегда неотрицательным знаменателем целевой функции, который вдобавок не равен 0 в области неотрицательных решений системы линейных неравенств (2). Методы решения обеих сформулированных версий общей задачи дробно-линейного математического программирования однотипны. Поэтому ниже рассматривается решение только одной версии этой задачи – максимизации дробно-линейной функции (1) при линейных ограничениях (2).

Изложим кратко основные сведения из теории решения детерминированных задач линейного и дробно-линейного математического программирования [7]. Как известно, многогранником в *n*-мерном пространстве называется замкнутое, выпуклое и ограниченное множество точек *n*-мерного пространства с конечным числом угловых точек. В частности, в случае двух переменных (*n*=2) многогранник превращается в плоский многоугольник. Угловой точкой многогранника называется точка, которая не является выпуклой линейной комбинацией каких-либо (различных) точек указанного множества. Как и в случае основной задачи линейного программирования, имеющей, как известно, линейную целевую функцию и систему линейных неравенств-ограничений, свое максимальное значение дробно-линейная целевая функция (1) принимает в одной из вершин многогранника возможных (допустимых) решений, определяемого системой линейных ограничений (2). Если же максимальное значение целевая функция (1) принимает более, чем в одной вершине многогранника допустимых решений (2), то она достигает его также во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин. Приведенные сведения в принципе позволяют решать детерминированные задачи дробно-линейного математического программирования невысокой размерности *m* методом перебора.

Рассмотрим теперь недетерминированный (интервальный) вариант задачи дробно-линейного математического программирования, состоящий в определении максимального значения дробно-линейной функции (1) при линейных ограничениях (2), в предположении, что положительные коэффициенты функций в (1), (2) известны неточно и задаются лишь с точностью до положительных интервалов их возможных значений

$$\tilde{c}_j = [c_{j1}, c_{j2}],\ \tilde{d}_j = [d_{j1}, d_{j2}],$$
$$\tilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}],\ \tilde{a}_{ij} = [a_{ij1}, a_{ij2}],\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \quad (3)$$

Этот вариант задачи дробно-линейного математического программирования позволяет выполнить моделирование и оптимизацию удельной себестоимости (удельной эффективности) недетерминированной производственной системы с указанными интервальными параметрами. Сформулированный вариант интервальной задачи дробно-линейного математического программирования является частным случаем сформулированной в [4] общей интервальной задачи условной оптимизации.

2. Алгоритм математического моделирования и оптимизации себестоимости (эффективности) продукции производственных систем с двумя видами выпускаемых изделий

Метод решения сформулированной в п. 1 интервальной задачи дробно-линейного математического программирования, позволяющий моделировать и оптимизировать формирование удельной себестоимости (удельной эффективности) продукции производственной системы, базируется на методе математической детерминизации, являющемся общим методом решения произвольных интервальных задач условной оптимизации [4]. Этот метод будет продемонстрирован ниже на примере задачи с $n = 2$ переменными, позволяющей моделировать и оптимизировать формирование удельной себестоимости (удельной эффективности) производственной системы с $n = 2$ изделиями. Такая задача звучит следующим образом: найти максимальное значение интервальной дробно-линейной целевой функции

$$\tilde{F} = \frac{\tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2}{\tilde{d}_1 x_1 + \tilde{d}_2 x_2} \quad (4)$$

при линейных интервальных ограничениях

$$\tilde{\varphi}_i \equiv \tilde{a}_{i1} x_1 + \tilde{a}_{i2} x_2 \le \tilde{b}_i,\ (i = \overline{1,m}),\ \ x_1, x_2 \ge 0, \quad (5)$$

в предположении, что коэффициенты целевой функции и ограничений $\tilde{c}_j$, $\tilde{d}_j$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{a}_{ij}$ - интервалы вида $\tilde{c}_j = [c_{j1}, c_{j2}]$, $\tilde{d}_j = [d_{j1}, d_{j2}]$, $\tilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}]$, $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij1}, a_{ij2}]$, в которых $c_{j1}, d_{j1}, a_{ij1}, b_{i1}$ - минимальные значения интервальных коэффициентов (нижние границы интервалов), а $c_{j2}, d_{j2}, a_{ij2}, b_{i2}$ - максимальные значения интервальных коэффициентов (верхние границы интервалов). Будем считать, что знаменатель целевой функции (4) всегда неотрицателен и, кроме того, не равен 0 в области неотрицательных решений системы линейных неравенств (5).

Начнем с решения базовой детерминированной задачи дробно-линейного математического программирования, которая в нашем случае звучит так: найти максимальное значение детерминированной дробно-линейной целевой функции

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2}, \qquad (6)$$

при детерминированных линейных ограничениях

$$\phi_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \; i = \overline{1,m}, \; x_1, x_2 \ge 0, \qquad (7)$$

в предположении, что знаменатель целевой функции (6) всегда неотрицателен и, кроме того, не равен 0 в области неотрицательных решений системы линейных неравенств (7).

Чтобы найти решение поставленной детерминированной задачи оптимизации (6), (7), сначала находим известными методами решение ее системы линейных ограничений (7), что дает многоугольник допустимых решений задачи. Далее полагаем значение целевой функции (6) равным некоторому фиксированному числу h_0. Получаем соответствующую фиксированную прямую, проходящую через начало координат. Вращая построенную прямую вокруг начала координат, получаем множество всех прямых, проходящих через начало координат и имеющих различные возможные значения параметра h_0. Из этих прямых определяем экстремальную – ту, которая находится в пределах многоугольника допустимых решений и имеет максимальное значение параметра h_0 среди всех прямых, находящихся в указанных пределах.

Согласно теории [7], экстремальная прямая, если она существует, имеет общую точку с многоугольником допустимых решений в одной из его угловых вершин. Таким образом, вращая построенную прямую вокруг начала координат, мы либо находим вершину (вершины) многоугольника допустимых решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение (т.е. находим решение задачи условной оптимизации (6), (7)), либо устанавливаем отсутствие решения (в случае, если вращаемая прямая не имеет общих точек с многоугольником допустимых решений в его угловых точках).

Итак, алгоритм нахождения решения детерминированной задачи дробно-линейного математического программирования включает следующие шаги:

1. В системе ограничений задачи (7) знаки неравенств заменяются на знаки точных равенств и строятся определяемые этими равенствами прямые.
2. Находятся полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи.
3. Находится многоугольник допустимых решений задачи в виде пересечения полуплоскостей, найденных на шаге 2.
4. Строится прямая, уравнение которой получается, если положить значение целевой функции (6) равным некоторому постоянному числу h_0.
5. Вращая построенную прямую вокруг начала координат (т. е. меняя значение h_0), определяем точку максимума целевой функции, т. е. точку, в которой $h_0 = \max$, или, если ее нет, устанавливаем неразрешимость задачи.

Теперь перейдем к решению собственно интервальной задачи дробно-линейного математического программирования (4), (5). Будем решать поставленную интервальную задачу методом математической детерминизации, т.е. сведением к двум аналогичным детерминированным задачам [12].

Используем алгоритм решения, приведенный в [10]. Применительно к рассматриваемой задаче он конкретизируется следующим образом [9, 12].

Шаг 1. Используя формулы интервальной математики, выражающие результаты элементарных преобразований интервалов, представляем целевую функцию $\tilde{F}$, функции ограничений $\tilde{\phi}_i$ и параметры $\tilde{b}_i$ решаемой задачи (4), (5) в виде интервалов

$$\begin{aligned} &\tilde{F} = [F_1, F_2]; \\ &\tilde{\phi}_i = [\phi_{i1}, \phi_{i2}], i = \overline{1,m}; \\ &\tilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}], i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Так как целевая функция $\tilde{F}$ является нелинейной и представляет собой отношение двух линейных функций с положительными коэффициентами и неотрицательными переменными (4) , то нижняя граничная функция F_1 целевой функции $\tilde{F}$ будет получена при замене всех интервальных коэффициентов числителя целевой функции их нижними границами, а всех интервальных коэффициентов знаменателя целевой функции их верхними границами. Верхняя граничная функция F_2 целевой функции $\tilde{F}$ будет получена при замене всех интервальных коэффициентов числителя целевой функции их верхними границами, а всех интервальных коэффициентов знаменателя целевой функции их нижними границами.

Таким образом, получаем выражения указанных граничных функций F_1 и F_2 в виде

$$\begin{aligned} &F_1 = \frac{c_{11}x_1 + c_{21}x_2}{d_{12}x_1 + d_{22}x_2}, \\ &F_2 = \frac{c_{12}x_1 + c_{22}x_2}{d_{11}x_1 + d_{21}x_2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Далее, так как произвольная *i*-я функция ограничений $\tilde{\phi}_i$ является линейной функцией с положительными коэффициентами и неотрицательными переменными (5), то ее нижняя граничная функция ϕ_{i1} и верхняя граничная функция ϕ_{i2} получаются в виде следующих выражений:

$$\phi_{i1} = a_{i11}x_1 + a_{i21}x_2 \ , \ \phi_{i2} = a_{i12}x_1 + a_{i22}x_2 \, , \ i = \overline{1,m}\,. \tag{10}$$

Итак, интервальная форма максимизируемой дробно-линейной целевой функции $\tilde{F}$ решаемой интервальной задачи дробно-линейного математического программирования (4), (5) имеет вид интервала (8), нижняя и верхняя границы которого выражаются формулами (9), т.е.

$$\tilde{F} = \left[F_1 = \frac{c_{11}x_1 + c_{21}x_2}{d_{12}x_1 + d_{22}x_2}, F_2 = \frac{c_{12}x_1 + c_{22}x_2}{d_{11}x_1 + d_{21}x_2} \right]. \tag{11}$$

Аналогично, интервальная форма произвольной *i*-й функции ограничений $\tilde{\phi}_i$ решаемой задачи имеет вид интервала (8), нижняя и верхняя границы которого выражаются формулами (10), т.е. имеют вид

$$\tilde{\varphi}_i = [\varphi_{i1} = a_{i11}x_1 + a_{i21}x_2, \varphi_{i2} = a_{i12}x_1 + a_{i22}x_2],\ i = \overline{1, m}. \quad (12)$$

Шаг 2. Используя полученные на шаге 1 интервальные представления (8) целевой функции $\tilde{F}$, функций ограничений $\tilde{\phi}_i$ и параметров ограничений $\tilde{b}_i$, формируем нижнюю и верхнюю граничные задачи решаемой интервальной задачи дробно-линейного математического программирования (4), (5):

$$\left.\begin{aligned} & F_1(x_1,x_2) \equiv \frac{c_{11}x_1 + c_{21}x_2}{d_{12}x_1 + d_{22}x_2} = \max, \\ & \phi_{i1}(x_1,x_2) = a_{i11}x_1 + a_{i21}x_2 \le b_{i1}, i = \overline{1,m}, \\ & \phi_{i2}(x_1,x_2) = a_{i12}x_1 + a_{i22}x_2 \le b_{i2}, i = \overline{1,m}, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}\right\} \text{ – нижняя граничная задача,} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} & F_2(x_1,x_2) \equiv \frac{c_{12}x_1 + c_{22}x_2}{d_{11}x_1 + d_{21}x_2} = \max, \\ & \phi_{i1}(x_1,x_2) = a_{i11}x_1 + a_{i21}x_2 \le b_{i1}, i = \overline{1,m}, \\ & \phi_{i2}(x_1,x_2) = a_{i12}x_1 + a_{i22}x_2 \le b_{i2}, i = \overline{1,m}, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}\right\} \text{ – верхняя граничная задача.} \quad (14)$$

Шаг 3. Используя известный метод решения детерминированных задач условной оптимизации, находим решения нижней $\{M_н(x), F_{1,\max}\}$ и верхней $\{M_в(x), F_{2,\max}\}$ граничных задач. Здесь $M_н(x)$ - множество точек решения $x = (x_1, x_2)$ нижней граничной задачи (в них целевая функция этой задачи F_1 достигает максимума $F_{1,\max}$), а $M_в(x)$ - множество точек решения $x = (x_1, x_2)$ верхней граничной задачи (в них целевая функция этой задачи F_2 достигает максимума $F_{2,\max}$).

Шаг 4. Выбирая в качестве точки решения интервальной задачи (4), (5) любую точку $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ из пересечения множеств $M_н(x)$ и $M_в(x)$ точек решения нижней и верхней граничных задач и беря в качестве нижней границы интервала-максимума $\tilde{F}_{\max}$ интервальной целевой функции $\tilde{F}$ этой задачи максимум $F_{1,\max}$ целевой функции нижней граничной задачи, а в качестве верхней границы того же интервала - максимума $\tilde{F}_{\max}$ - максимум $F_{2,\max}$ целевой функции верхней граничной задачи, получаем полное решение интервальной задачи дробно-линейного математического программирования (4), (5) в виде

$$\{x^* \in M_н(x) \cap M_в(x), \tilde{F}_{\max} = [F_{1,\max}, F_{2,\max}]\}. \quad (15)$$

3. Пример решения задачи моделирования и оптимизации себестоимости (эффективности) продукции производственной системы с двумя видами выпускаемых изделий

Найдем максимальное значение интервальной дробно-линейной функции

$$\tilde{F} = \frac{\tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2}{\tilde{d}_1 x_1 + \tilde{d}_2 x_2} \tag{16}$$

при интервальных линейных ограничениях

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1 &= \tilde{a}_{11} x_1 + \tilde{a}_{12} x_2 \le \tilde{b}_1 \\ \tilde{\phi}_2 &= \tilde{a}_{21} x_1 + \tilde{a}_{22} x_2 \le \tilde{b}_2 \\ \tilde{\phi}_3 &= \tilde{a}_{31} x_1 + \tilde{a}_{32} x_2 \le \tilde{b}_3 \end{aligned} \tag{17}$$

Интервальные коэффициенты в целевой функции (16) и ограничениях (17) таковы: $\tilde{c}_1 = [2,4]$, $\tilde{c}_2 = [3,5]$, $\tilde{d}_1 = [1,3]$, $\tilde{d}_2 = [1,4]$, $\tilde{a}_{11} = [2,3]$, $\tilde{a}_{12} = [8,12]$, $\tilde{b}_1 = [26,48]$, $\tilde{a}_{21} = [1,2]$, $\tilde{a}_{22} = [1,2]$, $\tilde{b}_2 = [4,6]$, $\tilde{a}_{31} = [12,16]$, $\tilde{a}_{32} = [3,4]$, $\tilde{b}_3 = [39,56]$, переменные x_1 и x_2 могут принимать только неотрицательные значения.

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в определении неотрицательного решения системы трех интервальных линейных неравенств (17), при котором достигается максимум интервальной дробно-линейной функции двух переменных $\tilde{F}$ (16). Содержательный смысл данной задачи заключается в максимизации удельной (приходящейся на единицу затрат) эффективности продукции некоторой производственной системы с двумя видами выпускаемых изделий путем оптимизации ее плана выпуска $x = (x_1, x_2)$. При этом удельная эффективность продукции системы описывается выражением (16) в виде интервальной дробно-линейной функции $\tilde{F}$, а ограничения на время использования каждого i-го вида производственного оборудования системы – i-м неравенством (17) (подробнее см. п. 1).

Для решения задачи будет применен описанный выше алгоритм [11].

Шаг 1. Представляем целевую функцию $\tilde{F}$ и функции ограничений $\tilde{\phi}_i$, $i = \overline{1,3}$, решаемой задачи в интервальной форме. По формулам (8)–(12) получаем:

$$\tilde{F} = [F_1, F_2], \text{ где } F_1 = \frac{2x_1 + 3x_2}{3x_1 + 4x_2}, \; F_2 = \frac{4x_1 + 5x_2}{x_1 + x_2};$$

$$\tilde{\phi}_1 = [\phi_{11}, \phi_{12}], \text{ где } \phi_{11} = 2x_1 + 8x_2, \; \phi_{12} = 3x_1 + 12x_2;$$

$$\tilde{\phi}_2 = [\phi_{21}, \phi_{22}], \text{ где } \phi_{21} = x_1 + x_2, \; \phi_{22} = 2x_1 + 2x_2;$$

$$\tilde{\phi}_3 = [\phi_{31}, \phi_{32}], \text{ где } \phi_{31} = 12x_1 + 3x_2, \; \phi_{32} = 16x_1 + 4x_2.$$

Шаг 2. Формируем нижнюю и верхнюю граничные задачи решаемой интервальной задачи. Используя имеющиеся интервальные представления целевой функции $\tilde{F}$, функций ограничений $\tilde{\phi}_i$, $i = \overline{1,3}$, и параметров ограничений $\tilde{b}_i$, $i = \overline{1,3}$, по формулам (13), (14) получаем

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1,x_2) \equiv \dfrac{2x_1+3x_2}{3x_1+4x_2} = \max, \\ \phi_{11}(x_1,x_2) = 2x_1+8x_2 \le 26, \\ \phi_{12}(x_1,x_2) = 3x_1+12x_2 \le 48, \\ \phi_{21}(x_1,x_2) = x_1+x_2 \ge 4, \\ \phi_{22}(x_1,x_2) = 2x_1+2x_2 \ge 6, \\ \phi_{31}(x_1,x_2) = 12x_1+3x_2 \le 39, \\ \phi_{32}(x_1,x_2) = 16x_1+4x_2 \le 56, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}\right\} \text{– нижняя граничная задача,}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_2(x_1,x_2) \equiv \dfrac{4x_1+5x_2}{x_1+x_2} = \max, \\ \phi_{11}(x_1,x_2) = 2x_1+8x_2 \le 26, \\ \phi_{12}(x_1,x_2) = 3x_1+12x_2 \le 48, \\ \phi_{21}(x_1,x_2) = x_1+x_2 \ge 4, \\ \phi_{22}(x_1,x_2) = 2x_1+2x_2 \ge 6, \\ \phi_{31}(x_1,x_2) = 12x_1+3x_2 \le 39, \\ \phi_{32}(x_1,x_2) = 16x_1+4x_2 \le 56, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}\right\} \text{– верхняя граничная задача.}$$

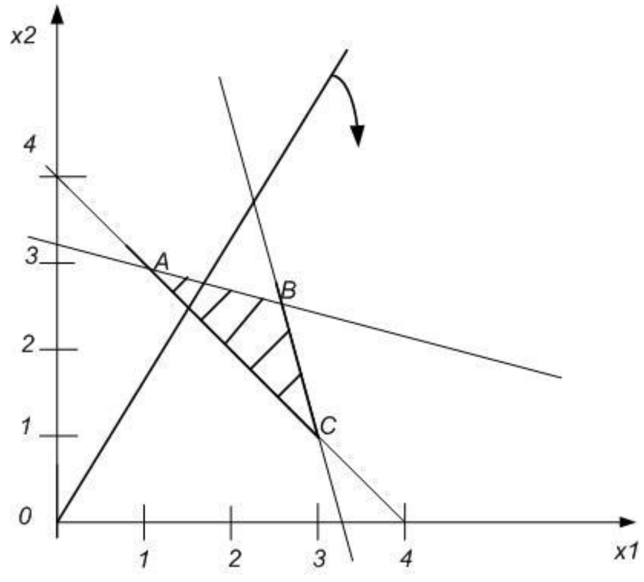

Рис. 1. Многоугольник допустимых решений

Шаг 3. Найдем решение нижней граничной задачи $\{M_н(x), F_{1,\max}\}$. Здесь $M_н(x)$ - множество точек решения $x=(x_1,x_2)$ этой задачи – в них целевая функция задачи F_1 достигает максимума $F_{1,\max}$. Начинаем с построения многоугольника допустимых решений. Решая систему 6 неравенств-ограничений задачи, получаем этот многоугольник в виде треугольника ABC (рис. 1). Теперь находим точки многоугольника, в которых $F_1 = F_{1,\max}$. Для этого зададим значение целевой функции F_1 равным некоторому постоянному числу h_0:

$$F_1 = \frac{2x_1 + 3x_2}{3x_1 + 4x_2} = h_0.$$

Пусть, например, $h_0 = 1$, тогда получим уравнение $2x_1 + 3x_2 = 3x_1 + 4x_2$ или $x_2 = -x_1$, что задает некоторую прямую на плоскости, проходящую через начало координат. Изменяя значения h_0, получим другие прямые, проходящие через начало координат и отличающиеся друг от друга углом наклона. Этот процесс равносилен вращению прямой. Будем вращать прямую вокруг начала координат в направлении движения часовой стрелки. Этому вращению соответствует уменьшение угла наклона прямой и, как следствие, уменьшение значения h_0. Поэтому следует остановить вращение, как только будет достигнута первая общая точка вращаемой прямой и многоугольника допустимых решений. Эта точка и дает максимум функции F_1. В данном случае максимум целевой функции F_1 находится в точке $A(1;\ 3)$, а максимальное значение целевой функции равно $F_{1,\max} = 11/15$. Других точек максимума у функции F_1 нет.

Решим теперь верхнюю граничную задачу. Так как система ограничений этой задачи такая же, как и в нижней граничной задаче, ее многоугольник допустимых решений опять дается треугольником ABC на рис. 1. Найдем точки многоугольника, в которых целевая функция задачи достигает максимума $F_2 = F_{2,\max}$. Действуем, как в случае нижней граничной задачи. Некоторому постоянному числу зададим значение целевой функции F_2 верхней граничной задачи равным h_0

$$F_2 = \frac{4x_1 + 5x_2}{x_1 + x_2} = h_0.$$

Пусть, например, $h_0 = 1$, тогда получим уравнение $4x_1 + 5x_2 = x_1 + x_2$ или $4x_2 = -3x_1$, что задает некоторую прямую на плоскости, проходящую через начало координат. Аналогично предыдущему, будем вращать прямую вокруг начала координат в направлении движения часовой стрелки. Первая общая точка вращаемой прямой и многоугольника допустимых решений даст максимум $F_{2,\max}$ целевой функции F_2. В нашем случае максимум целевой функции F_2 оказывается в той же точке $\mathrm{A}(1, 3)$, что и максимум целевой функции нижней граничной задачи F_1. Достигаемое в этой точке максимальное значение целевой функции верхней граничной задачи равно $F_{2,\max} = 19/4$. Других точек максимума у функции F_2 нет.

Шаг 4. В качестве точки решения интервальной задачи (16), (17) берем единственную общую точку множеств точек решения нижней и верхней граничных задач, т.е. точку $x^* = A(1,\ 3)$, а в качестве интервального максимума $\tilde{F}_{\max}$ интервальной целевой функции этой задачи $\tilde{F}$ - интервал

$\tilde{F}_{\max} = [F_{1,\max}, F_{2,\max}]$, составленный из максимальных значений $F_{1,\max} = 11/15$, $F_{2,\max} = 19/4$ целевых функций F_1, F_2 ее нижней и верхней граничных задач, достигаемых в общей точке максимума x^*. Таким образом, решение интервальной задачи дробно-линейного математического программирования (16), (17)

$$\{x^* = (1{,}3), \tilde{F}_{\max} = [11/15{,}19/4]\}. \tag{18}$$

Методика решения интервальной задачи дробно-линейного математического программирования, основанная на методе математической детерминизации – общем методе решения произвольных интервальных задач условной оптимизации – была изложена выше на примере задачи с двумя переменными. Наличие лишь двух переменных существенно облегчало представление и решение данной задачи путем ее геометрической интерпретации. Однако в общем случае, при произвольном числе переменных *n*, геометрическое представление и решение задачи дробно-линейного математического программирования не представляется возможным. В связи с этим возникает необходимость аналитического представления и решения указанной задачи.

4. Алгоритм математического моделирования и оптимизации себестоимости (эффективности) продукции производственных систем с произвольным числом выпускаемых изделий

Как уже говорилось выше (см. п. 1), общая задача дробно-линейного математического программирования в детерминированной постановке при произвольном числе переменных *n*, состоит в нахождении максимального значения дробно-линейной функции

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \tag{19}$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}),\; x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,n}), \tag{20}$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} – некоторые постоянные положительные числа. Также предполагается, что знаменатель целевой функции $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ всегда неотрицателен и кроме того, не равен 0 в области неотрицательных решений системы линейных уравнений (20). Решение этой задачи имеет своей целью максимизировать удельную эффективность выпускаемых изделий, приходящуюся на единицу затрат, связанных с производством изделий.

Рассмотрим теперь общий недетерминированный (интервальный) вариант задачи (19), (20), состоящий в определении максимального значения интервального обобщения детерминированной целевой функции (19), т.е. интервальной дробно-линейной целевой функции

$$\tilde{F} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j x_j}, \tag{21}$$

при линейных интервальных ограничениях

$$\tilde{\phi}_i \equiv \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i \quad (i = \overline{1,m}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{22}$$

где коэффициенты целевой функции и ограничений $\tilde{c}_j$ и $\tilde{d}_j$ $\tilde{b}_i$, $\tilde{a}_{ij}$ - интервалы вида $\tilde{c}_j = [c_{j1}, c_{j2}]$, $\tilde{d}_j = [d_{j1}, d_{j2}]$, $\tilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}]$, $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij1}, a_{ij2}]$, в которых c_{j1}, d_{j1}, a_{ij1}, b_{i1} – минимальные значения интервальных коэффициентов (нижние границы интервалов), а c_{j2}, $d_{j2}\, a_{ij2}$, b_{i2} - максимальные значения интервальных коэффициентов (верхние границы интервалов). Будем считать, что знаменатель целевой функции (21) всегда неотрицателен и, кроме того, не равен 0 в области неотрицательных решений системы линейных неравенств (22).

Аналогично случаю $n = 2$ (см. п. 2) будем решать поставленную интервальную задачу методом математической детерминизации, т.е. сведением к двум аналогичным детерминированным задачам. При этом алгоритм решения задачи в случае $n = 2$ переменных, приведенный в п. 4, сохраняется. Однако конкретные выражения целевых функций и функций ограничений изменяются, в связи с возможностью произвольного числа переменных n.

Алгоритм решения общей интервальной задачи дробно-линейного математического программирования (21), (22) с произвольным числом переменных n выглядит следующим образом [9, 10].

Шаг 1. Используя формулы интервальной математики, выражающие элементарные преобразования интервалов [9, 10], выразим интервальные целевую функцию $\tilde{F}$, функции ограничений $\tilde{\phi}_i$ и параметры $\tilde{b}_i$ решаемой задачи (21), (22) в интервальной форме

$$\begin{aligned} &\tilde{F} = [F_1, F_2]; \\ &\tilde{\phi}_i = [\phi_{i1}, \phi_{i2}], i = \overline{1,m}; \\ &\tilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}], i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{23}$$

Так как интервальная целевая функция $\tilde{F}$ является нелинейной и представляет собой отношение двух линейных функций с положительными коэффициентами и неотрицательными переменными (21), то ее нижняя граничная функция F_1 может быть получена при замене всех интервальных коэффициентов числителя целевой функции их нижними границами, а всех интервальных коэффициентов знаменателя целевой функции их верхними границами. Верхняя граничная функция F_2 целевой функции $\tilde{F}$ может быть получена при замене всех интервальных коэффициентов числителя целевой функции их верхними границами, а всех интервальных коэффициентов знаменателя целевой функции их нижними границами.

Таким образом, получаем выражения указанных функций в виде

$$F_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{j1} x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_{j2} x_j}, \quad F_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{j2} x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_{j1} x_j}. \tag{24}$$

Далее, так как произвольная интервальная i-ая функция ограничений $\tilde{\phi}_i$ есть линейная функция с положительными коэффициентами и неотрицательными переменными (22), то ее нижняя ϕ_{i1} и верхняя ϕ_{i2} граничные функции имеют вид следующих выражений

$$\phi_{i1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij1} x_j, \quad \phi_{i2} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij2} x_j, \quad i = \overline{1,m}. \tag{25}$$

Таким образом, интервальная форма максимизируемой целевой функции $\tilde{F}$ решаемой задачи (21), (22) имеет вид интервала (23), нижняя и верхняя границы которого выражаются формулами (24), т.е. имеет вид

$$\tilde{F} = \left[F_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{j1} x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_{j2} x_j}, F_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{j2} x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_{j1} x_j} \right]. \tag{26}$$

Аналогично, интервальная форма произвольной i-й функции ограничений $\tilde{\phi}_i$ решаемой задачи имеет вид интервала (23), нижняя и верхняя границы которого выражаются формулами (25), т.е. имеют вид

$$\tilde{\phi}_i = \left[\phi_{i1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij1} x_j, \phi_{i2} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij2} x_j \right], \quad i = \overline{1,m}. \tag{27}$$

Шаг 2. Используя полученные на шаге 1 интервальные представления целевой функций $\tilde{F}$, функции ограничения $\tilde{\phi}_i$ и параметров ограничений $\tilde{b}_i$, строим нижнюю и верхнюю граничные задачи решаемой задачи (21), (22):

$$\left.\begin{aligned} & F_1(x_1,\dots,x_n) \equiv \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{j1} x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_{j2} x_j} = \max, \\ & \phi_{i1}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij1} x_j \le b_{i1}, i = \overline{1,m}, \\ & \phi_{i2}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij2} x_j \le b_{i2}, i = \overline{1,m}, \\ & x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} \end{aligned}\right\} \text{– нижняя граничная задача,} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned}
&F_2(x_1,...,x_n) \equiv \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{j2} x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_{j1} x_j} = \max,\\
&\phi_{i1}(x_1,...,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij1} x_j \le b_{i1}, i = \overline{1,m},\\
&\phi_{i2}(x_1,...,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij2} x_j \le b_{i2}, i = \overline{1,m},\\
&x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.
\end{aligned}\right\} \text{– верхняя граничная задача.} \qquad (29)$$

Шаг 3. Используя подходящий метод решения детерминированных задач условной оптимизации, находим решение нижней $\{M_н(x), F_{1,\max}\}$ и верхней $\{M_в(x), F_{2,\max}\}$ граничных задач. Здесь $M_н(x)$ - множество точек решения $x = (x_1,\ldots,x_n)$ нижней граничной задачи, а $F_{1,\max}$ - достигаемое в них максимальное значение целевой функции F_1 этой задачи; $M_в(x)$ - множество точек решения $x = (x_1,\ldots,x_n)$ верхней граничной задачи, а $F_{2,\max}$ - достигаемое в них максимальное значение целевой функции F_2 этой задачи.

Шаг 4. Беря в качестве точки решения интервальной задачи (21), (22) любую точку $x^* = (x_1^*,...,x_n^*)$ из пересечения множеств $M_н(x)$ и $M_в(x)$, в качестве нижней границы интервала-максимума $\tilde{F}_{\max}$ интервальной целевой функции $\tilde{F}$ этой задачи максимум $F_{1,\max}$ целевой функции нижней граничной задачи, а в качестве верхней границы того же интервала-максимума $\tilde{F}_{\max}$ - максимум $F_{2,\max}$ целевой функции верхней граничной задачи, получаем полное решение интервальной задачи дробно-линейного математического программирования (21), (22) в виде

$$\{x^* \in M_н(x) \cap M_в(x), \tilde{F}_{\max} = [F_{1,\max}, F_{2,\max}]\}. \qquad (30)$$

Из приведенного алгоритма следует, что для решения общей интервальной задачи дробно-линейного математического программирования (21), (22) необходимо решить две граничные детерминированные задачи условной оптимизации– нижнюю граничную (28) и верхнюю граничную (29), после чего соединить оба решения в одно согласно (30).

Задача 1 (*нижняя граничная задача*): найти максимум целевой функции (28)

$$F_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{j1} x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_{j2} x_j}, \qquad (31)$$

при линейных ограничениях

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}),\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (32)$$

Эта задача представляет собой усеченный вариант полной нижней граничной задачи (28), в которой исключены m из $2m$ имевшихся в (28) линейных ограничений, что не снижает общности рассмотрения, поскольку все $2m$ ограничений в (28) принадлежат к одному и тому же типу. Сформулированная задача (31), (32) может быть сведена к задаче линейного программирования. Для того чтобы показать это, обозначим

$$y_0 = \left\{ \sum_{j=1}^{n} d_{j2} x_j \right\}^{-1}, \tag{33}$$

и введем новые переменные $y_0, y_1, ..., y_n$ согласно (33) и (34)

$$y_j = y_0 \cdot x_j, \ (j = \overline{1,n}). \tag{34}$$

Используя новые переменные, сведем задачу 1 к следующей новой задаче: найти максимум целевой функции

$$F_1^* = \sum_{j=1}^{n} c_{j1} y_j, \tag{35}$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le b_i y_0, \ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{j2} y_j = 1, \ y_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}), \ y_0 \ge 0. \tag{36}$$

Легко видеть, что задача (35)-(36) является задачей линейного программирования с новыми переменными $y_0, y_1, ..., y_n$. Следовательно, ее решение можно найти соответствующими известными методами решения задач линейного программирования [6]. Найдя оптимальное решение задачи (35)-(36), на основе соотношений (33), (34) получаем оптимальное решение задачи 1. При этом полученное максимальное значение $F_{1,\max}$ целевой функции F_1 задачи 1 - нижней граничной задачи исходной интервальной задачи (21), (22) - является, согласно шагу 4 описанного выше алгоритма, нижней границей искомого интервального максимального значения $\tilde{F}_{\max}$ целевой функции (21) исходной задачи.

Задача 2 (*верхняя граничная задача*)*:* найти максимум целевой функции

$$F_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{j2} x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_{j1} x_j}, \tag{37}$$

при линейных ограничениях

$$\tilde{\phi}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \ (i = \overline{1,m}), \ \ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,n}). \tag{38}$$

Эта задача, аналогично задаче 1 (нижней граничной задаче) является усеченным вариантом полной верхней граничной задачи (29), в котором исключены m из $2m$ имевшихся в (29) линейных ограничений, что не ограничивает общности рассмотрения, так как все $2m$ ограничений в (29) принадлежат к одному и тому же типу. Сформулированная задача (37), (38), как и задача 1, может быть сведена к задаче линейного программирования. Для того, чтобы показать это, обозначим

$$y_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} d_{j1} x_j \right)^{-1}, \tag{39}$$

и введем новые переменные $y_0, y_1, ..., y_n$ согласно (39) и (40)

$$y_j = y_0 \cdot x_j, \ (j = \overline{1,n}). \tag{40}$$

Используя новые переменные, сведем задачу 2 к следующей новой задаче: найти максимум целевой функции

$$F_2^* = \sum_{j=1}^{n} c_{j2} y_j, \tag{41}$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le b_i y_0, \ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{j1} y_j = 1, \ y_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}), \ y_0 \ge 0. \tag{42}$$

Легко видеть, что задача (41), (42) является задачей линейного программирования с новыми переменными $y_0, y_1, ..., y_n$. Эту задачу, как и задачу (35), (36), решаем известными методами решения задач линейного программирования. Найдя оптимальное решение задачи (41), (42), из соотношений (39), (40) получаем оптимальное решение задачи 2. При этом получаем максимальное значение $F_{2,\max}$ целевой функции F_2 задачи 2 - верхней граничной задачи исходной интервальной задачи (21), (22). Это значение является, согласно шагу 4 описанного выше алгоритма, верхней границей искомого интервального максимального значения $F_{\max}$ целевой функции (21) исходной задачи.

Для получения полного решения исходной интервальной задачи дробно-линейного математического программирования (21), (22) необходимо еще иметь множества точек решения $M_н(x)$ и $M_в(x)$ нижней и верхней граничных задач исходной задачи (21), (22). При этом согласно шагу 4 алгоритма в качестве точки решения x^* задачи (21), (22) берется любая точка пересечения множеств $M_н(x)$ и $M_в(x)$, а в качестве соответствующего точке x^* интервального максимума $\tilde{F}_{\max}$ целевой функции $\tilde{F}$ (21) при заданных ограничениях (22) - интервал $\tilde{F}_{\max} = [F_{1,\max}, F_{2,\max}]$, где $F_{1,\max}$ - решение нижней граничной задачи (задачи 1), $F_{2,\max}$ - решение верхней граничной задачи (задачи 2).

5. Пример решения задачи моделирования и оптимизации себестоимости (эффективности) продукции производственной системы с несколькими видами изделий выпускаемой продукции

Найдем максимальное значение интервальной дробно-линейной функции

$$\tilde{F} = \frac{\tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 + \tilde{c}_3 x_3}{\tilde{d}_1 x_1 + \tilde{d}_2 x_2 + \tilde{d}_3 x_3}, \qquad (43)$$

при линейных ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_3 \le 70 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 340 \end{cases}. \qquad (44)$$

Здесь интервальные коэффициенты в целевой функции (43): $\tilde{c}_1 = [8,9]$, $\tilde{c}_2 = [3,5]$, $\tilde{c}_3 = [2,3]$, $\tilde{d}_1 = [1,3]$, $\tilde{d}_2 = [1,4]$, $\tilde{d}_3 = [1,1]$, в то время как коэффициенты в ограничениях (44) – точно заданные числа. Переменные x_j в (44) могут принимать лишь неотрицательные значения.

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в определении неотрицательного решения системы трех линейных неравенств (44), при котором достигается максимум интервальной дробно-линейной функции $\tilde{F}$ (43). Содержательный смысл данной задачи состоит в максимизации удельной (приходящейся на единицу затрат) эффективности продукции производственной системы с тремя видами выпускаемых изделий путем оптимизации плана выпуска $x = (x_1, x_2, x_3)$. При этом удельная эффективность продукции моделируется интервальной дробно-линейной функцией $\tilde{F}$ (43), а ограничения на время использования каждого i-го вида оборудования – i-м неравенством (44) (подробнее см. п. 1)

Для решения задачи применим описанный алгоритм [11]. Решим сначала нижнюю граничную задачу исходной задачи (43), (44) (задача 1). Введем целевую функцию этой задачи F_1 как значение целевой функции $\tilde{F}$ (43) исходной интервальной задачи при нижних границах интервальных коэффициентов $\tilde{c}_i$ ее числителя и верхних границах интервальных коэффициентов $\tilde{d}_i$ ее знаменателя

$$F_1 = \frac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3}{3x_1 + 4x_2 + x_3}. \qquad (45)$$

Далее в ограничениях (44) исходной интервальной задачи перейдем от неравенств к равенствам, введя для этого дополнительные переменные

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 70 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 340 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}. \qquad (46)$$

Введем базовую новую переменную $y_0 = \dfrac{1}{3x_1 + 4x_2 + x_3}$. Перейдем к остальным новым переменным по формуле $y_j = x_j y_0$.

В результате целевая функция нижней граничной задачи и ее система ограничений в терминах новых переменных запишутся в виде

$$F_1 = 8y_1 + 3y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 300y_0 = 0 \\ y_1 + 2y_3 + y_5 - 70y_0 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_6 - 340y_0 = 0. \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 = 1 \\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases} \tag{47}$$

Теперь нужно решить задачу линейного программирования (47): найти максимум линейной функции F_1 при заданной системе линейных ограничений. Решив эту задачу симплекс-методом, получим следующие значения переменных: $y_1 = 1/3$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_0 = 1/210$.

Сделав возврат к исходным переменным, получим следующее решение в виде точки: ($x_1 = 70$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$). Максимальное значение целевой функции, достигаемое в этой точке, $F_{1,\max} = 8/3$.

Решим теперь верхнюю граничную задачу исходной задачи (43), (44). Введем целевую функцию F_2 как значение целевой функции $\tilde{F}$ (43) исходной интервальной задачи при верхних границах интервальных коэффициентов $\tilde{c}_i$ ее числителя и нижних границах интервальных коэффициентов $\tilde{d}_j$ ее знаменателя

$$F_2 = \frac{9x_1 + 5x_2 + 3x_3}{x_1 + x_2 + x_3}. \tag{48}$$

От неравенств (44) перейдем к равенствам, введя дополнительные переменные

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 70 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 340 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases}. \tag{49}$$

Введем новую переменную $y_0 = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$ и перейдем к новым переменным по формуле $y_j = x_j y_0$. Тогда целевая функция задачи $F_2 = 9y_1 + 5y_2 + 3y_3$.

Запишем систему ограничений в новых переменных

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 300y_0 = 0 \\ y_1 + y_3 + y_5 - 70y_0 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_6 - 340y_0 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_i \geq 0 \end{cases}. \quad (50)$$

Решив получившуюся задачу симплекс-методом, получим следующие значения переменных $y_1 = 1$, $y_2 = 0, y_3 = 0, y_0 = 1/70$. Сделав возврат к исходным переменным, получим следующее решение верхней граничной задачи в виде точки ($x_1 = 70$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$). Соответствующее максимальное значение целевой функции задачи $F_{2max} = 9$.

Искомый максимум $\tilde{F}_{\max}$ интервальной целевой функции $\tilde{F}$ (43) при заданных ограничениях (44) находится в общей точке (70; 0; 0) решения двух граничных задач – нижней и верхней, а сам максимум целевой функции $\tilde{F}_{\max}$ получается соединением двух максимальных значений целевых функций $\tilde{F}_{1\max}$, $\tilde{F}_{2\max}$ двух указанных граничных задач $\tilde{F}_{\max} = [F_{1\max}, F_{2\max}] = \left[\frac{8}{3}, 9\right]$.

Содержательный смысл полученного решения состоит в том, что для максимизации удельной эффективности продукции данной производственной системы следует принять такой план выпуска продукции: изделие первого вида выпускается в количестве 70 единиц, а изделия второго и третьего видов не выпускаются вовсе. При этом достигается максимальное значение удельной эффективности выпускаемой продукции, оцениваемое следующим интервалом возможных значений этого показателя $\tilde{F} = [2{,}66;\ 9]$.

Заключение

В статье показано, что задача оптимизации неполностью определенных нелинейных функций довольно просто решаема, если неопределенность задана в интервальной форме, а для решения используется теория сравнения интервальных величин, которая сводит указанное сравнение к сравнению одноименных границ интервалов. Благодаря такому подходу нахождение оптимума неполностью определенной нелинейной функции сводится к нахождению одноименного оптимума двух полностью определенных (нелинейных) функций. Такой подход, который естественно называть детерминизацией, характерен тем, что дает возможность вполне строго сводить оптимизацию неполностью определенных нелинейных функций к хорошо известным и достаточно эффективным методам оптимизации детерминированных нелинейных функций.

Литература

1. Левин В. И. Булево линейное программирование с интервальными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 1994. № 7. С. 111-122.

2. Левин В. И. Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97-106.

3. Левин В. И. Сравнение интервальных чисел и оптимизация систем с интервальными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4. С. 133-143.

4. Левин В. И. Упрощенная методика оптимизации систем в условиях интервальной неопределенности // Информационные технологии. 2012. № 12. С. 19-24.

5. Левин В. И. Непрерывная логика. Ее обобщения и применения. Часть 1 // Автоматика и телемеханика. 1990. № 8. С. 3-22.

6. Левин В. И. Непрерывная логика. Ее обобщения и применения. Часть 2 // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 3-26.

7. Кузнецов А. В. Математическое программирование. М.: Лань, 2010. 351 с.

8. Немкова Е. А., Левин В. И. Интервальная задача дробно-линейного программирования // Обозрение прикладной и промышленной математики: научно-технический журнал. 2006. Т. 13. № 4. С. 666.

9. Немкова Е. А., Левин В. И. Интервальная задача дробно-линейного программирования. Графическое решение. // Сборник трудов международной конференции «Ресурсосбережение в химической технологии». СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2012. С. 63-65.

10. Немкова Е. А., Левин В. И. Решение интервальной задачи дробно-линейного программирования // Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-24): сб.трудов XXIV Междунар. науч.конф.: в 10 т. Т.2. – Киев: Национ. техн. ун-т Украины «КПИ», 2011. – С. 12-14.

11. Немкова Е. А., Левин В. И. Решение интервальной задачи дробно-линейного программирования сведением к задаче линейного программирования // Молодой ученый. 2011. Т. 1. № 8(31). С. 30-34.

12. Немкова Е.А., Левин В.И. Решение интервальной задачи квадратичного программирования методом детерминизации // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2012. Т. 18. № 1. С. 203-211.

References

1. Levin V. I. Boolean linear programming with interval coefficients. *Automation and Remote Control*, 1994, no. 7, pp. 111-122.

2. Levin V. I. Discrete optimization in the conditions of interval uncertainty. *Automation and Remote Control*, 1992, no. 7, pp. 97-106.

3. Levin V. I. Comparison of interval numbers and optimization of systems with interval parameters. *Automation and Remote Control*, 2004, no. 4, pp. 133-143.

4. Levin V. I. The simplified technique of optimization of systems in the conditions of interval uncertainty. *Information technologies*, 2012, no. 12, pp. 19-24 (in Russian).

5. Levin V. I. Continuous logic. Its generalizations and application. *Automation and Remote Control*, 1990, no. 8, pp. 3-22.

6. Levin V. I. Continuous logic. Its generalizations and application. *Automation and Remote Control*, 1990, no. 9, pp. 3-26.

7. Kuznetsov A. V Mathematical programming. Moscow, Lan Publ., 2010, 351 p. (in Russian).

8. Nemkova E. A., Levin V. I. Interval problem of fractional and linear programming. *Review of applied and industrial mathematics*, 2006, vol.13, no. 4, p. 666 (in Russian).

9. Nemkova E. A., Levin V. I. Interval problem of fractional and linear programming. Graphic decision. *Collection of works of the international conference "Resource-saving in Chemical Technology*, 2012, pp. 63-65 (in Russian).

10. Nemkova E. A., Levin V. I. The solution of an interval problem of fractional and linear programming. *Mathematical methods in equipment and technologies*, 2011, vol. 2, pp. 12-14 (in Russian).

11. Nemkova E. A., Levin V. I. The solution of an interval problem of fractional and linear programming by data to a problem of linear programming. *Young Scientist*, 2011, vol. 1, no. 8, pp. 30-34 (in Russian).

12. Nemkova E. A., Levin V. I. Solution of an interval problem of square programming by a determinization method. *Vestnik of the Tambov State Technical University*, 2012, vol. 18, no. 1, pp. 203-211 (in Russian).

Информация об авторах

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. Тел. +7 9270950686. E-mail: vilevin@mail.ru

Немкова Елена Анатольевна – кандидат технических наук. Пензенский государственный технологический университет. Доцент кафедры «Математика». Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике. Тел. +7(8412) 208-610. E-mail: elenem58@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Interval Problem of Optimization of Prime Cost and Efficiency of Production

V. I. Levin, E. A. Nemkova

Relevance. *In article the existing approaches to an actual problem of optimization of prime cost and efficiency of production released by the production systems functioning in the conditions of uncertainty are considered. The exact problem definition of conditional optimization of prime cost and efficiency of production of a production system at interval uncertainty of parameters is given function and restrictions. Criterion function of system is considered nonlinear.* ***The purpose.*** *The aim of the article is to propose of idea of the solution of a problem of conditional nonlinear optimization of system at interval uncertainty of its parameters. This idea is based on rules of the mathematical theory of comparison of the intervals allowing to* *replace comparison of intervals and allocation of a bigger (smaller) interval with comparison of their lower and upper bounds and allocation of bigger (smaller) border.* ***Method****. On the basis of the stated idea the method of a determinization of the solution of a problem of conditional nonlinear optimization at interval uncertainty of parameters of the optimized system by its data to two completely certain problems of conditional optimization of the same type is formulated and reasonable.* ***Novelty****. It is formulated and proved the offer defining the solution of a problem of conditional nonlinear optimization at interval uncertainty of parameters of the optimized system through solutions of two completely certain problems of optimization of the same type. It is also formulated and proved the theorem defining a necessary and sufficient condition of existence of the solution of a problem of conditional nonlinear optimization at interval uncertainty of its parameters.* ***Result.*** *The algorithm of the solution of a problem of conditional nonlinear optimization at interval uncertainty of parameters of the optimized system which is based on a determinization method is constructed. The example of work of algorithm is given. Comparison of the offered approach to the solution of problems of conditional nonlinear optimization with other approaches is carried out. Merits and demerits of various approaches are specified.*

Keywords*: nonlinear optimization, uncertainty, optimization at interval uncertainty, a determinization method.*

Informaion about Authors

Vitaly Ilyich Levin – the Doctor of Engineering, Professor, PhD, Full Professor. Honored worker of science of the Russian Federation. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economy, sociology, history; decision-making; optimization; automata theory; theory of reliability; history of science; problems of education. Tel.: +79270950686. E-mail: vilevin@mail.ru

Elena Anatolyevna Nemkova – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor at the Department of «Mathematics». Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economy. Tel. +7(8412)208-610. E-mail: elenem58@mail.ru

Address: Russia, 440039, Penza, pr. Baydukova/ Gagarin st., 1a/11.