УДК 519.854.33

Поисковые алгоритмы условной псевдобулевой оптимизации

Антамошкин А. Н., Масич И. С.

Постановка проблемы: *рассматриваются задачи оптимизации вещественных функций бинарных переменных – так называемые задачи псевдобулевой оптимизации. В большинстве практических задач на комбинации значений переменных накладываются ограничения, сужающие множество допустимых значений управляющих переменных. В то же время эти ограничения, как и сама целевая функция, зачастую обладают конструктивными свойствами, учет которых в процессе оптимизации способен повысить эффективность решения таких задач. Кроме того, во многих реальных задачах оптимизации часть функций (критерии и ограничения), либо все функции, заданы алгоритмически, что делает невозможным применение к ним стандартных алгоритмов и требует разработки поисковых процедур оптимизации.* ***Цель работы*** *– обоснование, построение и исследование методов решения задач условной псевдобулевой оптимизации с алгоритмически заданными функциями.* ***Используемые методы:*** *исследуются свойства пространства булевых переменных и выявляются закономерности поведения псевдобулевых функций в пространстве булевых переменных. Разрабатываются точные регулярные алгоритмы, реализующие свойства конкретных классов задач. При построении регулярных алгоритмов рассматриваются классы унимодальных, монотонных и структурно монотонных псевдобулевых функций. Для задач больших размерностей исследуются алгоритмы оптимизации на основе метода случайного поиска, осуществляющие поиск среди граничных точек допустимой области.* ***Результаты:*** *разработаны новые точные алгоритмы с аналитическими оценками трудоемкости для решения задач условной псевдобулевой оптимизации, реализующие информационную сложность классов задач. Также построены новые приближенные алгоритмы для условной оптимизации монотонных псевдобулевых функций с большим числом переменных.* ***Практическая значимость:*** *разработанные алгоритмы применимы для решения любых практических задач, сводящихся к задачам оптимизации псевдобулевых функций. Так, решена задача оптимизации загрузки производственных мощностей литейного производства. Разработанные алгоритмы применяются для нахождения логических закономерностей (используемых для построения классификаторов) в данных, что представляет собой задачу условной псевдобулевой оптимизации большой размерности.*

Ключевые слова*: псевдобулевые функции, оптимизация, случайный поиск, гриди алгоритм, регулярный алгоритм оптимизации.*

Введение

Вещественные функции, определенные на множестве булевых переменных, по аналогии с булевыми функциями принято называть *псевдобулевыми* [1]. Соответственно, задачи оптимизации псевдобулевых функций называются *задачами псевдобулевой оптимизации*.

Многие проблемы в экономике, банковском деле, промышленности, а также проблемы управления сложными техническими объектами приводят к необходимости решения задач условной оптимизации с булевыми переменными. В работе [2] рассматривается проблема автоматизации планирования товарного ассортимента торговых предприятий, которая сводится к решению многокритериальной задачи псевдобулевой оптимизации с ограничениями. Задача нахождения набора кредитных заявок (задача формирования кредитного портфеля банка) решается как поток задач условной оптимизации псевдобулевых функций [3]. Большое внимание в последнее время уделяется задаче оптимального проектирования структуры отказоустойчивых систем управления с использованием подхода мультиверсионного программирования, формулируемой в виде задачи условной псевдобулевой оптимизации [4, 5]. Для ее решения построен ряд оптимизационных моделей, в которых максимизируется критерий надежности с учетом стоимостного ограничения. Структура определяется набором булевых переменных, по которым и происходит максимизация критерия. В основном для решения таких задач нашли применение алгоритмы случайного поиска, например, алгоритмы схемы метода изменяющихся вероятностей [6]. В некоторых работах [7, 8] были предприняты попытки построения регулярных алгоритмов.

Псевдобулевые функции играют важную роль в оптимизационных моделях в различных областях, таких как проектирование [9-12], теория надежности [13], теория вычислительных систем [14], статистика (классификация) [15-17], экономика [18, 19], финансы [20-22], менеджмент [23-25], исследование операций [26], дискретная математика (оптимизация на графах [27, 28]), промышленность (календарное планирование и составление расписания [29-31]).

Помимо задач оптимизации, псевдобулевые функции также появились во многих других моделях, представляющих интерес в настоящее время. Они составляют, к примеру, основной объект исследования в теории кооперативных игр, где они рассматриваются как характеристические функции игр с побочными платежами [32, 33]. Псевдобулевые функции встречаются в комбинаторной теории как функции ранга матроидов [34, 35] или как функции, связанные с определенными параметрами графа, такими как число стабильности, хроматическое число и т.д. [36-38].

Оптимизация псевдобулевых функций используется в распознавании образов, как при отборе информативных признаков [39-41], так и при построении классификаторов [42, 43].

Состояние проблемы

Впервые задачи псевдобулевой оптимизации подробно исследовались в монографии [44]. В этой работе также были разработаны методы решения аналитически заданных задач псевдобулевой оптимизации.

В работе [45] псевдобулевые функции рассматриваются как функции множеств, т.е. функции, отображающие семейство подмножеств конечного исходного множества во множество действительных чисел.

Функции множеств зачастую а заданными алгоритмом, способным выдавать их значения для любого подмножества заданного конечного исходного множества. В некоторых задачах функция множества может быть определена аналитическим выражением, что является весьма благоприятным случаем.

Явное задание функций множеств делает возможным применение большого числа методов для их анализа и оптимизации. Считается, что любая функция множеств, определенная на конечном исходном множестве, допускает аналитический способ задания. Однако в некоторых случаях определение аналитического выражения может быть значительно более трудоемкой процедурой, чем решение исходной задачи.

Эта работа сосредоточена на тех функциях множеств, которые определены на конечном исходном множестве, представляющем собой множество булевых переменных, и не имеют известного аналитического задания. Особое внимание уделено специальным классам – монотонные и унимодальные псевдобулевые функции.

Известно несколько эффективных схем для решения задач, в которых целевая функция и ограничения заданы аналитическими выражениями. Это алгебраические методы [46-61] (наиболее известный - базовый алгоритм Хаммера [44, 45]), в том числе методы линеаризации [62-66], методы квадратичной оптимизации [67-72]; различные методы с применением релаксации [73].

В практических задачах очень часто целевая функция, а иногда и ограничения заданы алгоритмом или наблюдаются на выходе реальной системы [74]. Это обстоятельство исключает возможность практического применения стандартных процедур математического программирования, опирающихся на известную структуру и вид целевой функции и ограничений. Именно для таких случаев разрабатываются поисковые методы.

Обратим внимание на общую структуру поискового метода [75, 76]. *Алгоритм решения задачи оптимизации* представляет собой последовательную процедуру, имеющую рекуррентный характер. Это означает, что процесс поиска состоит из повторяющихся этапов, каждый из которых определяет переход от одного решения к другому, лучшему, что и образует процедуру последовательного улучшения решения:

$$X_0 \to X_1 \to \ldots \to X_N \to X_{N+1} \to \ldots$$

В этой последовательности каждое последующее решение в определенном смысле лучше, предпочтительнее предыдущего, т. е.

$$X_N \succ X_{N-1},\ N = 1,2,\ldots$$

Алгоритм поиска оптимального решения, таким образом, связывает следующие друг за другом решения. В простейшем случае

$$X_N = F(X_{N-1}),$$

где F – алгоритм поиска, указывающий, какие операции следует сделать в одной точке X_{N-1}, чтобы получить следующую X_N, более предпочтительную.

Рассмотрим специфику поискового алгоритма F. Вполне очевидно, что информации в точке X_{N-1} совершенно недостаточно для перехода в другую, лучшую точку X_N. Необходимо иметь информацию о поведении оптимизируемой функции $f(X)$ и ограничения S в области точки X_{N-1}. Без этого нельзя составить разумный алгоритм F, обеспечивающий условие улучшения.

Поисковый алгоритм для решения оптимизационной задачи состоит обычно из двух этапов: сбор информации о поведении целевой функции и ограничений, часто посредством пробных шагов, и осуществление рабочего шага. Возможны и отклонения от этой схемы, когда оба этапа совмещены и неразделимы, но при этом обязательно сохраняются.

В оптимизации для функций, заданных алгоритмически, широкое распространение получили адаптивные поисковые процедуры [77-80] – эволюционные и генетические алгоритмы, алгоритм имитации отжига. Однако эти алгоритмы требуют настройки большого числа параметров, к тому же отсутствуют аналитические оценки точности таких алгоритмов. Большое распространение в последнее время получили стохастические и локально-стохастические алгоритмы, разрабатываемые для конкретных классов задач [61, 81-84].

Для конкретных классов задач безусловной псевдобулевой оптимизации разработаны точные регулярные поисковые алгоритмы, в том числе и неулучшаемые [85-88]. В частности, точное определение минимума произвольной строго монотонной унимодальной псевдобулевой функции требует вычисления значений функции в $(n+1)$-ой точке пространства булевых переменных B_2^n.

Однако на практике редко встречаются задачи без ограничений. Существующие в настоящее время методы решения задач с ограничениями либо не имеют эффективных оценок трудоемкости (исключающих полный перебор), либо не имеют априорных оценок точности. Всевозможные методы решения задач с ограничениями на переменные различаются в значительной степени способами учета ограничений. Методы, связанные со сведением условной задачи к безусловной, т. е. методы типа штрафных функций, обычно не учитывают специфику ограничений и приводят к появлению других, не менее существенных трудностей типа овражности и многоэкстремальности штрафной функции [89, 90]. Поэтому необходима разработка методов, в полной мере учитывающих и выявляющих специфику и особенность ограничений.

В задачах псевдобулевой оптимизации допустимое множество решений конечно, поэтому существует универсальный способ отыскания оптимального решения посредством полного перебора всех допустимых решений. Однако такой алгоритм поиска применим только в тех исключительных случаях, когда мощность множества допустимых решений сравнительно невелика. В интересных с практической точки зрения задачах, как правило, мощность множества допустимых решений быстро (например, экспоненциально) растет с увеличением размерности (объема исходных данных) задачи. Это приводит к тому, что в задачах реальной размерности количество допустимых решений становится величиной астрономического порядка, что делает перебор практически невозможным. Назначение теории задач псевдобулевой оптимизации – создание работоспособных в практическом смысле алгоритмических инструментов решения задач.

Среди комбинаторных оптимизационных задач, частью которых являются и задачи псевдобулевой оптимизации, можно выделить *полиномиально разрешимые* и *NP*-трудные. Для каждой полиномиально разрешимой задачи известен по крайней мере один эффективный алгоритм ее решения, то есть точный алгоритм, трудоемкость которого (время решения) ограничена сверху некоторым полиномом от размера входных данных задачи. Никакую *NP*-трудную задачу нельзя решить никаким известным полиномиальным алгоритмом. Во всяком случае, если бы существовал полиномиальный алгоритм решения какой-нибудь одной *NP*-трудной задачи, то существовали бы полиномиальные алгоритмы для всех *NP*-трудных задач.

Более подробно с вопросами оценки сложности алгоритмов и теорией полиномиальной сводимости комбинаторных задач можно ознакомиться в монографиях [73, 91-93].

К сожалению, почти все естественные и интересные постановки задач условной псевдобулевой оптимизации оказываются *NP*-трудными, поэтому попытки построения точных и полиномиальных алгоритмов для этих задач вероятней всего обречены на неудачу.

Рассмотрим наиболее известные методы, используемые в настоящее время для решения задач условной псевдобулевой оптимизации. Их можно подразделить на точные (комбинаторные) и приближенные.

Точные методы, очевидно, являются всегда детерминированными, т.е. при одинаковых исходных данных задачи выдают одинаковый результат – оптимальное решение задачи.

Метод ветвей и границ с использованием решения релаксированной задачи для получения нижних границ. Для этого метода необходимо получение значений функций вне точек целочисленной решетки, что ограничивает его применение для задач с неявным заданием функций. Кроме того, нет оценок трудоемкости алгоритмов, основанных на схеме метода ветвей и границ. Показано лишь, что существуют задачи, число ветвлений в которых (т.е. число решаемых релаксированных задач) незначительно отличается от полного перебора.

Метод динамического программирования получил большое распространение при решении аддитивных (сепарабельных) задач математического программирования. Основу этого метода составляет принцип оптимальности Беллмана. Смысл этого принципа состоит в том, что оптимальная стратегия при любом первоначальном состоянии и любом первоначальном решении предполагает, что последующие решения должны быть определены относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения. Алгоритм динамического программирования при решении задачи линейного целочисленного программирования имеет псевдополиномиальные оценки трудоемкости. Но этот метод не нашел применения при решении задач с алгоритмически заданными функциями.

Алгебраические методы: базовый алгоритм Хаммера для решения задач линейного программирования с булевыми переменными и его модификации, алгоритмы квадратичной оптимизации для решения задач квадратичного программирования с булевыми переменными, методы линеаризации, позволяющие решать задачи оптимизации нелинейных псевдобулевых функций. Эти методы предназначены для задач с аналитически заданными целевыми функциями и ограничениями. Алгебраические методы в наиболее полной мере используют структуру заданных функций, составляющих постановку задачи. В основном эти алгоритмы рассматривают задачи безусловной псевдобулевой оптимизации и задачи условной оптимизации с линейными и квадратичными псевдобулевыми целевыми функциями и ограничениями.

Аппроксимационно-комбинаторные методы решения задач псевдобулевой оптимизации. Эти методы основаны на построении аппроксимирующей функции для целевой функции на множестве допустимых значений. Использование такого подхода принципиально затруднено при алгоритмическом задании целевых функций и ограничений.

Точные поисковые алгоритмы псевдобулевой оптимизации, не требующие аналитического задания функций, были построены для решения произвольных задач безусловной псевдобулевой оптимизации. Эти алгоритмы в наиболее полной мере учитывают специфику решаемых классов задач и являются существенно не улучшаемыми. Одной из основных задач данной работы является построение точных поисковых алгоритмов для решения задач условной псевдобулевой оптимизации.

Рассмотрим основные аспекты разработки и исследования приближенных алгоритмов дискретной и псевдобулевой оптимизации [94-97].

Как уже отмечалось выше, интересующие нас задачи являются *NP*-трудными. Это означает, что построение точных полиномиальных алгоритмов невозможно. Одним из основных направлений исследования таких задач является построение приближенных алгоритмов с априорными оценками их точности. Такие алгоритмы не для всякой индивидуальной задачи находят оптимальное решение, но всегда отыскивают допустимое решение задачи, которое удовлетворяет некоторым требованиям по точности, установленными еще до получения приближенного решения.

Существуют два наиболее распространенных подхода к анализу приближенных алгоритмов и определению их точности: анализ поведения в худшем случае и вероятностный анализ поведения алгоритма. При *анализе в худшем случае* оценивается погрешность алгоритма на наихудшей из возможных индивидуальной задаче, а в случае *вероятностного анализа* предполагается, что на множестве индивидуальных задач задано некоторое вероятностное распределение и оценивается математическое ожидание погрешности алгоритма на этом распределении.

Необходимость разработки приближенных алгоритмов связана также с тем, что существуют задачи дискретной оптимизации, для нахождения точного решения которых необходимо перебрать все допустимые решения задачи, т.к. одно допустимое решение не имеет никаких априорных преимуществ перед другим. Таким образом, для решения таких задач нет каких-либо точных процедур кроме полного перебора множества допустимых решений. Одной из подобных задач является задача вида

$$\begin{cases} f(X) \to \max\limits_{X \in B_2^n}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = m, \end{cases} \qquad m < n,$$

со множеством допустимых значений

$$S = \{X \in B_2^n : \sum_{j=1}^{n} x_j = m\}.$$

Задача содержит

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

допустимых решений. К данному виду сводится, например, задача выбора системы информативных факторов [6, 39-40, 98, 99].

Свойства псевдобулевых функций

Определение 1. Псевдобулевой функцией называют вещественную функцию на множестве булевых переменных: $f : B_2^n \to R^1$, где $B_2 = \{0,1\}$, $B_2^n = B_2 \times B_2 \times \cdots \times B_2$. [85].

Псевдобулевые функции можно рассматривать как функции множеств [45]. Так как существует взаимно однозначное соответствие между подмножествами множества $N = \{1,2,\ldots,n\}$ и элементами B_2^n, то любая псевдобулевая функция может быть интерпретирована как вещественная *функция множеств,* определенная на *P(N),* показательном множестве множества $N = \{1,2,\ldots,n\}$, т.е. ставит вещественное число в соответствии каждому подмножеству конечного множества. Интерпретация псевдобулевой функции *f* как функции множеств выделяет тот факт, что значения *f* получены некоторым неявным путем.

Любая псевдобулевая функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ может быть единственным образом представлена как *мультилинейный полином* вида

$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_0 + \sum_{k=1}^{m} c_k \prod_{i \in A_k} x_i\,, \tag{1}$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_m$ – вещественные коэффициенты, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – непустые подмножества $N = \{1,2,\ldots,n\}$ [45].

Кроме того, любая псевдобулевая функция может быть представлена в виде

$$f(x_1,\ldots,x_n) = b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k \left(\prod_{i \in A_k} x_i \prod_{j \in B_k} \bar{x}_j \right), \tag{2}$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_m$ – вещественные коэффициенты, $\bar{x}_j = 1 - x_j$, $j = \overline{1,n}$. Если $b_k \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, то выражение (2) является *позиформой* функции *f.* Любая псевдобулевая функция может быть записана в виде позиформы.

Другие представления псевдобулевых функций представлены в работах [100, 101].

Таким образом, любую псевдобулевую функцию теоретически можно записать в виде алгебраического выражения. Однако при нелинейности ($c_k \neq 0$ при $|A_k| > 1$ в выражении (1) или $b_k \neq 0$ при $|A_k| + |B_k| > 1$ в (2)) запись функции в явном виде может потребовать вычисления функции в точках, количество которых экспоненциально растет с ростом размерности *n*, и, соответственно, может являться более трудоемкой задачей, чем оптимизация алгоритмически заданной функции. Это обуславливает необходимость изучения свойств псевдобулевых функций, не имеющих явного задания, и разработки поисковых алгоритмов оптимизации.

Введем основные определения и понятия [85].

Определение 2. Точки $X^1, X^2 \in B_2^n$ назовем *k-соседними*, если они отличаются значением *k* координат, $k = \overline{1, n}$. 1-соседние точки будем называть просто *соседними*.

Определение 3. Множество $O_k(X)$, $k = \overline{0, n}$, всех точек B_2^n, *k*-соседних к точке X, назовем *k-м уровнем* точки X. При этом $O_0(X) = X$.

Лемма 1. $\forall X \in B_2^n : card\ O_k(X) = C_n^k$, где C_n^k – число сочетаний из *n* по *k*.

Лемма 2. $\forall X \in B_2^n : B_2^n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} O_k(X)$.

Таким образом, множество всех точек B_2^n можно представить в виде последовательности уровней $O_k(X)$, $k = \overline{0, n}$, какой-либо точки *X*, каждый из которых состоит из C_n^k точек (рис. 1).

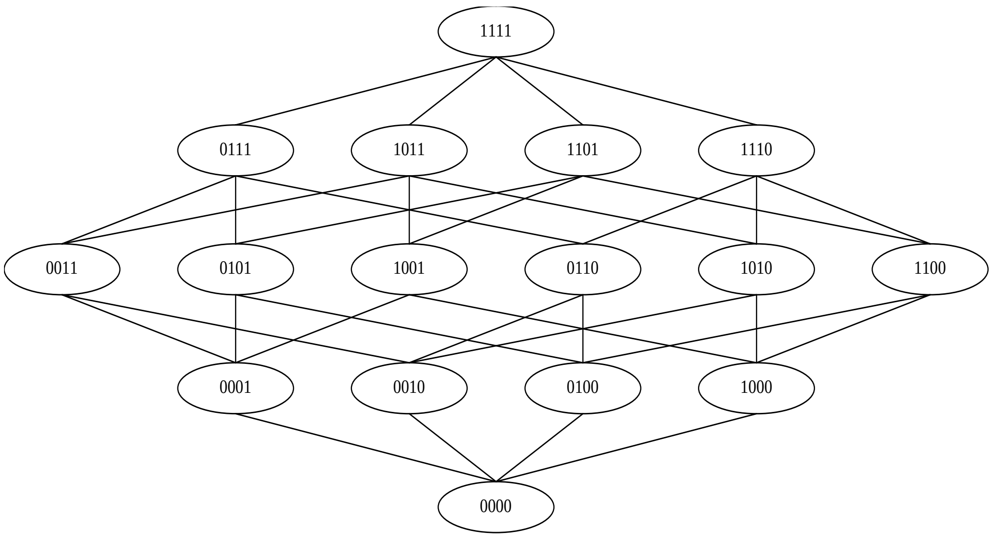

Рис. 1. Условное графическое представление пространства B_2^n, *n*=4

Лемма 3. $\forall X^k \in O_k(X),\ X \in B_2^n,\ k=\overline{0,n}$:

$$card\{O_1(X_k) \cap O_{k-1}(X)\} = k,$$
$$card\{O_1(X_k) \cap O_{k+1}(X)\} = n-k.$$

Определение 4. Множество точек $W(X^0, X^l) = \{X^0, X^1, \ldots, X^l\} \subset B_2^n$ назовем *путем* между точками X^0 и X^l, если $\forall\ i = 1,\ldots,l$ точка X^i является соседней к X^{i-1}.

Определение 5. Путь $W(X^0, X^l) \subset B_2^n$ между k-соседними точками X^0 и X^l назовем *кратчайшим*, если $l = k$.

Определение 6. Множество $A \subset B_2^n$ назовем *связным множеством*, если $\forall X^0, X^l \in A$ существует путь $W(X^0, X^l) \subset A$.

Определение 7. $\forall X, Y \in B_2^n$ объединение всех кратчайших путей $W(X,Y)$ будем называть *подкубом* B_2^n и обозначать $K(X,Y)$.

Для того чтобы определить, принадлежит ли точка подкубу, воспользуемся следующим свойством.

Свойство 1. Точка $Z \in B_2^n$ принадлежит подкубу $K(X,Y)$, если $z_i = x_i$ для $\forall i : x_i = y_i$.

Лемма 4. $\forall X^k \in O_k(X), X \in B_2^n, k=\overline{0,n}$: $O_k(X) \subset \bigcup\limits_{l=0}^{N} O_{2l}(X^k)$, где $N = \min\{k, n-k\}$, а $card(O_{2l}(X^k) \cap O_k(X)) = C_k^l \cdot C_{n-k}^l\ \ \forall l = \overline{0,N}$.

Ниже рассматриваются понятия модальности и монотонности, на основании которых проводится классификация псевдобулевых функций, а также основные свойства выделяемых классов [85].

Определение 8. Точку $X^* \in B_2^n$, для которой $f(X^*) < f(X), \forall X \in O_1(X^*)$, назовем *локальным минимумом* псевдобулевой функции *f*.

Определение 9. Псевдобулевую функцию, имеющую только один локальный минимум, будем называть *унимодальной* на B_2^n функцией.

Определение 10. Унимодальную функцию f назовем *монотонной* на B_2^n, если $\forall X^k \in O_k(X^*), k=\overline{1,n}$: $f(X^{k-1}) \le f(X^k)$, $\forall X^{k-1} \in O_{k-1}(X^*) \cap O_1(X^k)$, и *строго монотонной*, если это условие выполняется со знаком строгого неравенства.

Определение 11. Унимодальную функцию f назовем *разнозначной* на B_2^n, если для каждого кратчайшего пути $W(X^0, X^l)$, $X^0 \in B_2^n$, $X^l = X^*$: $f(X^i) \ne f(X^j)$ при $i \ne j$, $X^i, X^j \in W(X^0, X^l)$, $i, j = \overline{0,l}$.

Определение 12. Произвольную унимодальную функцию *f*, для которой условие монотонности нарушается, по крайней мере, в одной точке B_2^n, будем называть *немонотонной* на B_2^n.

<u>*Определение 13.*</u> Путь $W^f(X^0, X^l) \subset B_2^n$ назовем *путем невозрастания* функции f, если $\forall X^i, X^{i-1} \in W^f(X^0, X^l)$, $i = 1,2,\ldots,l: f(X^i) \le f(X^{i-1})$, и *путем убывания* функции, если неравенство выполняется со знаком строгого неравенства.

<u>*Замечание 1*</u>. Из определений 11 и 13 следует, что произвольная (разнозначная) функция монотонна (строго монотонна) на B_2^n, если $\forall X \in B_2^n$ все пути ее невозрастания (убывания), начинающиеся в точке X^0, являются кратчайшими до X^*.

<u>*Лемма 5*</u>. Для любой унимодальной на B_2^n функции f в каждой точке $X \in B_2^n \setminus \{X^*\}$ среди точек $X_j^1 \in O_1(X)$, $j = \overline{1,n}$, существует, по крайней мере, одна точка $X_{j_i}^1$ такая, что $f(X_{j_i}^1) \le f(X)$.

<u>*Следствие 1*</u>. Если f – унимодальная на B_2^n функция, то $\forall X \in B_2^n \setminus \{X^*\}$ существует по крайней мере один путь ее невозрастания $W^f(X, X^*)$.

<u>*Лемма 6.*</u> Если f – унимодальная на B_2^n функция, то

$$\min_{X_j^k \in O_k(X^0)} f(X_j^k) \le \min_{X_j^{k+1} \in O_{k+1}(X^0)} f(X_j^{k+1}).$$

<u>*Определение 14.*</u> Унимодальную немонотонную на B_2^n функцию f назовем *слабо немонотонной*, если $\forall X^k \in O_k(X^*)$, $k = \overline{1,n}$, точка $X_{\min}^1$ такая, что

$$f(X_{\min}^1) = \min_{X_j^1 \in O_1(X^k)} f(X_j^1),$$

принадлежит $O_{k-1}(X^*)$.

<u>*Замечание 2.*</u> Из определения 14 следует, что необходимым и достаточным условием слабой немонотонности немонотонной на B_2^n функции f является: $\forall X^0 \in B_2^n$ путь $W_{\min}^f(X^0, X^*)$ – кратчайший.

<u>*Определение 15.*</u> Унимодальную псевдобулевую функцию f назовем *(строго) структурно монотонной*, если для $\forall X \in O_l(X^*)$, $\forall Y \in O_m(X^*)$, $l < m$, выполняется $f(X) \le f(Y)$ ($f(X) < f(Y)$).

<u>*Определение 16*</u>. Псевдобулевая функция, имеющая более одного локального минимума, называется *полимодальной* на B_2^n функцией.

<u>*Замечание 3.*</u> Из определений 10 и 15 следует, что структурно-монотонная функция является монотонной функцией.

Пример унимодальной и монотонной псевдобулевой функции дает следующая лемма.

<u>*Лемма 7.*</u> Полином от булевых переменных

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{m} a_j \prod_{i \in \beta_j} x_i ,$$

где $\beta_j \subset \{1,\ldots,n\}$, является унимодальной и монотонной псевдобулевой функцией при $a_j \geq 0$, $j=\overline{1,m}$.

Постановка задачи условной псевдобулевой оптимизации

Формальная постановка задачи условной псевдобулевой оптимизации выглядит следующим образом:

$$f(X) \to extr, \tag{3}$$

где

$$f: S \to R^1, \tag{4}$$

а $S \subset B_2^n$ – некоторая подобласть пространства булевых переменных, определяемая заданной системой ограничений.

В данной работе рассматривается задача вида

$$\begin{cases} C(X) \to \max\limits_{X \in B_2^n}, \\ A_j(X) \leq H_j,\ j=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{5}$$

где $C(X)$ и $A_j(X)$ – псевдобулевые функции, обладающие некоторыми конструктивными свойствами (модальность, монотонность и т.п.).

Задача (5) является *NP*-полной задачей дискретной оптимизации, т.е. ее нельзя решить никаким известным полиномиальным алгоритмом.

Для простоты изложения результатов и описания работы алгоритмов в дальнейшем часто будем рассматривать задачу с одним ограничением

$$A(X) \leq H. \tag{6}$$

Рассмотрим свойства множества допустимых решений рассматриваемой задачи.

Определение 17. Точка $Y \in \mathbf{A}$ является *граничной точкой* множества $\mathbf{A}$, если существует $X \in O_1(Y)$, для которой $X \notin \mathbf{A}$.

Определение 18. Точку $Y \in O_i(X^0) \cap \mathbf{A}$ будем называть *крайней точкой* множества $\mathbf{A}$ с базовой точкой $X^0 \in \mathbf{A}$, если $\forall X \in O_1(Y) \bigcap O_{i+1}(X^0)$ выполняется $X \notin \mathbf{A}$.

Пример расположения крайних точек множества приведен на рис. 2.

Определение 19. Ограничение, определяющее подобласть пространства булевых переменных, будем называть *активным*, если оптимальное решение задачи условной оптимизации не совпадает с оптимальным решением соответствующей задачи оптимизации без учета ограничения.

В дальнейшем будем рассматривать ситуацию, когда ограничение (или система ограничений), определяющее допустимую область пространства булевых переменных, является активным.

Свойство 2. Если ограничение является активным, то оптимальное решение принадлежит подмножеству граничных точек.

Замечание 4. Обратное не верно.

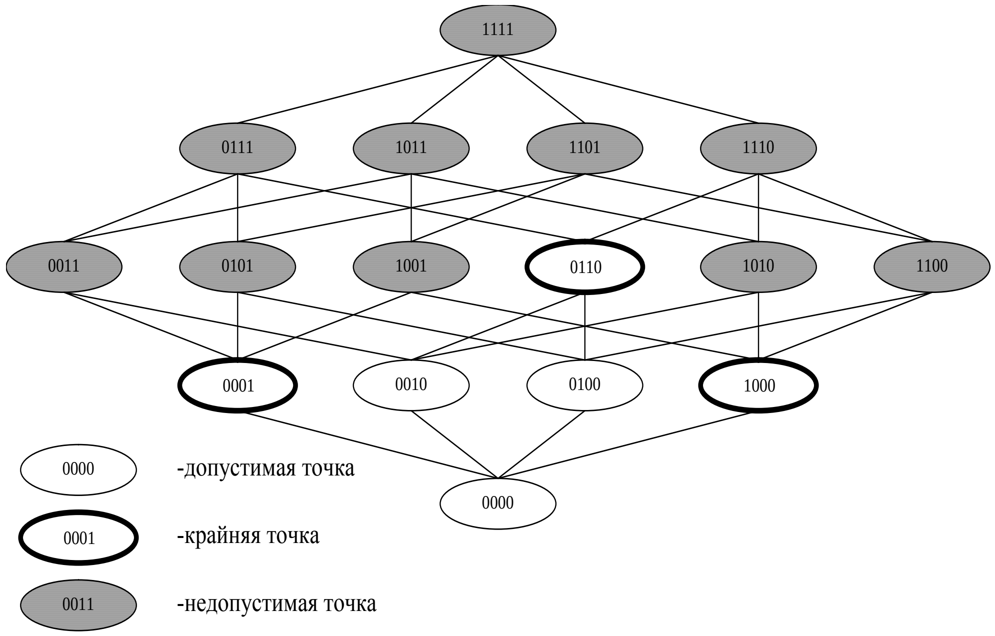

Рис. 2. Условное представление пространства B_2^n, n=4, $X^0=(0,...,0)$ – пример расположения крайних точек

Теорема 1. Если целевая функция является монотонной унимодальной функцией, а ограничение активно, то оптимальным решением задачи (5) будет точка, принадлежащая подмножеству крайних точек множества допустимых решений.

Рассмотрим задачу (5) с одним ограничением (6).

Теорема 2. Если функция ограничения (6) является унимодальной псевдобулевой функцией, то множество допустимых решений S задачи (5) представляет собой связное множество.

Лемма 8. Количество крайних точек связного множества допустимых решений задачи (5)

$$s \le s_{\max} = C_n^{[n/2]},$$

где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$. В случае $s = s_{\max}$ все крайние точки расположены на $n/2$-ом уровне точки X^0 при четном n и на $(n-1)/2$-ом (или $(n+1)/2$-ом) уровне при нечетном n.

При решении практических задач с алгоритмически заданными функциями в отдельных частных случаях свойства функций можно идентифицировать исходя из некоторых априорных сведений. Но во многих встречающихся на практике задачах принадлежность функции к какому-либо классу вовсе не очевидна, поэтому необходимо проводить идентификацию свойств функций посредством осуществления пробных шагов. Только после этого возможно применение соответствующего поискового алгоритма. В [102, 103] предлагается идентификация свойств псевдобулевых функций (заданных алгоритмически) посредством аппроксимации алгебраическими (квадратичными) полиномами. Свойства полиномов определяются исходя из значений их коэффициентов. Полинома второй степени достаточно для описания рассматриваемых свойств. После того, как все функции идентифицированы, задачу можно решать соответствующим алгоритмом.

Точные алгоритмы условной псевдобулевой оптимизации

Для построения регулярных алгоритмов проведем классификацию задач условной псевдобулевой оптимизации, основанную на конструктивных свойствах целевых функций и ограничений [104].

Рассматриваются классы задач вида

$$\begin{cases} C(X) \to \max\limits_{X \in B_2^n}, \\ A(X) \le H, \end{cases}$$

в которых целевая функция $C(X)$ и функция $A(X)$, определяющая систему ограничений, обладают определенными конструктивными свойствами.

При разработке регулярных алгоритмов рассматриваются следующие классы псевдобулевых функций:

– унимодальная;
– монотонная;
– структурно монотонная.

Всевозможным сочетанием классов целевых функций и классов функций ограничений получаются соответствующие классы задач условной псевдобулевой оптимизации.

Из определений монотонности и структурной монотонности функций следуют свойства:

<u>*Свойство 3.*</u> Если функция f монотонно возрастает от $X^0 \in B_2^n$, то для любой точки $Y \in B_2^n$ выполняется:

a) $f(X) \le f(Y)$ для всех $X \in K(X^0, Y)$;

b) $f(X) \ge f(Y)$ для всех $X \in K(Y, X^1)$.

<u>*Свойство 4*</u>. Если функция f структурно монотонно возрастает от $X^0 \in B_2^n$, то для любой точки $Y \in O_k(X^0)$ выполняется:

a) $f(X) \le f(Y)$ для всех $X \in O_l(X^0)$, $l < k$;

b) $f(X) \ge f(Y)$ для всех $X \in O_l(X^0)$, $l > k$.

Рассмотрим свойства целевых функций и функций ограничений, принадлежащих перечисленным выше классам. Эти свойства необходимо учитывать при построении регулярных алгоритмов.

В первую очередь рассмотрим *свойства функций ограничений*.

Унимодальная функция ограничения имеет единственный минимум в точке $X^0 \in B_2^n$. Обозначим $X^1 \equiv X \in O_n(X^0)$.

Согласно теореме 2 множество допустимых точек в этом случае является связным множеством.

<u>*Свойство 5.*</u> Из леммы 6 следует, что если функция $A(X)$ унимодальна и на уровне $O_k(X^0)$ нет допустимых точек, то их нет на уровне $O_l(X^0)$, где $l > k$.

<u>*Следствие 2.*</u> Если функция $A(X)$ унимодальна и на уровне $O_k(X^0)$ все точки являются недопустимыми или крайними, то на уровне $O_l(X^0)$, где $l > k$, нет допустимых точек (рис. 3).

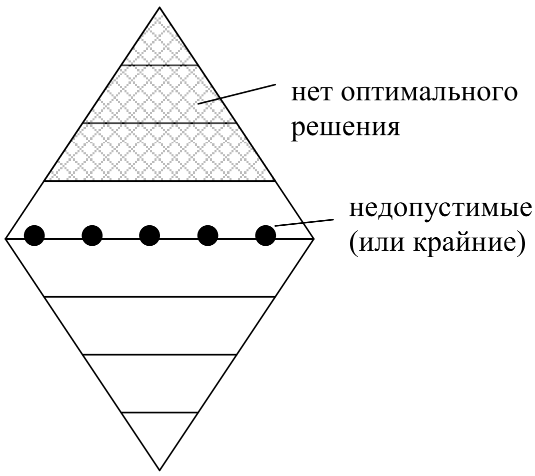

Рис. 3. Иллюстрация следствия 2

Монотонная функция ограничения возрастает от точки $X^0 \in B_2^n$.

<u>*Свойство 6.*</u>

a) если функция $A(X)$ монотонна и точка $Y \in B_2^n$ является допустимой (удовлетворяет ограничению $A(Y) \le H$), то любая точка $X \in K(X^0, Y)$ является также допустимой;

b) если функция $A(X)$ монотонна и точка $Y \in B_2^n$ является недопустимой (не удовлетворяет ограничению $A(Y) \le H$), то любая точка $X \in K(Y, X^1)$ является также недопустимой (рис. 4).

<u>*Следствие 3.*</u> Если функция $A(X)$ монотонна и точка $Y \in B_2^n$ является крайней точкой, то любая точка $X \in K(X^0, Y)$ не является крайней точкой, а также любая точка $X \in K(Y, X^1)$ не является крайней точкой (т.е. при поиске остальных крайних точек подкубы $K(X^0, Y)$ и $K(Y, X^1)$ можно исключить из рассмотрения).

<u>*Следствие 4.*</u> Если функция $A(X)$ монотонна и точки $X_1 \in O_{k_1}(X^0)$ и $X_2 \in O_{k_2}(X^0)$, $k_1 < k_2$, являются граничными точками, то на любом уровне $O_k(X^0)$, $k_1 < k < k_2$, существует хотя бы одна граничная точка.

Структурно монотонная функция ограничения возрастает от точки $X^0 \in B_2^n$.

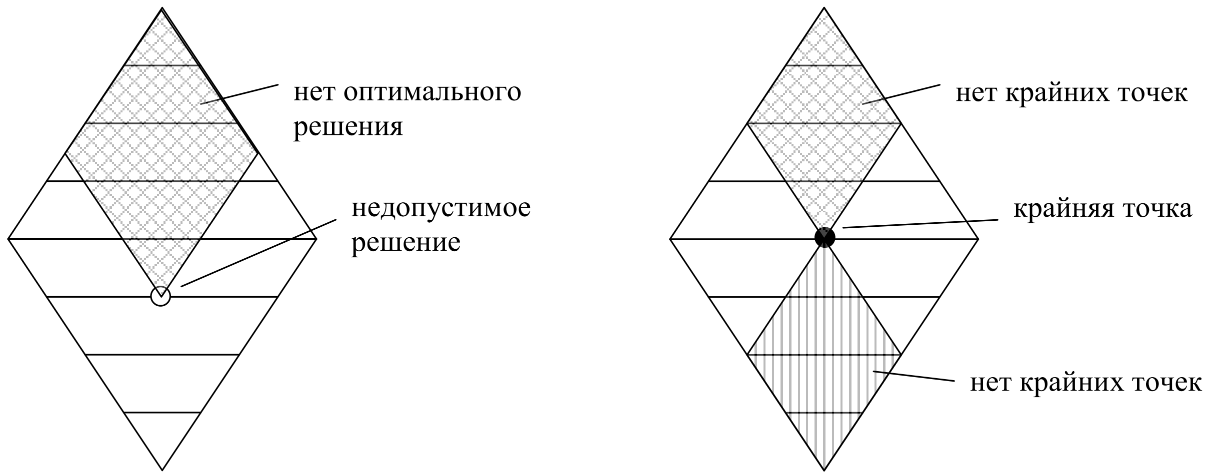

Рис. 4. Иллюстрации свойства 6

Свойство 7.

а) если функция $A(X)$ структурно монотонна и точка $Y \in O_k(X^0)$ является допустимой (удовлетворяет ограничению $A(Y) \le H$), то любая точка $X \in O_l(X^0)$, $l < k$, является также допустимой;

b) если функция $A(X)$ структурно монотонна и точка $Y \in O_k(X^0)$ является недопустимой (не удовлетворяет ограничению $A(Y) \le H$), то любая точка $X \in O_l(X^0)$, $l > k$, является также недопустимой (рис. 5).

Следствие 5. Если функция $A(X)$ структурно монотонна, то возможен один из двух вариантов:

а) существует такое K, $0 \le K \le n$, что:

$$\forall X \in O_k(X^0),\ k \le K:\ A(X) \le H;$$

$$\forall X \in O_k(X^0),\ k > K:\ A(X) > H;$$

в этом случае все граничные (а также крайние) точки принадлежат $O_K(X^0)$;

b) существует такое K, $0 \le K \le n$, что:

$$\forall X \in O_k(X^0),\ k < K:\ A(X) \le H;$$

$$\forall X \in O_k(X^0),\ k > K:\ A(X) > H;$$

$$\exists X \in O_K(X^0):\ A(X) \le H;\ \exists X \in O_K(X^0):\ A(X) > H;$$

в этом случае граничные (а также крайние) точки принадлежат $O_K(X^0) \cup O_{K-1}(X^0)$.

Далее рассмотрим *свойства целевых функций.*

Унимодальная целевая функция имеет единственный максимум в точке $X^1 \equiv X \in O_n(X^0)$.

Согласно свойству 2 оптимальное решение принадлежит подмножеству граничных точек.

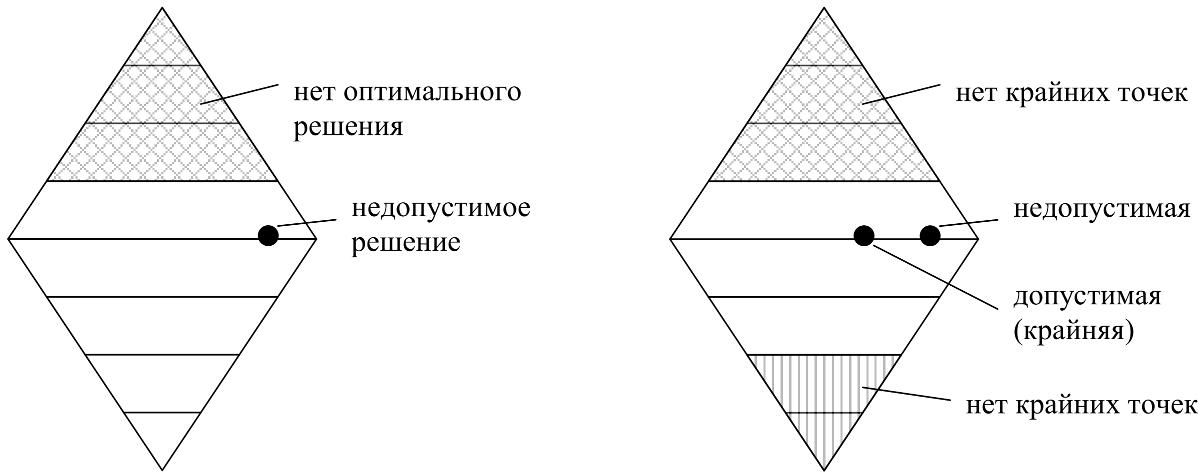

Рис. 5. Иллюстрация свойства 7

Свойство 8. Из леммы 6 следует, что если функция $C(X)$ унимодальна и решение, дающее наибольшее значение функции $C(X)$ на уровне $O_k(X^0)$, является допустимым, то на уровне $O_l(X^0)$, где $l < k$, нет оптимального решения (рис. 6).

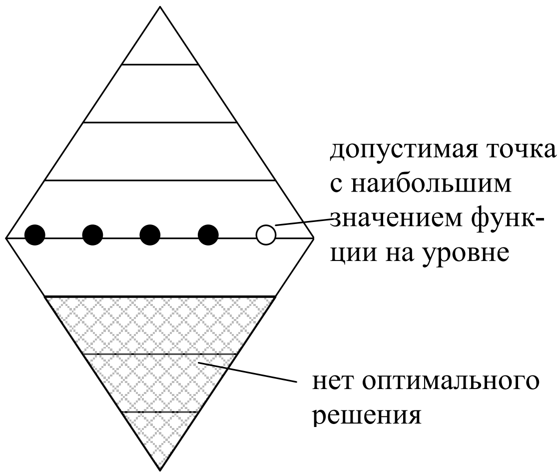

Рис. 6. Иллюстрация свойства 8

Монотонная целевая функция возрастает от точки $X^0 \in B_2^n$.

Согласно теореме 1 оптимальное решение принадлежит подмножеству крайних точек.

Свойство 9. Из свойства 3 следует, что если функция $C(X)$ монотонна и решение $Y \in B_2^n$ является допустимым (удовлетворяет ограничению $A(Y) \le H$), то в подкубе $K(X^0, Y)$ нет оптимального решения (рис. 7).

Структурно монотонная целевая функция возрастает от точки $X^0 \in B_2^n$.

Свойство 10. Из свойства 4 следует, что если функция $C(X)$ монотонна и решение $Y \in O_k(X^0)$ является допустимым (удовлетворяет ограничению $A(Y) \le H$), то на уровне $O_l(X^0)$, где $l < k$, нет оптимального решения (рис. 8).

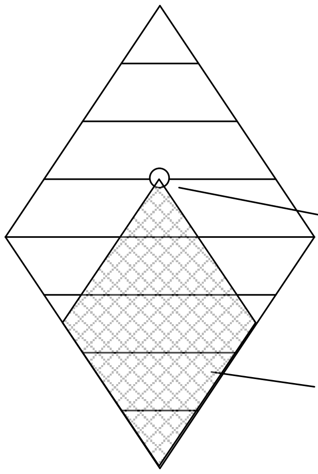

Рис. 7. Иллюстрация свойства 9

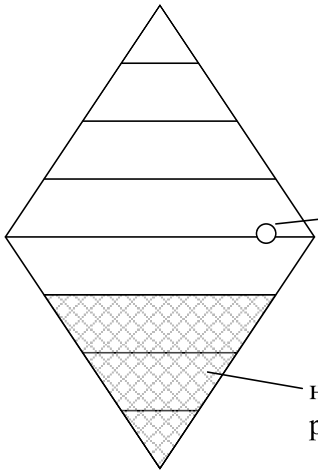

Рис. 8. Иллюстрация свойства 10

Описанные свойства являются основой для построения регулярных алгоритмов поиска точных решений задач условной псевдобулевой оптимизации.

Свойство монотонности довольно часто встречается у псевдобулевых функций в практических задачах оптимизации. Как видно из описанных выше результатов исследования свойств псевдобулевых функций, наличие свойства монотонности дает возможность значительно сократить перебор при поиске оптимального решения и построить эффективные алгоритмы оптимизации.

Рассмотрим построение алгоритма оптимизации для случая, когда целевая функция $C(X)$ и функция ограничения $A(X)$ монотонно возрастают от $X^0 \in B_2^n$ [105]. Оптимальное решение принадлежит подмножеству крайних точек множества допустимых решений. Если решение $Y \in B_2^n$ является крайней точкой, то в подкубах $K(X^0, Y)$ и $K(Y, X^1)$ крайних точек нет, и их можно исключить из рассмотрения при поиске остальных крайних точек (рис. 9).

С применением этих свойств был построен описанный ниже регулярный алгоритм нахождения точного решения поставленной задачи.

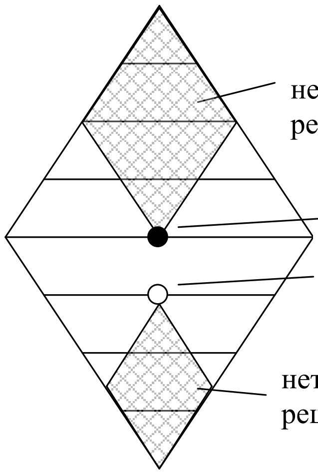

Рис. 9. Исключаемые подкубы для случая монотонных функций

На первом этапе поиска необходимо найти какую-либо одну граничную точку. Алгоритм начинает работу из точки X^0 (стартовая точка). Если эта точка не удовлетворяет ограничению, то задача не имеет решения. Берется любая допустимая точка $X_1 \in O_1(X^0)$ и принимается за стартовую. Если среди точек, соседних к X^0, нет допустимых, то решением задачи является X^0. Далее берется любая допустимая точка $X_2 \in O_1(X_1) \cap O_2(X^0)$. Если среди точек подмножества $O_1(X_k) \cap O_{k+1}(X^0)$, где $X_k \in O_k(X^0)$, нет допустимых, то X_k является первой найденной граничной точкой. $Y_1 = X_k$.

Все точки подкубов $K(X^0, Y_1)$ и $K(Y_1, X^1)$ исключаются из дальнейшего рассмотрения.

На следующем этапе поиска берется точка $X \in O_k(X^0) \setminus Y_1$. Если эта точка не удовлетворяет ограничению, то подкуб $K(X, X^1)$ исключается, и рассматривается точка из подмножества $(O_1(X) \cap O_{k-1}(X^0)) \setminus K(X^0, Y_1)$. В противном случае, если точка X допустима, и допустима хотя бы одна точка из подмножества $(O_1(X) \cap O_{k+1}(X^0)) \setminus K(Y_1, X^1)$, то алгоритм переходит к этой новой точке. Если же X допустима, но ни одна из точек $O_1(X) \cap O_{k+1}(X^0)$ не выполняет ограничение, то X является граничной точкой, $Y_2 = X$.

Далее процедура повторяется.

Если после нахождения Y_s подмножество $O_{k_s}(X^0) \setminus (K(X^0, Y_1) \cup \ldots \cup K(X^0, Y_s) \cup K(Y_1, X^1) \cup \ldots \cup K(Y_s, X^1))$ пусто, то алгоритм прекращает поиск граничных точек.

До данного момента алгоритм вычислял значения лишь функции $A(X)$ в рассматриваемых точках и сравнивал его с величиной H.

После того как найдены граничные точки, в них вычисляются значения функции $C(X)$, и точка с наибольшим значением целевой функции принимается за оптимальное решение задачи условной оптимизации.

Алгоритм 1.

1. Полагаем $k=1$, $\Omega=\varnothing$, $s=0$, $X_0=X^0$. Если $A(X^0)>H$, то задача не имеет допустимого решения.
2. Выбираем $X_{k+1}\in(O_1(X_k)\cap O_{k+1}(X^0))\setminus\Omega$, для которого $A(X_{k+1})\le H$. Если для какого-либо $X\in O_1(X_k)\cap O_{k+1}(X^0)$ не выполняется $A(X)\le H$, то $\Omega=\Omega\cup K(X,X^1)$.
3. Если такой X_{k+1} существует, то $k=k+1$ и возвращаемся к п. 2.
4. Принимаем $s=s+1$, $Y_s=X_k$, $\Omega=\Omega\cup K(X^0,Y_s)\cup K(Y_s,X^1)$.
5. Выбираем $X\in(O_k(X^0)\cap O_{2m}(Y_s))\setminus\Omega$ таким образом, чтобы m было наибольшим, $1\le m\le\min\{k,n-k\}$. Если таких точек нет, то переходим к п. 11.
6. Если $A(X)>H$, то $\Omega=\Omega\cup K(X,X^1)$ и выбираем $X'\in(O_1(X)\cap O_{k-1}(X^0))\setminus\Omega$, иначе переходим к п. 8.
7. Принимаем $X=X'$, $k=k-1$. Если $A(X)>H$, то возвращаемся к п. 6.
8. Если $A(X)\le H$, то выбираем $X'\in(O_1(X)\cap O_{k+1}(X^0))\setminus\Omega$, для которого $A(X)\le H$. Если таких точек нет, то переходим к п. 10.
9. Принимаем $X=X'$, $k=k+1$ и возвращаемся к п.8.
10. Принимаем $s=s+1$, $Y_s=X$, $\Omega=\Omega\cup K(X^0,Y_s)\cup K(Y_s,X^1)$ и переходим к п. 5.
11. Определяем оптимальное решение X^* из условия $C(X^*)=\max\limits_{i=\overline{1,s}} C(Y_i)$.

<u>*Теорема 3*</u>. Нахождение решения задачи условной псевдобулевой оптимизации с целевой функцией и ограничением, монотонно возрастающими от точки $X^0\in B_2^n$, в случае, когда все крайние точки Y_s принадлежат $O_k(X^0)$, $s=\overline{1,C_n^k}$, требует просмотра T^k точек B_2^n,

$$T^k=k+C_n^k+C_n^{k+1}.$$

<u>*Следствие 6*</u>. Оценка сверху трудоемкости алгоритма 1

$$T_3\le\max_{0\le k<n}T^k=T^{\left[\frac{n}{2}\right]}=\left[\frac{n}{2}\right]+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

<u>*Теорема 4*</u>. Для определения точного решения задачи условной псевдобулевой оптимизации с целевой функцией и ограничением, монотонно возрастающими от точки $X^0\in B_2^n$, в худшем случае (при максимально возможном количестве крайних точек) требуется просмотреть не менее $C_n^{[n/2]}+C_n^{[n/2]+1}$ точек B_2^n.

Замечание 5. В соответствии со следствием 6 и теоремой 4 алгоритм 3 решения задачи условной псевдобулевой оптимизации с монотонными функциями является существенно не улучшаемым.

Оценки трудоемкости сверху разработанных точных алгоритмов псевдобулевой оптимизации для задач с целевыми функциями и функциями ограничений, обладающих определенными конструктивными свойствами, обобщены в таблице 1 (при условии структурной монотонности функций ограничений) [106]

Таблица 1 – Оценки трудоемкости сверху регулярных алгоритмов оптимизации, предназначенных для различных классов задач

$C(X)$ \ $A(X)$	монотонная	немонотонная унимодальная	полимодальная
монотонная	$\left[\frac{n}{2}\right]+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$	$C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$	2^n
немонотонная унимодальная	$C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$	$\left[\frac{n}{2}\right]+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$	2^n
полимодальная	2^n	2^n	2^n

Рассмотрим случай, когда система ограничений состоит из нескольких неравенств:

$$\begin{cases} C(X)\to \max\limits_{X\in B_2^n}, \\ A_j(X)\le H_j,\ j=\overline{1,m}. \end{cases}$$

Введем характеристическую функцию системы неравенств

$$\Phi(X)=\begin{cases} 0, A_j(X)\le H_j, \forall j=\overline{1,m}, \\ 1, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При $\Phi(X)=0$ решение X удовлетворяет системе ограничений, а при $\Phi(X)=1$ решение X не выполняет хотя бы одно неравенство.

Теорема 5. Если все функции $A_j(X)$ системы ограничений являются монотонно возрастающими от точки X^0, то и функция $\Phi(X)$ является монотонной.

Таким образом, вместо системы неравенств можно использовать неравенство $\Phi(X)\le 0$ и решать задачу соответствующим алгоритмом.

Итак, рассмотрены различные классы задач условной псевдобулевой оптимизации и соответствующие алгоритмы. Оценивая эффективность регулярных алгоритмов в целом, можно заключить, что они гарантируют точное решение задачи условной оптимизации практически любых псевдобулевых функций с различными типами ограничений при средней трудоемкости меньшей, чем трудоемкость полного перебора. Алгоритм 1 в наибольшей мере учитывает свойства класса задач условной оптимизации, в которых целевая функция и ограничение представляют собой монотонные унимодальные псевдобулевые функции, и, таким образом, реализует информационную сложность данного класса задач и является неулучшаемым в этом смысле.

Для применения регулярных алгоритмов необходимо предварительно соотнести задачу с одним из выделенных классов. Если нет никаких априорных сведений о свойствах псевдобулевых функций, заданных алгоритмически, необходимо провести процедуру идентификации свойств функций.

Приближенные алгоритмы условной псевдобулевой оптимизации

Теория алгоритмов указывает на то, что всякий алгоритм должен обладать свойством однозначности, т. е. при одинаковых исходных данных результат его работы должен быть одинаковым. Случайный поиск расширяет понятие алгоритма, допуская тем самым неоднозначность результата при одинаковых исходных данных.

Естественно подразделить все возможные алгоритмы поиска на два класса:

- детерминированные, регулярные алгоритмы поиска, обладающие указанным свойством однозначности;
- недетерминированные (случайные, стохастические, вероятностные и т.д.) алгоритмы поиска, не обладающие свойством однозначности, результат работы которых имеет статистический характер.

В работе [76] показано, что при решении дискретных задач оптимизации очень естественно использовать метод случайного поиска. Это связано с тем, что всякого рода градиентные представления, свойственные детерминированным методам, в дискретном случае теряют смысл.

Случайный поиск как метод решения условной задачи отличается рядом преимуществ по сравнению с детерминированными методами. Здесь у случайного поиска имеется ряд возможностей, связанных со случайным характером поиска, которых в принципе не может иметь ни один детерминированный метод решения задачи.

Одними из наиболее эффективных алгоритмов случайного поиска для задач безусловной псевдобулевой оптимизации (а также для задач условной оптимизации специального вида) являются алгоритмы метода изменяющихся вероятностей [6]. Однако для данной задачи эти алгоритмы не учитывают в полной мере специфику решаемой задачи.

Так как в условной задаче оптимальное решение находится среди граничных точек множества допустимых решений, то алгоритм оптимизации должен быть направлен на поиск именно граничных точек [107].

Рассмотрим задачу оптимизации монотонно возрастающей от точки X^0 псевдобулевой функции при произвольном ограничении. Оптимальное решение в этом случае, как показано выше, принадлежит подмножеству крайних точек множества допустимых решений.

Простейший алгоритм случайного поиска крайних точек состоит в следующем [108]. Поиск начинается из X^0. На каждом шаге алгоритм выбирает соседнюю точку на следующем уровне, двигаясь, таким образом, по пути возрастания целевой функции до границы допустимой области. При необходимости процедура повторяется несколько раз, и из найденных крайних точек выбирается лучшая.

Рассмотренные выше два алгоритма на каждом шаге случайно выбирают допустимую точку на следующем уровне (если такая существует). Таким образом, при поиске граничных точек эти алгоритмы не учитывают значения целевой функции $C(X)$ и функции $A(X)$, кроме как для определения, удовлетворяет ли точка ограничению, и используют значения целевой функции лишь при сравнении найденных граничных точек (последний пункт алгоритма).

Альтернативой случайному поиску граничных точек является регулярный алгоритм, использующий гриди эвристику [109].

Гриди алгоритмы являются интуитивными эвристиками, в которых на каждом шаге принимается решение, являющееся наиболее выгодным в данный момент, без учета того, что происходит на последующих шагах поиска [110].

Описанные выше и исследуемые далее схемы приближенных алгоритмов поиска граничных точек можно агрегировать в общую схему [111]. Для любой эвристики поиска граничных точек будем рассматривать пару алгоритмов – прямой и двойственный. Прямой алгоритм начинает поиск из допустимой области и движется по пути возрастания целевой функции, пока не найдет крайнюю точку допустимой области. Напротив, двойственный алгоритм ведет поиск в недопустимой области по пути убывания целевой функции, пока не найдет некоторого допустимого решения.

Общая схема прямого алгоритма поиска

1. Полагаем $X_1 = X^0$, $i = 1$.
2. В соответствии с правилом выбираем $X_{i+1} \in O_i(X^0) \cap O_1(X_i) \cap S$. Если таких точек нет, то переходим к п. 3; иначе $i = i + 1$ и повторяем шаг.
3. Принимаем $X_{opt} = X_{i+1}$.

Общая схема двойственного алгоритма поиска

1. Полагаем $X_1 \in O_n(X^0)$, $i = 1$.
2. В соответствии с правилом выбираем $X_{i+1} \in O_{n-i}(X^0) \cap O_1(X_i)$. Если $X_{i+1} \in S$, то переходим к п. 3; иначе $i = i + 1$ и повторяем шаг.
3. Принимаем $X_{opt} = X_{i+1}$.

Как видно из приведенных схем, прямой алгоритм находит крайнюю точку допустимой области, в то время как двойственный алгоритм находит граничную точку, которая может и не являться крайней. Поэтому для задач со связной областью допустимых решений прямой алгоритм в среднем находит лучшее решение, чем двойственный. Если же мы применим прямой алгоритм для задачи с несвязной допустимой областью, то полученное в результате решение может быть далеким от оптимального, так как на пути возрастания целевой функции допустимые и недопустимые решения будут чередоваться. Для таких случаев более пригоден двойственный алгоритм, для которого это чередование не играет никакой роли. Для улучшения решения, полученного двойственным алгоритмом, рекомендуется применять соответствующий прямой алгоритм. Такое улучшение на практике оказывается весьма значительным [112].

Рассматриваемые здесь алгоритмы поиска граничных точек отличаются друг от друга лишь правилом выбора следующей точки на шаге 2 общих схем.

Правило 1. Случайный поиск граничных точек (СПГ)

Точка X_{i+1} выбирается случайным образом. Каждая точка на следующем шаге может быть выбрана с равной вероятностью. При решении практических задач эти вероятности могут быть не равными, а вычисляться на основании специфики задачи до начала поиска.

Правило 2. Гриди алгоритм

Точка X_{i+1} выбирается из условия

$$\lambda(X_{i+1}) = \max_{j} \lambda(X^{j}),$$

где $X^{j} \in O_{i}(X^{0}) \cap O_{1}(X_{i}) \cap S$ для прямого алгоритма и $X^{j} \in O_{n-i}(X^{0}) \cap O_{1}(X_{i})$ для двойственного.

Функция $\lambda(X)$ выбирается исходя из специфики задачи, например:
целевая функция $\lambda(X) = C(X)$,
удельная ценность $\lambda(X) = C(X)/A(X)$ (для одного ограничения) и т.д.

Правило 3. Адаптивный случайный поиск граничных точек (АСПГ)

Точка X_{i+1} выбирается случайным образом в соответствии с вектором вероятностей

$$P^{i} = (p_{1}^{i}, p_{2}^{i}, \ldots, p_{J}^{i}),$$

где J – количество точек, из которых производится выбор.

$$p_{j}^{i} = \frac{\lambda(X^{j})}{\sum_{l=1}^{J} \lambda(X^{l})}, \quad j = \overline{1, J},$$

где $X^{j} \in O_{i}(X^{0}) \cap O_{1}(X_{i}) \cap S$ для прямого алгоритма и $X^{j} \in O_{n-i}(X^{0}) \cap O_{1}(X_{i})$ для двойственного.

Правило 4. Модифицированный случайный поиск граничных точек (МСПГ).

Точка X_{i+1} выбирается из условия

$$\lambda(X_{i+1}) = \max_{r} \lambda(X^{r}),$$

где X^{r} – точки, выбранные по правилу 1, $r = \overline{1,R}$; R – задаваемый параметр алгоритма.

Приведенные выше регулярные и стохастические алгоритмы переводят исходную задачу условной псевдобулевой оптимизации, являющуюся *NP*-трудной, в задачу

$$\frac{f(X^{*}) - f(X')}{f(X^{*})} \le \varepsilon,$$

принадлежащую классу *P* (полиномиально разрешима), где X^{*} – оптимальное решение, X' – приближенное решение.

Разработанные приближенные алгоритмы (гриди алгоритмы и алгоритмы случайного поиска граничных точек) имеют полиномиальные оценки трудоемкости и поэтому предназначены, прежде всего, для решения задач большой размерности. Наиболее эффективной представляется следующая схема. На первом этапе задача решается гриди алгоритмом, а затем находятся несколько решений с помощью адаптивного случайного поиска; лучшее из найденных принимается за решение задачи.

Выводы

В процессе управления сложными техническими и организационными системами часто возникает необходимость оптимизации по определенным критериям посредством выбора наилучших значений управляемых переменных из области допустимых значений, определяемой рядом ограничений на переменные. Причем эти критерии и ограничения во многих встречающихся на практике случаях не удается записать в виде явных алгебраических выражений, т.е. они заданы алгоритмически, а упрощения моделей, такие как линеаризация, оказываются неприемлемыми для оптимизации при управлении сложными техническими системами. Это делает невозможным применение хорошо изученных методов математического программирования и соответствующих программных приложений.

Следует отметить, что известные поисковые методы не учитывают особенности ограничений, да и целевых функций, наблюдаемые, как правило, в реальных задачах. Адаптивные поисковые алгоритмы типа генетических, к тому же, требуют подбора некоторого числа параметров, что возможно только при предварительном решении ряда однотипных задач и неприемлемо при единичном решении задачи, и не дают никакой гарантии об исключении полного перебора.

Значительную часть в задачах дискретной оптимизации занимают задачи оптимизации с булевыми переменными. Строгая булевость – свойство, которое часто встречается в практических задачах оптимизации. Задачам оптимизации с булевыми переменными, как с алгоритмическим, так и с алгебраическим заданием функций, многие исследователи уделяют особое внимание. В принципе, любая задача дискретной оптимизации сводится к псевдобулевой.

Проблема повышения эффективности решения задач условной псевдобулевой оптимизации с алгоритмически заданными функциями является весьма актуальной. Наибольшая эффективность может быть достигнута путем выявления топологических свойств пространства булевых переменных и свойств псевдобулевых функций и их утилизации при построении математического аппарата решения выделенных классов задач.

Разработанные алгоритмы оптимизации применимы для любых задач условной псевдобулевой оптимизации, возникающих в процессе управления сложными техническими объектами, а также в областях экономики. Наиболее интересными для практического использования являются точные поисковые алгоритмы, реализующие свойства классов задач, и приближенные алгоритмы, особенно алгоритм адаптивного случайного поиска граничных точек, а также процедура идентификации свойств псевдобулевых функций.

Описанные алгоритмы использованы в решении задачи оптимизации загрузки технологического оборудования предприятия, представляющей собой задачу условной псевдобулевой оптимизации с несвязным множеством допустимых решений [113].

Интересны результаты применения разработанных алгоритмов оптимизации в методах распознавания, в частности, в логических алгоритмах классификации [114]. Применение эффективных алгоритмов комбинаторной оптимизации позволяет находить информативные закономерности в данных, что ведет к получению эффективных решающих правил.

Литература

1. Crama Y., Hammer P. L. Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications. New York: Cambridge University Press. – 2011. – 687 p.

2. Казаковцев Л. А. Подходы к автоматизации задач планирования ассортимента на торговых предприятиях // Вестник НИИ Систем управления, волновых процессов и технологий. 2000. Вып. 5.

3. Имануилов П. А., Пуртиков В. А. Решение задачи формирования кредитного портфеля банка методом Мивер // Вестник НИИ Систем управления, волновых процессов и технологий. 2000. Вып. 5.

4. Ashrafi N., Berman O., Cutler M. Optimal Design of Large Software Systems Using N-Version Programming // In IEEE Transactions on Reliability. 1994. Vol. 43. No. 2. Pp. 344-350.

5. Avizienis A. The methodology of N-version programming // Software fault tolerance. 1995. Vol. 5. Pp. 23-47.

6. Антамошкин А. Н. Оптимизация функционалов с булевыми переменными. – Томск: Изд-во Томского ун-та. – 1987. – 218 с.

7. Масич И. С. Метод ветвей и границ в задаче оптимизации систем отказоустойчивого программного обеспечения // Научная сессия ТУСУР.

Материалы докладов межрегиональной научно-технической конференции. – Томск, 2002. – С. 31-34.

8. Masich I. S. Multi-version methods of software reliability growth in intelligence systems. Intelligent Systems // Proceeding of the Fifth International Symposium. – Moscow: BMSTU. – 2002. – Pp. 74-76.

9. Системный анализ: проектирование, оптимизация и приложения / под общей редакцией А. Н. Антамошкина. – Красноярск: САА и СО РИА, 1996. – Т.1. – 334 с.; Т.2. – 290 с.

10. Юдин Д. Б., Горяшко А. П., Немировский А. С. Математические методы оптимизации устройств и алгоритмов АСУ. – М.: Радио и связь. – 1982. – 288 с.

11. Barahona F., Grotschel M., Junger M., Reinelt G. An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design // Operation Research. 1988. No. 36. Pp. 493-513.

12. System Analysis, Design and Optimization. An Introduction / General Editing by A. Žilinskas. – Krasnoyarsk, 1993. – 203 p.

13. Масич И. С. Поисковые алгоритмы псевдобулевой оптимизации в задачах диагностики и прогнозирования // Высокие технологии, исследования, промышленность. Сборник трудов 9 Международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности». – Том 3. – Санкт-Петербург, 2010. – С. 89-90.

14. Karp R. M., Miller R. G., Thatcher J. W. Reducibility among combinatorial problems. Journal of Symbolic Logic. 1975. No. 40 (4). Pp. 618-619.

15. Ranyard R. H. An algorithm for maximum likelihood ranking and Slater's i from paired comparisions // British Journal of Mathematical and Statistical Psychology. 1976. No. 29. Pp. 242-248.

16. Rao M. R. Cluster analysis and mathematical programming // Journal of the American Statistical Association. 1971. Vol. 66. Pp. 622-626.

17. Масич И. С. Поисковые алгоритмы комбинаторной оптимизации в задачах классификации данных // Высокие технологии, образование, промышленность. Т. 3: сборник статей XI Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности». – Санкт-Петербург, 2011. – С. 91-92.

18. Hammer P. L., Shliffer E. Applications of pseudo-Boolean methods to economic problems // Theory and decision. 1971. No. 1. Pp. 296-308.

19. Масич И. С., Краева Е. М. Логические алгоритмы классификации в задачах управления сельскохозяйственной деятельностью // Инновационные тенденции развития российской науки: материалы VI международной научно-практической конференции. – Красноярск, 2013. – С. 123-125.

20. Hillier F. S. The evaluation of risky interrelated investments. – Amsterdam: North-Holland Publishing, 1969. – 113 p.

21. Laughhunn D. J. Quadratic binary programming with applications to capital budgeting problems // Operations Research. 1970. No. 18. Pp. 454-461.

22. Laughhunn D. J., Peterson D. E. Computational experience with capital expenditure programming models under risk // Business Finance. 1971. No. 3. Pp. 43-48.

23. Масич И. С. Комбинаторные алгоритмы оптимизации в задаче распределения земли при производстве полевых культур // Инновационные тенденции развития российской науки: материалы VI международной научно-практической конференции. – Красноярск, 2013. – С. 125-126.

24. Масич И. С., Краева Е. М. Логический анализ данных и алгоритмы распознавания в задачах управления сельскохозяйственной деятельностью // Наука и образование: опыт, проблемы, перспективы развития: материалы международной научно-практической конференции. – Красноярск, 2013, С. 301-303.

25. Weingartner H. M. Capital budgeting of interrelated projects: survey and synthesis // Management Science. 1966. No. 12. Pp. 485-516.

26. Масич И. С. Модель и алгоритмы оптимизации для задачи распределения земли при производстве полевых культур // Наука и образование: опыт, проблемы, перспективы развития: материалы международной научно-практической конференции. – Красноярск, 2013. – С. 303-304.

27. Hammer P. L. Pseudo-Boolean remarks on balanced graphs // International Series of Numerical Mathematics. 1977. No. 36. Pp. 69-78.

28. Ebenegger Ch., Hammer P. L., de Werra D. Pseudo-Boolean functions and stability of graphs // Annals of Discrete Mathematics. 1984. No. 19. Pp. 83-97.

29. Масич И. С. Алгоритмы комбинаторной оптимизации для планирования загрузки литейного производства // Материалы VII Международной научно-практической конференции «Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики». – Тольятти, 2010. – С.3-10.

30. Crama Y. Combinatorial optimization models for production scheduling in automated manufacturing systems // European Journal of Operational Research. 1997. No. 99. Pp. 136-153.

31. Антамошкин А. Н., Дегтерев Д. А., Масич И. С. Регулярный алгоритм оптимизации загрузки оборудования // Труды конф. «Информационные недра Кузбасса». – Кемерово: КемГУ. – 2003. – С. 59-61.

32. Bilbao J. M. Cooperative Games on Combinatorial Structures. – Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers. – 2000.

33. Hammer P. L., Holzman R. Approximations of pseudo-Boolean functions: Applications to game theory // Methods and Models of Operations Research. 1992. No. 36. Pp. 3-21.

34. Crama Y., Hammer P. L. Bimatroidal independence systems // Mathematical Methods of Operations Research. 1989. Vol. 33. No. 3. Pp. 149-165.

35. Welsh D. J. A. Matroid theory. – London: Academic Press. – 1976.

36. Fraenkel A. S., Hammer P. L. Pseudo-Boolean functions and their graphs // Annals of Discrete Mathematics. 1984. No. 20. Pp. 137-146.

37. Hammer P. L., Hansen P., Simeone B. Upper planes of quadratic 0-1 functions and stability in graphs // Nonlinear Programming. N. 4. 1981. P. 395-414.

38. Nieminen J. A linear pseudo-Boolean viewpoint on matching and other central concepts in graph theory // Zastosowania Matematyki. 1974. No. 14. – Pp. 365-369.

39. Масич И. С. Отбор существенных факторов в виде задачи псевдобулевой оптимизации // Решетневские чтения: Тез. докл. VII Всерос. науч. конф. – Красноярск: СибГАУ. – 2003. – С. 234-235.

40. Масич И. С. Локальная оптимизация для задачи выбора информативных факторов // Наука. Технологии. Инновации. Материалы докладов всероссийской научной конференции. Часть 1. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – С. 50-51.

41. Масич И. С. Повышение качества распознавания логических алгоритмов классификации путем отбора информативных закономерностей // Информационные системы и технологии: Материалы Международной научно-технической конференции. – Красноярск: Изд. Научно-инновационный центр, 2012. – С. 149-153.

42. Масич И. С. Задачи оптимизации и их свойства в логических алгоритмах распознавания // Проблемы оптимизации и экономические приложения: материалы V Всероссийской конференции. – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2012.

43. Масич И. С. Комбинаторная оптимизация и логические алгоритмы классификации в задаче прогнозирования осложнений инфаркта миокарда // Инновационные тенденции развития российской науки: материалы III Международной научно-практической конференции. – Красноярск, 2010. – С. 276-280.

44. Hammer P. L., Rudeanu S. Boolean Methods in Operations Research and Related Areas. – Berlin: Springer-Verlag; New York: Heidelberg. – 1968. – 310 p.

45. Boros E., Hammer P. L. Pseudo-Boolean Optimization // Discrete Applied Mathematics. – 2002. – No. 123(1-3). Pp. 155-225.

46. Береснев В. Л., Агеев А. А. Алгоритмы минимизации для некоторых классов полиномов от булевых переменных // Модели и методы оптимизации: Сб. науч. тр. Том 10. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 5-17.

47. Гришухин В. П. Полиномиальность в простейшей задаче размещения // Препринт ЦЭМИ АН СССР. – М., 1987. – 64 с.

48. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). – Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 191 с.

49. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование – М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1969. – 389 с.

50. Allemand K., Fukuda K., Liebling T. M., Steiner E. A polynomial case of unconstrained zero-one quadratic optimization // Mathematical Programming. Ser. A. 2001. No. 91. Pp. 49-52.

51. Barth P. A Davis-Putnam Based Enumeration Algorithm for Linear Pseudo-Boolean Optimization // Technical Report MPI-I-95-2-003. – Saarbrücken: Max-Planck-Institut für Informatik. – 1995. – 19 p.

52. Crama Y. Recognition problems for special classes of polynomials in 0-1 variables // Mathematical Programming. 1989. No. 44. Pp. 139-155.

53. Crama Y., Hansen P., Jaumard B. The basic algorithm for pseudo-Boolean programming revisited // Discrete Applied Mathematics. 1990. No. 29. Pp. 171-185.

54. Werra D. De, Hammer P. L., Liebling T., Simeone B. From linear separability to unimodality: A hierarchy of pseudo-Boolean functions // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 1998. No. 1. Pp. 174-184.

55. Hammer P. L., Hansen P., Pardalos P. M., Rader D. J. Maximizing the product of two linear functions in 0-1 variables // Research Report 2-1997. – Piscataway, NJ: Rutgers University Center for Operations Research. – 1997.

56. Hammer P. L., Peled U. N. On the Maximization of a Pseudo-Boolean Function // Journal of the Association for Computing Machinery. 1972. Vol. 19, No. 2. Pp. 265-282.

57. Hansen P., Jaumard B., Mathon V. Constrained nonlinear 0-1 programming // Journal on Computing. 1993. No. 5. Pp. 97-119.

58. Martello S., Toth P. The 0-1 Knapsack Problem. // Combinatorial Optimization. 1979. Pp. 237-279.

59. Padberg M. W. A Note on zero-one programming // Operations Research. 1975. No. 23. Pp. 833-837.

60. Padberg M. W. Covering, Packing and Knapsack Problems // Annals of Discrete Mathematics. 1979. No. 4. Pp. 265-287.

61. Wegener I., Witt C. On the Optimization of Monotone Polynomials by Simple Randomized Search Heuristics // Procs. of GECCO 2003. – 2003. – Pp. 622-633.

62. Adams W. P., Sherali H. D. A tight linearization and an algorithm for zero-one quadratic programming problems // Management Science. 1986. Vol. 32. No. 10. Pp. 1274-1290.

63. Boros E., Hammer P. L. A max-flow approach to improved roof duality in quadratic 0-1 minimization // Research Report RRR 15-1989, Piscataway, NJ: Rutgers University Center for Operations Research. – 1989.

64. Glover F., Woolsey R. E. Further reduction of zeroone polynomial programs to zero-one linear programming problems // Operations Research. 1973. No. 21. Pp. 156-161.

65. Hansen P., Lu S. H., Simeone B. On the equivalence of paved duality and standard linearization in nonlinear 0-1 optimization // Discrete Applied Mathematics. 1990. No. 29. Pp. 187-193.

66. Watters L. G. Reduction of integer polynomial problems to zero-one linear programming problems // Operations Research. 1967. No. 15. Pp. 1171-1174.

67. Boros E., Crama Y., Hammer P. L. Chvátal cuts and odd cycle inequalities in quadratic 0-1 optimization // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 1992. No. 5. Pp. 163-177.

68. Boros E., Crama Y., Hammer P. L. Upper bounds for quadratic 0-1 maximization // Operation Research Letters. 1990. No. 9. Pp. 73-79.

69. Boros E., Hammer P. L. A max-flow approach to improved roof duality in quadratic 0-1 minimization // Research Report RRR 15-1989, Piscataway, NJ: Rutgers University Center for Operations Research. – 1989.

70. Boros E., Hammer P. L. Cut-Polytopes, Boolean quadratic polytopes and nonnegative quadratic pseudo-Boolean functions // Mathematics of Operations Research. 1993. No. 18. Pp. 245-253.

71. Hammer P. L., Hansen P., Simeone B. Roof duality, complementation and persistency in quadratic 0-1 optimization // Mathematical Programming. 1984. No. 28. Pp. 121-155.

72. Hammer P. L., Simeone B. Quadratic functions of binary variables // Combinatorial Optimization: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1403– Berlin: Springer-Verlag; New York: Heidelberg. – 1989.

73. Papadimitriou C. H., Steiglitz K. Combinatorial Optimization. – New York: Dover Publications. – 1998.

74. Масич И. С. Поисковые алгоритмы условной псевдобулевой оптимизации: монография. – Красноярск: СибГАУ. 2013. – 160 с.

75. Гринченко С. Н. Метод «проб и ошибок» и поисковая оптимизация: анализ, классификация, трактовка понятия «естественный отбор» // Исследовано в России. 2003. № 104. С. 1228-1271.

76. Растригин Л. А. Адаптация сложных систем – Рига: Зинатне. 1981. – 375 с.

77. Гринченко С. Н. Иерархическая оптимизация в природных и социальных системах: селекция вариантов приспособительного поведения и эволюции систем "достаточно высокой сложности" на основе адаптивных алгоритмов случайного поиска // Исследовано в России. 2000. № 108. С. 1421-1440.

78. Гринченко С. Н. Случайный поиск, адаптация и эволюция: от моделей биосистем - к языку представления о мире (части 1 и 2) // Исследовано в России. – 1999. – № 10 и № 11.

79. Goldberg D. E. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. – Boston: Addison-Wesley. – 1989.

80. Schwefel H. P. Evolution and Optimum Seeking. No.Y.: Whiley. – 1995. – 612 p.

81. Björklund H., Petersson V., Vorobjov S. Experiments with Iterative Improvement Algorithms on Completely Unimodal Hypercubes // Technical report 2001-017. – Uppsala, Sweden: Uppsala University – 2001. – 30 p.

82. Björklund H., Sandberg S., Vorobjov S. Optimization on Completely Unimodal Hypercubes // Technical report 2002-018. – Uppsala, Sweden: Uppsala University – 2002. – 39 p.

83. Masich I. S. Heuristic algorithms for searching boundary points in pseudo-Boolean optimization problems // Materiály IX mezinárodní vědecko - praktická konference «Efektivní nástroje moderních věd – 2013». - Díl 40. Matematika: Praha. Publishing House «Education and Science». – Pp. 54-57.

84. Masich I.S. Random and greedy search algorithms for conditional pseudo-Boolean optimization // Материали за 9-а международна научна практична конференция, «Новината за напреднали наука». Том 53. Математика. – София: «Бял ГРАД-БГ». 2013. – Pp. 49-51.

85. Антамошкин А. Н. Регулярная оптимизация псевдобулевых функций. – Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та. – 1989. – 284 с.

86. Антамошкин А. Н., Рассохин В. С. Оптимизация полимодальных псевдобулевых функций // ОФАП Минвуза РСФСР. Инв. № 85119. М., 1985. – 43 с.

87. Antamoshkin A. Regular optimization of pseudoboolean functions // System Modelling and Optimization. – Budapest. – 1985. – Pp. 17-18.

88. Масич И. С. Регулярный алгоритм поиска граничных точек в задаче условной оптимизации монотонных псевдобулевых функций // «Совершенствование технологий поиска и разведки, добычи и переработки полезных ископаемых»: Сб. материалов Всероссийской научно-технической конференции. – Красноярск: КрасГАЦиЗ. – 2003. – С. 170-172.

89. Масич И. С. Решение задач условной псевдобулевой оптимизации посредством обобщенных штрафных функций // Вестник молодых ученых. 2004. № 4. 2004. С. 63-69.

90. Масич И. С. Приближенные алгоритмы поиска граничных точек для задачи условной псевдобулевой оптимизации // Вестник СибГАУ. 2006. № 1(8). С. 39-43.

91. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-completeness. – San Francisco: W. H. Freeman and Company. – 1979.

92. Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P. Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations // Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers. – 1998. – 460 p.

93. Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G. Computational Complexity of Discrete Optimization Problems // Annals of Discrete Mathematics. 1979. No. 4. Pp. 121-140.

94. Генс Г. В., Левнер Е. В. Дискретные оптимизационные задачи и эффективные приближенные алгоритмы (обзор) // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1976. № 6. С. 84-92.

95. Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Рощин В. А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации. – Киев: Наукова думка. – 1981. – 272 с.

96. Финкельштейн Ю. Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. – М.: Наука. – 1976. – 264 с.

97. Хачатуров В. Р. Аппроксимационно-комбинаторный метод и некоторые его приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 14. № 6. С. 1464-1487.

98. Лбов Г. С. Выбор эффективной системы зависимых признаков – В кн.: Вычислительные системы. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1965. – Вып. 19. – С. 21-34.

99. Лбов Г. С. Программа "Случайный поиск с адаптацией для выбора эффективной системы зависимых признаков" // В кн.: Геология и математика. – Новосибирск: Наука. – 1970. – С. 204-219.

100. Foldes S., Hammer P. L. Disjunctive and conjunctive normal forms of pseudo-Boolean functions // Research Report RRR 1-2000. – Piscataway, NJ: Rutgers University Center for Operations Research. – 2000.

101. Foldes S., Hammer P. L. Monotone, Horn and Quadratic Pseudo-Boolean Functions // Journal of Universal Computer Science. – 2000. No. 6(1). – Pp. 97-104.

102. Antamoshkin A. N., Masich I. S. Identification of pseudo-Boolean function properties // Engineering & automation problems. 2007. No. 2. Pp. 66-69.

103. Масич И. С. Методы определения свойств алгоритмически заданных псевдобулевых функций // Materialy VII Miedzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji “Perspektywiczne opracowania sa nauka i technikami. 2011. Vol. 51. Matematyka. – Przemysl: Nauka i studia. 2013. – Pp. 84-85.

104. Антамошкин А. Н., Масич И. С. Регулярные алгоритмы для задач условной псевдобулевой оптимизации // САКС-2001: Материалы Международной научно-практической конференции. Ч.2. – Красноярск, 2001. – С. 328-330.

105. Масич И. С. Регулярный алгоритм поиска граничных точек в задаче условной оптимизации монотонных псевдобулевых функций // «Совершенствование технологий поиска и разведки, добычи и переработки полезных ископаемых»: Сб. материалов Всероссийской научно-технической конференции. – Красноярск: КрасГАЦиЗ. – 2003. – С. 170-172.

106. Масич И. С. Сравнительная эффективность регулярных процедур условной оптимизации псевдобулевых функций // Вестник НИИ Систем управления, волновых процессов и технологий. 2002. Вып. 8. С. 160-177.

107. Масич И. С. Алгоритмы случайного поиска для условной оптимизации псевдобулевых функций // VII Королёвские чтения: Всероссийская научная конференция: Тезисы докладов. Том I. – Самара, 2003. – С. 42-43.

108. Масич И. С. Случайный поиск граничных точек в задаче условной псевдобулевой оптимизации // XI Туполевские чтения: Всероссийская научная конференция: Том III. – Казань, 2003. – С. 14.

109. Антамошкин А. Н., Масич И. С. Гриди алгоритмы и локальный поиск для условной псевдобулевой оптимизации // Исследовано в России. 2003. № 177. С. 2143-2149.

110. Feo T., Resende M. G. Greedy Randomized Adaptive Search Procedures // Journal of Global Optimization. 1995. No. 6. Pp. 109-133.

111. Masich I. S. Comparative efficiency or two schemes of local search in the optimization of pseudo-Boolean functions // Materials of VIII International Scientific-Practical Conference "Actualni vymozenosti vedy - 2014. – Díl. 13. Matematika. – Praha: Publishing House «Education and Science», 2014. – Pp. 21-24.

112. Masich I. S. Search algorithms for combinatorial optimization in diagnosis and prognosis problems // Materiály VIII mezinárodní vědecko - praktická konference «Dny vědy - 2012». – Díl 82. Matematika. – Praha: Publishing House «Education and Science», 2012. – Pp. 63-65.

113. Masich I. S. Combinatorial optimization in foundry production planning // Вестник СибГАУ. 2009. № 2(23). С. 40-44.

114. Антамошкин А. Н., Масич И. С., Кузьмич Р. И. Комбинаторная оптимизация при логической классификации: монография. – Красноярск: Красноярский государственный аграрный университет, 2015. – 130 с.

References

1. Crama Y., Hammer P. L. *Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications*. New York, Cambridge University Press, 2011, 687 p.

2. Kazakovtsev L. A. Podkhody k avtomatizatsii zadach planirovaniia assortimenta na torgovykh predpriiatiiakh [Approaches to Automating Tasks of Assortment Planning in Trade]. *Vestnik NII Sistem upravleniia, volnovykh protsessov i tekhnologii,* 2000, no. 5 (in Russian).

3. Imanuilov P. A., Purtikov V. A. Reshenie zadachi formirovaniia kreditnogo portfelia banka metodom Miver [Solution of the Problem of Formation of the Loan Portfolio by Miver]. *Vestnik NII Sistem upravleniia, volnovykh protsessov i tekhnologii,* 2000, no. 5 (in Russian).

4. Ashrafi N., Berman O., Cutler M. Optimal Design of Large Software Systems Using N-Version Programming. *In IEEE Transactions on Reliability*. 1994, vol. 43, no. 2, pp. 344-350.

5. Avizienis A. The Methodology of N-Version Programming. *Software Fault Tolerance*. Edited by M. R. Lyu. Chichester, Wiley, 1995, pp. 23-47.

6. Antamoshkin A. N. *Optimizatsiia funktsionalov s bulevymi peremennymi* [Optimizing of Functionals with Boolean Variables]. Tomsk, Tomsk University, 1987, 218 p. (in Russian).

7. Masich I. S. Metod vetvei i granits v zadache optimizatsii sistem otkazoustoichivogo programmnogo obespecheniia [Branch and Bound Method for the Problem of Optimization Systems of Failover Software]. *Nauchnaia sessiia TUSUR. Materialy dokladov mezhregional'noi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Scientific Session TUSUR. Proceedings of the Inter-Regional Scientific and Technical Conference]. Tomsk, 2002, pp. 31-34 (in Russian).

8. Masich I. S. Multi-version Methods of Software Reliability Growth in Intelligence Systems. *Intelligent Systems: Proceeding of the Fifth International Symposium*. Moscow, BMSTU, 2002, pp. 74-76.

9. Sistemnyi analiz: proektirovanie, optimizatsiia i prilozheniia [System Analysis, Design and Optimization], edited by A. N. Antamoshkin, Krasnoyarsk, SAA, 1996 (in Russian).

10. Iudin D. B., Goriashko A. P., Nemirovskii A. S. *Matematicheskie metody optimizatsii ustroistv i algoritmov ASU* [Mathematical Methods of Optimization Algorithms and Automation Devices]. Moscow, Radio i sviaz' [Radio and Communications], 1982, 288 p. (in Russian).

11. Barahona F., Grotschel M., Junger M., Reinelt G. An Application of Combinatorial Optimization to Statistical Physics and Circuit Layout Design, *Operation Research,* 1988, no. 36, pp. 493-513.

12. *System Analysis, Design and Optimization. An Introduction*, general editing by A. Žilinskas. Krasnoyarsk, 1993, 203 p.

13. Masich I. S. Poiskovye algoritmy psevdobulevoi optimizatsii v zadachakh diagnostiki i prognozirovaniia [Search Algorithms Pseudoboolean Optimization in Problems of Diagnosis and Prognosis]. *Sbornik trudov 9 Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Issledovanie, razrabotka i primenenie vysokikh tekhnologii v promyshlennosti»* [Proceedings of the 9 International Scientific and Practical Conference "Research, Development and Application of High Technologies in the Industry"], vol. 3. St. Petersburg, 2010, pp. 89-90. (in Russian).

14. Karp R. M., Miller R. G., Thatcher J. W. Reducibility Among Combinatorial Problems, *Journal of Symbolic Logic*. 1975, no. 40 (4), pp. 618-619.

15. Ranyard R. H. An Algorithm for Maximum Likelihood Ranking and Slater's i From Paired Comparisions. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* 1976, no. 29, pp. 242-248.

16. Rao M. R. Cluster Analysis and Mathematical Programming. *Journal of the American Statistical Association,* 1971, vol. 66, pp. 622-626.

17. Masich I. S. Poiskovye algoritmy kombinatornoi optimizatsii v zadachakh klassifikatsii dannykh [Search Algorithms of Combinatorial Optimization Problems in Data Classification]. *Sbornik statei XI Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Fundamental'nye i prikladnye issledovaniia, razrabotka i primenenie vysokikh tekhnologii v promyshlennosti»* [Proceedings of XI International Scientific-Practical Conference "Fundamental and Applied Research, Development and Application of High Technologies in the Industry"], vol. 3. St. Petersburg, 2011, pp. 91-92 (in Russian).

18. Hammer P. L., Shliffer E. Applications of Pseudo-Boolean Methods to Economic Problems. *Theory and decision,* 1971, no. 1, pp. 296-308.

19. Masich I. S., Kraeva E. M. Logicheskie algoritmy klassifikatsii v zadachakh upravleniia sel'skokhoziaistvennoi deiatel'nost'iu [Logical Classification Algorithms in Control Agricultural Activity]. *Innovatsionnye tendentsii razvitiia rossiiskoi nauki: materialy VI mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Innovative trends in the development of Russian science: Proceedings of the VI International Scientific and Practical Conference]. Krasnoyarsk, 2013, pp. 123-125 (in Russian).

20. Hillier F. S. *The Evaluation of Risky Interrelated Investments*. Amsterdam, North-Holland Publishing, 1969.

21. Laughhunn D. J. Quadratic Binary Programming with Applications to Capital Budgeting Problems. *Operations Research,* 1970, no. 18, pp. 454-461.

22. Laughhunn D. J., Peterson D. E. Computational Experience with Capital Expenditure Programming Models under Risk. *Business Finance,* 1971, no. 3, pp. 43-48.

23. Masich I. S. Kombinatornye algoritmy optimizatsii v zadache raspredeleniia zemli pri proizvodstve polevykh kul'tur [Combinatorial Optimization Algorithms in the Problem of Land Distribution in the Production of Field Crops]. *Innovatsionnye tendentsii razvitiia rossiiskoi nauki: materialy VI mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Innovative trends in the development of Russian science: Proceedings of the VI International Scientific and Practical Conference]. Krasnoyarsk, 2013, pp. 125-126 (in Russian).

24. Masich I. S., Kraeva E. M. Logicheskii analiz dannykh i algoritmy raspoznavaniia v zadachakh upravleniia sel'skokhoziaistvennoi deiatel'nost'iu [Logical Data Analysis and Pattern Recognition Algorithms in Control Agricultural Activity]. *Nauka i obrazovanie: opyt, problemy, perspektivy razvitiia: materialy mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Science and education: experience, problems and perspectives of development: Proceedings of the International Scientific-Practical Conference]. Krasnoyarsk, 2013, pp. 301-303 (in Russian).

25. Weingartner H. M. Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis. *Management Science,* 1966, no. 12, pp. 485-516.

26. Masich I. S. Model' i algoritmy optimizatsii dlia zadachi raspredeleniia zemli pri proizvodstve polevykh kul'tur [Model and Optimization Algorithms for the Problem of Land Distribution in the Production of Field Crops]. *Nauka i obrazovanie: opyt, problemy, perspektivy razvitiia: materialy mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Science and education: experience, problems and perspectives of development: Proceedings of the International Scientific-Practical Conference]. Krasnoyarsk, 2013, pp. 303-304 (in Russian).

27. Hammer P. L. Pseudo-Boolean Remarks on Balanced Graphs. *International Series of Numerical Mathematics,* 1977, no. 36, pp. 69-78.

28. Ebenegger Ch., Hammer P. L., de Werra D. Pseudo-Boolean Functions and Stability of Graphs. *Annals of Discrete Mathematics,* 1984, no. 19, pp. 83-97.

29. Masich I. S. Algoritmy kombinatornoi optimizatsii dlia planirovaniia zagruzki liteinogo proizvodstva [Combinatorial Optimization Algorithms for Capacity Planning Foundry]. *Materialy VII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Tatishchevskie chteniia: aktual'nye problemy nauki i praktiki»* [Proceedings of the VII International scientific-practical conference "Tatishchev read: actual problems of science and practice"]. Tolyatti, 2010, pp.3-10 (in Russian).

30. Crama Y. Combinatorial Optimization Models for Production Scheduling in Automated Manufacturing Systems. *European Journal of Operational Research*. 1997, no. 99, pp. 136-153.

31. Antamoshkin A. N., Degterev D. A., Masich I. S. Reguliarnyi algoritm optimizatsii zagruzki oborudovaniia [Regular Optimization Algorithm Loading Equipment]. *Trudy konf. «Informatsionnye nedra Kuzbassa»* [Proceedings of the Conference "Information bowels of Kuzbass"]. Kemerovo, 2003, pp. 59-61 (in Russian).

32. Bilbao J. M. *Cooperative Games on Combinatorial Structures*. Norwell, Massachusetts, Kluwer Academic Publishers, 2000.

33. Hammer P. L., Holzman R. Approximations of Pseudo-Boolean Functions: Applications to Game Theory. *Methods and Models of Operations Research,* 1992, no. 36, pp. 3-21.

34. Crama Y., Hammer P. L. Bimatroidal Independence Systems. *Mathematical Methods of Operations Research*. 1989, vol. 33, no. 3, pp. 149-165.

35. Welsh D. J. A. *Matroid Theory*. London, Academic Press, 1976.

36. Fraenkel A. S., Hammer P. L. Pseudo-Boolean Functions and Their Graphs. *Annals of Discrete Mathematics,* 1984, no. 20, pp. 137-146.

37. Hammer P. L., Hansen pp., Simeone B. Upper Planes of Quadratic 0-1 Functions and Stability in Graphs. *Nonlinear Programming*, 1981, no. 4, pp. 395-414.

38. Nieminen J. A Linear Pseudo-Boolean Viewpoint on Matching and Other Central Concepts in Graph Theory. *Zastosowania Matematyki*, 1974, no. 14, pp. 365-369.

39. Masich I. S. Otbor sushchestvennykh faktorov v vide zadachi psevdobulevoi optimizatsii [The Selection of the Essential Factors in the Form of Pseudo-Boolean Optimization Problem]. *Reshetnevskie chteniia: Tez. dokl. VII Vseros. nauch. konf.* [Reshetnev reading: Proceedings of the VII All-Russian Scientific Conference]. Krasnoyarsk, 2003, pp. 234-235 (in Russian).

40. Masich I. S. Lokal'naia optimizatsiia dlia zadachi vybora informativnykh faktorov [Local Optimization for the Problem of the Choice of Informative Factors]. *Nauka. Tekhnologii. Innovatsii. Materialy dokladov vserossiiskoi nauchnoi konferentsii* [Science. Technologies. Innovation. Proceedings of the All-Russian Scientific Conference]. Novosibirsk, 2003, vol. 1, pp. 50-51 (in Russian).

41. Masich I. S. Povyshenie kachestva raspoznavaniia logicheskikh algoritmov klassifikatsii putem otbora informativnykh zakonomernostei [Improving the Quality of Recognition Logic Classification Algorithms by Selecting Informative Patterns]. *Informatsionnye sistemy i tekhnologii: Materialy Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Information Systems and Technology: Proceedings of the International scientific and technical conference]. Krasnoyarsk, 2012, pp. 149-153 (in Russian).

42. Masich I. S. Zadachi optimizatsii i ikh svoistva v logicheskikh algoritmakh raspoznavaniia [Optimization Problems and Their Properties in Logical Recognition Algorithms]. *Problemy optimizatsii i ekonomicheskie prilozheniia: materialy V Vserossiiskoi konferentsii* [Problems of optimization and economic applications: Proceedings of the V All-Russian Conference]. Omsk, 2012 (in Russian).

43. Masich I. S. Kombinatornaia optimizatsiia i logicheskie algoritmy klassifikatsii v zadache prognozirovaniia oslozhnenii infarkta miokarda [Combinatorial Optimization Algorithms and Logical Classification Task of Predicting Complications of Myocardial Infarction]. *Innovatsionnye tendentsii razvitiia rossiiskoi nauki: materialy III Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Innovative trends in the development of Russian science: Proceedings of the III International Scientific-Practical Conference]. Krasnoyarsk, 2010, pp. 276-280 (in Russian).

44. Hammer P. L., Rudeanu S. *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*. Berlin, Springer-Verlag; New York, Heidelberg, 1968, 310 p.

45. Boros E., Hammer P. L. Pseudo-Boolean Optimization. *Discrete Applied Mathematics*, 2002, no. 123(1-3), pp. 155-225.

46. Beresnev V. L., Ageev A. A. Algoritmy minimizatsii dlia nekotorykh klassov polinomov ot bulevykh peremennykh [Minimization Algorithms for Some Classes of Polynomials in Boolean Variables]. *Modeli i metody optimizatsii* [Models and methods of optimization]. Novosibirsk, Nauka, 1988, no. 10, pp. 5-17 (in Russian).

47. Grishukhin V. P. *Polinomial'nost' v prosteishei zadache razmeshcheniia* [Polynomial in the Simplest Problem of Accommodation]. Preprint TsEMI AN SSSR [Preprint CEMI AS USSR]. Moscow, 1987, 64 p. (in Russian).

48. Kovalev M. M. Diskretnaia optimizatsiia (tselochislennoe programmirovanie) [Discrete Optimization (Integer Programming)]. Minsk, Publishing house of BSU, 1977, 191 p. (in Russian).

49. Korbut A. A., Finkel'shtein Iu. Iu. Diskretnoe programmirovanie [Discrete Programming]. Moscow, Nauka, 1969, 389 p. (in Russian).

50. Allemand K., Fukuda K., Liebling T. M., Steiner E. A Polynomial Case of Unconstrained Zero-One Quadratic Optimization, *Mathematical Programming*, Ser. A, 2001, no. 91, pp. 49-52.

51. Barth P. *A Davis-Putnam Based Enumeration Algorithm for Linear Pseudo-Boolean Optimization*. Technical Report MPI-I-95-2-003. Saarbrücken, Max-Planck-Institut für Informatik, 1995, 19 p.

52. Crama Y. Recognition Problems for Special Classes of Polynomials in 0-1 Variables. *Mathematical Programming*, 1989, no. 44, pp. 139-155.

53. Crama Y., Hansen P., Jaumard B. The Basic Algorithm for Pseudo-Boolean Programming Revisited. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, no. 29, pp. 171-185.

54. Werra D. De, Hammer P. L., Liebling T., Simeone B. From linear separability to unimodality: A Hierarchy of Pseudo-Boolean Functions, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1998, no. 1, pp. 174-184.

55. Hammer P. L., Hansen P., Pardalos P. M., Rader D. J. *Maximizing the Product of Two Linear Functions in 0-1 Variables*, Research Report 2-1997. Piscataway, NJ: Rutgers University Center for Operations Research, 1997.

56. Hammer P. L., Peled U. N. On the Maximization of a Pseudo-Boolean Function. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1972, vol. 19, no. 2, pp. 265-282.

57. Hansen P., Jaumard B., Mathon V. Constrained Nonlinear 0-1 Programming. *Journal on Computing*, 1993, no. 5, pp. 97-119.

58. Martello S., Toth P. The 0-1 Knapsack Problem. *Combinatorial Optimization*. New York, Wiley, 1979, pp. 237-279.

59. Padberg M. W. A Note on Zero-One Programming. *Operations Research*, 1975, no. 23, pp. 833-837.

60. Padberg M. W. Covering, Packing and Knapsack Problems. *Annals of Discrete Mathematics*, 1979, no. 4, pp. 265-287.

61. Wegener I., Witt C. On the Optimization of Monotone Polynomials by Simple Randomized Search Heuristics. *Procs. of GECCO 2003*, pp. 622-633.

62. Adams W. P., Sherali H. D. A Tight Linearization and an Algorithm for Zero-One Quadratic Programming Problems. *Management Science*, 1986, vol. 32, no. 10, pp. 1274-1290.

63. Boros E., Hammer P. L. *A Max-Flow Approach to Improved Roof Duality in Quadratic 0-1 Minimization*. Research Report RRR 15-1989, Piscataway, NJ, Rutgers University Center for Operations Research, 1989.

64. Glover F., Woolsey R. E. Further Reduction of Zero-One Polynomial Programs to Zero-One Linear Programming Problems. *Operations Research*, 1973, no. 21, pp. 156-161.

65. Hansen P., Lu S. H., Simeone B. On the Equivalence of Paved Duality and Standard Linearization in Nonlinear 0-1 Optimization. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, no. 29, pp. 187-193.

66. Watters L. G. Reduction of Integer Polynomial Problems to Zero-One Linear Programming Problems. *Operations Research*, 1967, no. 15, pp. 1171-1174.

67. Boros E., Crama Y., Hammer P. L. Chvátal Cuts and Odd Cycle Inequalities in Quadratic 0-1 Optimization. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1992, no. 5, pp. 163-177.

68. Boros E., Crama Y., Hammer P. L. Upper Bounds for Quadratic 0-1 Maximization. *Operation Research Letters*, 1990, no. 9, pp. 73-79.

69. Boros E., Hammer P. L. A Max-Flow Approach to Improved Lower Bounds for Quadratic Unconstrained Binary Optimization (QUBO). *Discrete Optimization*, 2008, vol. 2, no. 5, pp. 501-529.

70. Boros E., Hammer P. L. Cut-Polytopes, Boolean Quadratic Polytopes and Nonnegative Quadratic Pseudo-Boolean Functions. *Mathematics of Operations Research*, 1993, no. 18, pp. 245-253.

71. Hammer P. L., Hansen P., Simeone B. Roof Duality, Complementation and Persistency in Quadratic 0-1 Optimization. *Mathematical Programming*, 1984, no. 28, pp. 121-155.

72. Hammer P. L., Simeone B. Quadratic Functions of Binary Variables. *Combinatorial Optimization: Lecture Notes in Mathematics.* Berlin, Springer-Verlag; New York, Heidelberg, 1989, vol. 1403.

73. Papadimitriou C. H., Steiglitz K. *Combinatorial Optimization*. New York, Dover Publications, 1998.

74. Masich I. S. *Poiskovye algoritmy uslovnoi psevdobulevoi optimizatsii* [Search Algorithms for Conditional Pseudoboolean Optimization]. Krasnoyarsk, Siberian State Aerospace University, 2013, 160 p. (in Russian).

75. Grinchenko S. N. Metod «prob i oshibok» i poiskovaia optimizatsiia: analiz, klassifikatsiia, traktovka poniatiia «estestvennyi otbor» [The Method of "Trial and Error" and Search Engine Optimization: Analysis, Classification, Interpretation of the Concept of "Natural Selection"]. *Investigated in Russia*, 2003, no. 104, pp. 1228-1271 (in Russian).

76. Rastrigin L. A. *Adaptatsiia slozhnykh sistem* [Adaptation of Complex Systems]. Riga, Zinatne Publ., 1981, 375 p. (in Russian).

77. Grinchenko S. N. Ierarkhicheskaia optimizatsiia v prirodnykh i sotsial'nykh sistemakh: selektsiia variantov prisposobitel'nogo povedeniia i evoliutsii sistem "dostatochno vysokoi slozhnosti" na osnove adaptivnykh algoritmov sluchainogo poiska [Hierarchical Optimization of Natural and Social Systems: the Selection of Variants Of Adaptive Behavior And Evolutionary Systems "Rather High Difficulty" on the Basis of Adaptive Random Search Algorithms]. *Investigated in Russia*, 2000, no. 108, pp. 1421-1440 (in Russian).

78. Grinchenko S. N. Sluchainyi poisk, adaptatsiia i evoliutsiia: ot modelei biosistem - k iazyku predstavleniia o mire [Random Search, Adaptation And Evolution: from Models of Biological Systems to the Language of View of the World]. *Investigated in Russia*, 1999, no. 10 (in Russian).

79. Goldberg D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Boston: Addison-Wesley, 1989.

80. Schwefel H.-P. *Evolution and Optimum Seeking*. New York, Whiley, 1995, 612 p.

81. Björklund H., Petersson V., Vorobjov S. *Experiments with Iterative Improvement Algorithms on Completely Unimodal Hypercubes*. Technical report 2001-017. Uppsala, Sweden, Uppsala University, 2001, 30 p.

82. Björklund H., Sandberg S., Vorobjov S. *Optimization on Completely Unimodal Hypercubes*. Technical report 2002-018. Uppsala, Sweden, Uppsala University, 2002, 39 p.

83. Masich I. S. Heuristic Algorithms for Searching Boundary Points in Pseudo-Boolean Optimization Problems. *Proceedings of IX International Scientific - Practical Conference "Effective Tools of Modern Science - 2013»*, Mathematics. Praha, Publishing House «Education and Science», 2013, vol. 40, pp. 54-57.

84. Masich I.S. Random and Greedy Search Algorithms for Conditional Pseudo-Boolean Optimization. *Proceedings of the 9th International Scientific Practical Conference "New Advanced Science"*, Mathematics. Sofia, 2013, vol. 53, pp. 49-51.

85. Antamoshkin A. N. *Reguliarnaia optimizatsiia psevdobulevykh funktsii* [Regular Optimization of Pseudo-Boolean Functions]. Krasnoyarsk, Krasnoyarsk University, 1989, 284 p. (in Russian).

86. Antamoshkin A. N., Rassokhin V. S. *Optimizatsiia polimodal'nykh psevdobulevykh funktsii* [Optimization of Multimodal Pseudo-Boolean Functions] // OFAP Ministry of Higher Education of the RSFSR. Inv. no. 85119. Moscow. 1985, 43 p. (in Russian).

87. Antamoshkin A. Regular Optimization of Pseudoboolean Functions. *System Modelling and Optimization*. Budapest, 1985, pp. 17-18.

88. Masich I. S. Reguliarnyi algoritm poiska granichnykh tochek v zadache uslovnoi optimizatsii monotonnykh psevdobulevykh funktsii [Regular Search Algorithm of the Boundary Points in a Constrained Optimization Problem of Pseudo-Monotone Functions]. *«Sovershenstvovanie tekhnologii poiska i razvedki, dobychi i pererabotki poleznykh iskopaemykh»: Sb. materialov Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* ["Improvement of Technologies for Prospecting and Exploration, Mining and Processing Mineral Resources": Proceedings of All-Russian Scientific and Technical Conference]. Krasnoyarsk, 2003, pp. 170-172 (in Russian).

89. Masich I. S. Reshenie zadach uslovnoi psevdobulevoi optimizatsii posredstvom obobshchennykh shtrafnykh funktsii [Solving problems of conditional pseudo-optimization by means of generalized penalty functions]. Vestnik molodykh uchenykh [Bulletin of Young Scientists], 2004, no. 4, pp. 63-69 (in Russian).

90. Masich I. S. Priblizhennye algoritmy poiska granichnykh tochek dlia zadachi uslovnoi psevdobulevoi optimizatsii [Approximate Algorithms for Finding the Boundary Points for the Pseudo-Problem of Conditional Optimization]. *Vestnik SibGAU* [Bulletin of Siberian State Aerospace University], 2006, vol. 1(8), pp. 39-43 (in Russian).

91. Garey M. R., Johnson D. S. *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-completeness*. San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1979.

92. Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahl P. *Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations*, Norwell, Massachusetts, Kluwer Academic Publishers, 1998, 460 p.

93. Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G. Computational Complexity of Discrete Optimization Problems. *Annals of Discrete Mathematics*, 1979, no. 4, pp. 121-140.

94. Gens G. V., Levner E. V. Diskretnye optimizatsionnye zadachi i effektivnye priblizhennye algoritmy (obzor) [Discrete Optimization Problems and Efficient Approximate Algorithms (Review)]. *Izvestiia AN SSSR. Tekhnicheskaia kibernetika* [News of the Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics], 1976, no. 6, pp. 84-92 (in Russian).

95. Sergienko I. V., Lebedeva T. T., Roshchin V. A. *Priblizhennye metody resheniia diskretnykh zadach optimizatsii* [Approximate Methods for Solving Discrete Optimization Problems]. Kiev, Naukova dumka, 1981, 272 p. (in Russian).

96. Finkel'shtein Iu. Iu. *Priblizhennye metody i prikladnye zadachi diskretnogo programmirovaniia* [Approximate Methods and Applied Problems of Discrete Programming]. Moscow, Nauka, 1976, 264 p. (in Russian).

97. Khachaturov V. R. Approksimatsionno-kombinatornyi metod i nekotorye ego prilozheniia [Approximation-Combinatorial Method and Some Applications]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Journal of Numerical Mathematics and Mathematical Physics], 1974, vol. 14, no. 6, pp. 1464-1487 (in Russian).

98. Lbov G. S. Vybor effektivnoi sistemy zavisimykh priznakov [Choosing an Effective System of Dependent Features]. *Vychislitel'nye sistemy* [Computer Systems], 1965, no. 19, pp. 21-34 (in Russian).

99. Lbov G. S. Programma "Sluchainyi poisk s adaptatsiei dlia vybora effektivnoi sistemy zavisimykh priznakov" [The Program "Random Search with Adaptation to Select an Effective System of Dependent Attributes"]. *Geologiia i matematika* [Geology and Mathematics]. Novosibirsk, Nauka, 1970, pp. 204-219 (in Russian).

100. Foldes S., Hammer P. L. *Disjunctive and Conjunctive Normal Forms of Pseudo-Boolean Functions*. Research Report RRR 1-2000. Piscataway, NJ, Rutgers University Center for Operations Research, 2000.

101. Foldes S., Hammer P. L. Monotone, Horn and Quadratic Pseudo-Boolean Functions. *Journal of Universal Computer Science*, 2000, no. 6(1), pp. 97-104.

102. Antamoshkin A. N., Masich I. S. Identification of Pseudo-Boolean Function Properties. *Engineering & automation problems*, 2007, no. 2, pp. 66-69.

103. Masich I. S. Methods for Determination of Properties of Algorithmically Defined Pseudoboolean Functions. *Proceedings of the VII International Scientific-Practical Conference "Prospective Studies of Science and Techniques - 2011"*, Mathematics. Przemysl, Studying, 2013, vol. 51, pp. 84-85.

104. Antamoshkin A. N., Masich I. S. Reguliarnye algoritmy dlia zadach uslovnoi psevdobulevoi optimizatsii [Regular Algorithms for Constrained Pseudo-Boolean Optimization Problems]. *SAKS-2001: Materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Proceedings of the International Scientific and Practical Conference]. Krasnoyarsk, 2001, vol. 2, pp. 328-330 (in Russian).

105. Masich I. S. Reguliarnyi algoritm poiska granichnykh tochek v zadache uslovnoi optimizatsii monotonnykh psevdobulevykh funktsii [Regular Search Algorithm of the Boundary Points in a Constrained Optimization Problem of Pseudoboolean Monotone Functions]. *«Sovershenstvovanie tekhnologii poiska i razvedki, dobychi i pererabotki poleznykh iskopaemykh»: Sb. materialov Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* ["Improvement of technologies for prospecting and exploration, mining and processing mineral resources": Proceedings of All-Russian Scientific and Technical Conference]. Krasnoyarsk, KrasGATsiZ Publ., 2003, pp. 170-172 (in Russian).

106. Masich I. S. Sravnitel'naia effektivnost' reguliarnykh protsedur uslovnoi optimizatsii psevdobulevykh funktsii [Comparative Efficacy of the Regular Procedures for of Pseudoboolean Constrained Optimization of Functions]. *Vestnik NII Sistem upravleniia, volnovykh protsessov i tekhnologii* [Bulletin of the Research Institute of Control Systems, Wave Processes and Technology], 2002, no. 8, pp. 160-177 (in Russian).

107. Masich I. S. Algoritmy sluchainogo poiska dlia uslovnoi optimizatsii psevdobulevykh funktsii [Random Search Algorithms for Constrained Optimization of Pseudoboolean Functions]. *VII Korolevskie chteniia: Vserossiiskaia nauchnaia konferentsiia* [VII Korolyev Reading: Proceedings of All-Russian Scientific Conference]. Samara, 2003, vol. 1, pp. 42-43 (in Russian).

108. Masich I. S. Sluchainyi poisk granichnykh tochek v zadache uslovnoi psevdobulevoi optimizatsii [Random Search of the Boundary Points in a Constrained Pseudo-Boolean Optimization Problem]. *XI Tupolevskie chteniia: Vserossiiskaia nauchnaia konferentsiia* [XI Tupolev Reading: Scientific Conference]. Kazan, 2003, vol. 3, pp. 14 (in Russian).

109. Antamoshkin A. N., Masich I. S. Gridi algoritmy i lokal'nyi poisk dlia uslovnoi psevdobulevoi optimizatsii [Greedy and Local Search Algorithms for the Conditional Pseudoboolean Optimization]. *Investigated in Russia*, 2003, no. 177, pp. 2143-2149 (in Russian).

110. Feo T., Resende M. G. Greedy Randomized Adaptive Search Procedures. *Journal of Global Optimization* 6, 1995, pp. 109-133.

111. Masich I. S. Comparative Efficiency or Two Schemes of Local Search in the Optimization of Pseudo-Boolean Functions. *Proceedings of VIII International Scientific-Practical Conference "Current Achievements in Science – 2014"*, Matematics. Praha, Publishing House «Education and Science», 2014, vol. 13, pp. 21-24 (in Russian).

112. Masich I. S. Search Algorithms for Combinatorial Optimization in Diagnosis and Prognosis Problems. *Proceedings of the VIII International Scientific - Practical Conference «Days of Science - 2012»,* Mathematics. Praha, Publishing House «Education and Science», 2012, vol. 82, pp. 63-65.

113. Masich I. S. Combinatorial Optimization in Foundry Production Planning. *Vestnik SibGAU* [Bulletin of Siberian State Aerospace University], 2009, no. 2(23), pp. 40-44.

114. Antamoshkin A. N., Masich I. S., Kuz'mich R. I. *Kombinatornaia optimizatsiia pri logicheskoi klassifikatsii* [Combinatorial Optimization at the Logical Classification]. Krasnoyarsk, Krasnoyarsk State Agrarian University, 2015, 130 p. (in Russian).

Статья поступила 22 декабря 2015 г.

Информация об авторах

Антамошкин Александр Николаевич – доктор технических наук, профессор. Профессор кафедры системного анализа и исследования операций. Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева. Область научных интересов: моделирование и оптимизация сложных систем. Тел.: +7 (391) 2919141. E-mail: oleslav@mail.ru

Масич Игорь Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент. Доцент кафедры системного анализа и исследования операций. Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева. Область научных интересов: комбинаторная оптимизация, интеллектуальный анализ данных. Тел.: +7 (391) 2919141. E-mail: i-masich@yandex.ru

Адрес: 660037, Россия, г. Красноярск, пр. им. газеты Красноярский рабочий, д. 31.

Search Algorithms for Constrained Pseudo-Boolean Optimization

A. N. Antamoshkin, I. S. Masich

Problem statement*. The issue is the problem of optimizing real functions of binary variables that is the so-called pseudo-Boolean optimization problem. In many practical problems, possible combinations of variables are restricted by constraints that narrow the set of admissible values of the control variables. At the same time these constraints (and an objective function) often have structural properties, inclusion of which in the optimization process can improve the efficiency of solving such problems. Furthermore, in many real problems of optimization a part of functions (criteria and constraints) or all functions are defined algorithmically, which makes it impossible to apply the standard algorithms and requires the development of search optimization procedures.* ***Purpose****. To justify, construct and research methods for constrained pseudo-Boolean optimization problems with algorithmically given functions.* ***Methods****. Research of properties of the space of Boolean variables and detection of patterns for behavior of pseudo-Boolean functions in the space of Boolean variables. Development of exact regular algorithms that implement properties of specific classes of problems. In the development of regular algorithms, the classes of unimodal, monotone and structurally monotone pseudo-Boolean functions are considered. For large-scale problems research of algorithms based on a random search method that search among the boundary points of the* *feasible set.* ***Results****. The new exact algorithms with analytical estimates of complexity for solving the constrained pseudo-Boolean optimization problems. These algorithms realize information complexity of the problem classes. As well the new approximate algorithms are constructed for constrained optimization of monotone pseudo-Boolean functions with a large number of variables.* ***Practical relevance****. The developed algorithms are useful for solving all practical problems which are reduced to optimization problems of pseudo-Boolean functions. So, the problem of optimizing the capacity utilization of foundry is solved. The developed algorithms are used for finding logical patterns (used for building classifiers) in data that is the constraint pseudo-Boolean optimization problem of large dimension.*

Key words*: pseudo-Boolean functions, optimization, random search, greedy algorithm, regular optimization algorithm.*

Information about Authors

Antamoshkin Alexander Nikolaevich – Dr. habil. of Engineering Science, Professor. Professor at the Department of Systems Analysis and Operations Research. Reshetnev Siberian State Aerospace University. Field of research: complex systems modelling and optimization. Tel.: +7 (391) 2919141. E-mail: oleslav@mail.ru

Masich Igor Sergeevich – Ph.D. of Physico-Mathematical Sciences, Docent. Associate Professor at the Department of Systems Analysis and Operations Research. Reshetnev Siberian State Aerospace University. Field of research: combinatorial optimization, data mining. Tel.: +7 (391) 2919141. E-mail: i-masich@yandex.ru

Address: Russia, 660037, Krasnoyarsk, pr. Krasnoyarskiy rabochiy, 31.