УДК 658.51

Математическая модель функционирования производственных процессов с учетом их особенностей

Догадина Е. П., Холкина Н. Е.

Постановка задачи: *системы массового обслуживания являются стандартной математической моделью для описания многих технических, биологических и других систем. При этом в таких областях, как автоматизация управления производственными процессами, управление мониторингом окружающей среды, планирование боевых действий и т.п., реальные системы характеризуются функционированием в неустановившемся режиме и изменением их параметров в зависимости от состояний системы. Это приводит к необходимости использования математических моделей обслуживания, называемых в дальнейшем нестационарными системами обслуживания и формализуемых с помощью систем дифференциальных уравнений.* ***Целью данной работы*** *является разработка и исследование математической модели функционирования производственных процессов на базе нестационарных систем массового обслуживания, обладающих свойствами ординарности и отсутствия последействия. В работе рассматриваются производственные процессы с последовательной временной и ячеистой пространственной структурой, характерной для мелкосерийного типа производства.* ***Используемые методы:*** *в исследованиях применялись методы аппарата теории массового обслуживания, методы решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, теория Марковских процессов.* ***Результат:*** *разработана и исследована математическая модель функционирования производственных процессов с учетом параметров, изменяющихся во времени. Определены характеристики нестационарного производственного процесса в зависимости от изменения интенсивностей поступления и обслуживания заявок во времени. Использование полученной модели позволяет наиболее полно представлять процесс функционирования производственных процессов с последовательной временной и ячеистой пространственной структурой, характерной для мелкосерийного типа производства.*

Ключевые слова: *система массового обслуживания, нестационарность, производственные процессы.*

Введение

Наиболее полно производственные процессы отображают системы массового обслуживания (СМО). В работе [1] представлена математическая модель простейшего нестационарного потока. Большинство рассматриваемых в теории массового обслуживания моделей укладываются в данную схему. Но при рассмотрении некоторых математических вопросов организации производства и процессов функционирования производства использование данной модели затруднено из-за следующих факторов [2, 5, 6]:

1) Структура системы предполагается неизменной, в то время как реальные системы могут варьировать свои параметры.
2) Исследование проводится чаще всего для установившегося режима работы, хотя для производственных процессов характерно выполнение работ с непостоянным темпом работы, зависящим от многих факторов.

Рассмотрение стационарных моделей ранее было связано с ограничениями прежде всего вычислительного характера, но в настоящее время данное ограничение не носит существенного характера при исследовании большинства систем. В связи с данными недостатками уже существующей модели системы обслуживания [1] необходимо разработать математическую модель производственных процессов с учетом стационарных и нестационарных параметров и критериев. Кроме того, существующие на сегодняшний день системы не в полной мере решают задачу автоматизации управления производственными процессами в связи с появлением новых информационных технологий. Поэтому необходимо разработать математическую модель управления процессами с учетом особенностей процессов (последовательной временной и ячеистой пространственной структуры) в зависимости от их структуры и нестационарных параметров.

Под нестационарной производственной системой будем понимать систему, которая не имеет установившегося режима работы, а также может определяться изменением характеристик процесса поступления заявок и процесса их обслуживания в зависимости от времени и состояния системы [2].

Обобщенная математическая модель функционирования производственных процессов

Для описания функционирования производственных процессов как нестационарных систем массового обслуживания будем использовать следующие основные характеристики: ёмкость источника заявок $N_0(t)$, длина очереди заявок $Q_0(t)$ и число устройств обслуживания $M_0(t)$ [1-3].

В каждый момент времени производственный процесс может находиться в одном из состояний, определяемых такими характеристиками, как число функционирующих устройств обслуживания $M(t)$, число занятых устройств $Z(t)$ и число заявок в очереди $Q(t)$. Пусть $S(m,z,q)$ представляет собой состояние, когда в системе используется m устройств, из них занято обслуживанием z устройств и q заявок находится в очереди.

Для описания интенсивностей поступления заявок в систему и интенсивностей обслуживания заявок введем векторные величины $\lambda(t)$ и $\mu(t)$.

Разработаем математическую модель функционирования производственных процессов с учетом стационарности и нестационарности параметров и критериев на основе построения систем дифференциальных уравнений Колмогорова на рассматриваемом интервале времени функционирования $t \in \{0,T\}$ [1, 2, 4–6].

$$\frac{dp_a(t)}{dt} = -\sum_{\substack{a,b\in N' \\ b\neq a}} d_{ab}(t)\cdot p_a(t) + \sum_{\substack{a,c\in N' \\ c\neq a}} d_{ca}(t)\cdot p_c(t) \qquad (1)$$

где N' – множество пар индексов состояний $N' = \{(a,b)\in N^2 | d_{ab} = (S_a, S_b)\}$ и $N = \{0,1,2,\ldots\}$.

Использование в математической модели переменных a, b, c говорит о том, что система находится в состояниях $S(m_a, z_a, q_a)$, $S(m_b, z_b, q_b)$ и $S(m_c, z_c, q_c)$ соответственно. Интегрирование этой системы дает искомые вероятности как функции времени [2, 3, 7]. Начальное состояние выражено как

$$p_a(0) = p_{a0} > 0, \qquad a \in N. \tag{2}$$

Также необходимо соблюдать условие нормировки

$$\sum_{a \in N} p_a(t) = 1. \tag{3}$$

Данная математическая модель имеет ряд особенностей [2]:

1) характеристики системы и интенсивности поступления и обслуживания заявок представлены в векторной форме, что расширяет круг исследуемых заявок;
2) состояния системы представляют собой состояния, когда в системе используются значения трех характеристик, а именно: число используемых устройств, число занятых под обслуживанием устройств, число заявок, находящихся в очереди.
3) плотности являются функциями характеристик, задающих исходные состояния для перехода, и интенсивностей потоков, происходящих в системе.

Плотность $d_{ab}(a \neq b)$ перехода из состояния S_a в состояние S_b определена следующим образом

$$d_{ab} = \begin{cases} \mu_a(t), b = a - 1, t \in \{0, T\} \\ \lambda_a(t), b = a + 1, t \in \{0, T\} \\ 0, a \neq b, a = 0,1,2...; \end{cases}$$

В работе представлен технологический процесс изготовления изделия громкоговорителя рупорного П-05-01 (рис. 1).

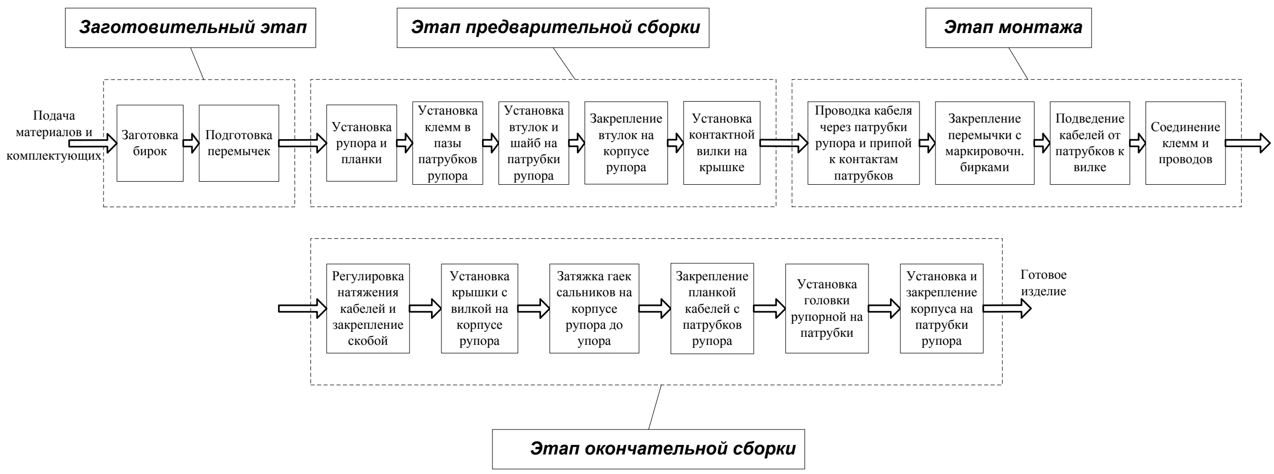


Рис. 1. Структурная схема производства изделия П-05-01

Данный процесс наиболее явно отображает принцип мелкосерийного производства с последовательной временной и ячеистой пространственной структурой.

В зависимости от количества типов персонала, выполняющих один из этапов, реализацию технологического процесса можно представить в виде трех случаев:

1. Каждый этап выполняется последовательно обслуживающим персоналом в течение всего рабочего дня.

2. Операции «Подготовка бирок», «Подготовка проводов» и этап «Предварительная сборка» выполняются параллельно, а этапы «Монтаж» и «Окончательная сборка» идут последовательно.
3. Операции «Подготовка бирок» и «Подготовка проводов» идут последовательно относительно друг друга и параллельно с этапом «Предварительная сборка». Далее этапы «Монтаж» и «Окончательная сборка» идут последовательно.

Работы по производству устройства опишем с помощью разработанных математических моделей (1–3).

Поскольку программная реализация поставленной задачи оптимизации решается в среде MatLab (в которой индексы переменных начинаются с единицы, а не с нуля), то математическая модель функционирования технологического процесса изготовления устройства имеет вид (4–6).

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda(t)p_1(t) + \mu(t)p_2(t);\\
&\frac{dp_i(t)}{dt} = -(\lambda(t) + (i-1)*\mu(t))p_i(t) + \lambda(t)p_{i-1}(t) +\\
&+ i*\mu(t)p_{i+1}(t), i = \overline{2, M};\\
&\frac{dp_{j+M}(t)}{dt} = -(\lambda(t) + M*\mu(t))p_{j+M}(t) + \lambda(t)p_{j+M-1}(t) +\\
&+ M*\mu(t)p_{j+M+1}(t), j = \overline{1, Q};\\
&\frac{dp_{Q+M+1}(t)}{dt} = \lambda(t)p_{Q+M}(t) - M*\mu(t)p_{Q+M+1}(t).
\end{aligned} \tag{4}$$

$$p_k(0) = p_{k0} > 0, \qquad k = \overline{1, M+Q+1}. \tag{5}$$

Кроме того, должно выполняться нормировочное условие.

$$\sum_k p_k(t) = 1, t \in [0, T]. \tag{6}$$

В модели (4–6) $M-$ количество персонала, выполняющего этапы параллельно; $Q-$ длина очереди устройств, необходимых сконструировать; $\lambda(t)-$ интенсивность поступления набора деталей для устройства, распределенная по определенному закону распределения; $\mu(t)-$ интенсивность изготовления устройств из деталей, распределенная по определенному закону распределения; $T-$ рассматриваемое время работы системы, ограниченное 8-мичасовым рабочим днем; p_k- вероятность пребывания системы в состоянии, при котором необходимо изготовить k устройств, $k = \overline{2, M+Q+1}$.

Система (4), (5), (6) является математической моделью функционирования производственных процессов с последовательной временной и ячеистой пространственной структурой.

Состояния нестационарных производственных процессов обычно определяются по числу заявок, находящихся в системе. В общем случае состояния производственных процессов характеризуются вектором параметров, включающего в себя число фаз системы, количество типов заявок и устройств, ёмкость источника заявок и длина очереди в системе и т.п., что приводит к резкому увеличению числа состояний нестационарной системы, а значит и порядка системы дифференциальных уравнений (4).

Из разработанной математической модели функционирования производственных процессов с учетом стационарности и нестационарности параметров, учитываемых в выражениях (1–3), можно получить наиболее распространенные в практическом плане вероятности состояний производственного процесса в установившемся и неустановившемся режимах. Практические задачи с применением производственных процессов в установившихся режимах функционирования рассмотрены в работах [1, 5, 7].

На практике большой интерес представляют процессы производства, использующие в качестве модели системы обслуживания замкнутую систему массового обслуживания. Замкнутая СМО – это система, интенсивность потока поступления заявок которой зависит от самой системы массового обслуживания. Данный тип систем также укладывается в процесс функционирования математической модели процессов с учетом стационарности и нестационарности параметров (1–3). Поэтому для анализа эффективности замкнутой СМО можно применить обобщенную модель (1).

Система уравнений для замкнутой многоканальной нестационарной СМО с ожиданием имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_1(t)}{dt} = -N\lambda(t)p_1(t) + \mu(t)p_2(t)\\
&\frac{dp_i(t)}{dt} = -((N-(i-1))\cdot\lambda(t) + (i-1)\cdot\mu(t))p_i(t) + (N-(i-1)-1)\cdot\lambda(t)p_{i-1}(t) +\\
&\qquad + i\cdot\mu(t)p_{i+1}(t), \quad i=\overline{2,M};\\
&\frac{dp_{j+M}(t)}{dt} = -((N-M-j-1)\cdot\lambda(t) + M\cdot\mu(t))p_{j+M}(t) +\\
&\qquad + (N-M-j)\cdot\lambda(t)p_{j+M-1}(t) + M\cdot\mu(t)p_{j+M+1}(t), \quad j=\overline{1,Q};\\
&\frac{dp_{Q+M+1}(t)}{dt} = (N-M-Q)\cdot\lambda(t)p_{Q+M}(t) - M\cdot\mu(t)p_{Q+M+1}(t);
\end{aligned} \tag{7}$$

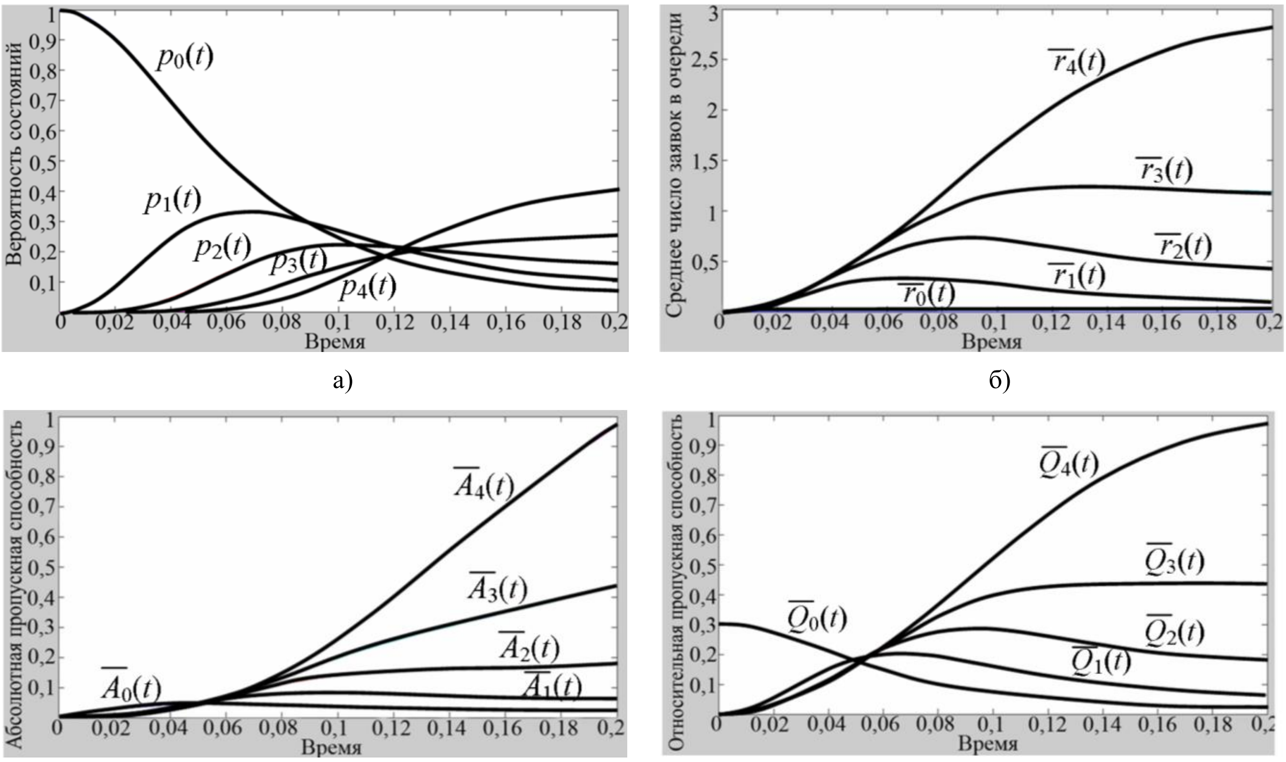
$$p_i(0) = p_{i0} > 0, \qquad i=\overline{1,M+Q+1}. \tag{8}$$

где p_i – вероятность пребывания системы в состоянии, в котором i объектов требуют обслуживания и i каналов заняты их обслуживанием $i=\overline{2,M}$; p_{j+M} – вероятность пребывания системы в состоянии, в котором j объектов требуют обслуживания и находятся в очереди, $j=\overline{1,Q}$; M – число каналов; N – число объектов, ожидающих обслуживание; Q – длина очереди.

Кроме того, должно выполняться нормировочное условие

$$\sum_i p_i(t) = 1, t \in \{0,T\}. \tag{9}$$

В результате получена система дифференциальных уравнений (7) с нормировочным условием (8) и начальными условиями (9).



а) б) в) г)

Рис. 2. Графики распределения характеристик системы: а) вероятностей состояний; б) числа заявок в очереди; в) абсолютной пропускной способности системы; г) относительной пропускной способности системы

С помощью разработанной математической модели функционирования производственных процессов с учетом стационарности и нестационарности параметров, учитываемых в выражениях (1–3), на основании существующих материалов [1, 2, 5] определим дополнительные характеристики системы:

– среднее число функционирующих устройств в момент времени t

$$\overline{m}(t) = \sum_{a \in N} m_a p_a(t);$$

– среднее число занятых каналов и среднее число обслуживаемых заявок в момент времени t

$$\overline{\omega}(t) = \sum_{a \in N} z_a p_a(t);$$

– среднее число заявок в очереди в момент времени t

$$\overline{r}(t) = \sum_{a \in N} q_a p_a(t);$$

– среднее число заявок в системе в момент времени t

$$\overline{z}(t) = \overline{\omega}(t) + \overline{r}(t);$$

– среднее число заявок, которое может обслуживать система в момент времени t (абсолютная пропускная способность системы)

$$\overline{A}(t) = \overline{z}(t) \cdot \mu(t);$$

– средняя доля поступивших заявок, обслуживаемых системой, к моменту времени t заявок (относительная пропускная способность системы)

$$\overline{Q}(t) = \frac{\overline{A}(t)}{\lambda(t)}.$$

На рис. 2 показаны результаты вычислений дополнительных характеристик производственных процессов на базе нестационарной одноканальной системы с ограниченной емкостью очереди ($q = 3$) для числа состояний системы $S = 5$. В работе определены вероятности $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$ нахождения системы в данных состояниях $S_0(t)$, $S_1(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$, $S_4(t)$. Интенсивность поступления и обслуживания заявок изменяется пропорционально времени $t \in \{0 \div 0{,}2\}$.

Выводы

В работе сформулирована математическая модель определения вероятностей состояний системы обслуживания. Каждое состояние системы определено тремя характеристиками: числом функционирующих устройств обслуживания, числом занятых устройств и длиной очереди. На основании этого и правила построения системы дифференциальных уравнений Колмогорова разработана математическая модель реализации производственных процессов и вычислены основные характеристики системы на примере функционирования производственного процесса. Использование полученной модели позволяет наиболее полно представлять процесс функционирования производственных процессов с последовательной временной и ячеистой пространственной структурой, характерной для мелкосерийного типа производства.

Литература

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 336 с.

2. Догадина Е. П., Кропотов Ю. А., Суворова Г. П. Математическая модель определения вероятностей состояний системы обслуживания // Радиотехника. 2009. № 11. С. 103-105.

3. Догадина Е. П., Кропотов Ю. А., Суворова Г. П. Вероятностные модели прогнозирования экологического состояния // Радиотехника. 2009. № 11. С. 106-108.

4. Майоров С. А. Основы теории вычислительных систем. – М.: Высшая школа, 1978. – 408 с.

5. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – М.: Сов. радио, 1971. – 520 с.

6. Догадина Е. П., Кропотов Ю. А. Разработка программного комплекса для выявления зависимостей характеристик систем массового обслуживания на примере распределения вероятностей состояний вычислительной системы во

времени // Методы и устройства передачи и обработки информации. 2009. № 11. С. 336-340.

7. Догадина Е. П., Кропотов Ю. А., Суворова Г. П. Оценка параметров вычислительных процессов при циклическом планировании // Информационные системы и технологии. 2010. № 3 (59). С. 12-19.

References

1. Gnedenko B. V., Kovalenko I. N. *Vvedenie v teoriju massovogo obsluzhivanija* [Introduction to queueing theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 336 p. (in Russian).

2. Dogadina E. P., Kropotov U. A., Suvorova G. P. Mathematical model of the determination of probability of the conditions of the system of the service. *Radiotekhnika*, 2009, no 11, pp. 103-105 (in Russian).

3. Dogadina E. P., Kropotov U. A., Suvorova G. P. Probabilistic models of the forecasting of the ecological condition. *Radiotekhnika*, 2009, no 11, pp. 106-108 (in Russian).

4. Mayorov S. A. *Osnovy teorii vychislitel'nyh sistem* [Bases to theories of the computing systems]. Moscow, Vyisshaya shkola Publ., 1978. 408 p. (in Russian).

5. Saati T. L. *Jelementy teorii massovogo obsluzhivanija i ee prilozhenija* [Elements queueing theory and its exhibits]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1971. 520 p. (in Russian).

6. Dogadina E. P., Kropotov U. A. Development of the programme complex for revealing the dependencies of the features of the systems of mass service on example of the distribution of probability of the conditions of the computing system at time. *Methods and devices of information transmission and processing*, 2009, no 11, pp. 336-340 (in Russian).

7. Dogadina E. P., Kropotov U. A., Suvorova G. P. Estimation parameter computing processes under round-robin planning. *Information systems and technologies*, 2010, no 3(59), pp. 12-19 (in Russian).

Статья поступила 25 ноября 2015 г.

Информация об авторах

Догадина Елена Петровна – кандидат технических наук. Доцент кафедры электроники и вычислительной техники. Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевич Столетовых. Область научных интересов: системы автоматизации, проектирования и управления; оптимизация. Тел.: +7(49234)772-72. E-mail: delena86@yandex.ru

Холкина Наталья Евгеньевна – Доцент кафедры электроники и вычислительной техники. Муромский институт (филиал) Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевич Столетовых. Область научных интересов: геоэлектрический мониторинг, телекоммуникационные информационно-управляющие системы. Тел.: +7(49234)77-272. E-mail: kaf-eivt@yandex.ru

Адрес: Россия, 602264, г. Муром, ул. Орловская, д. 23.

Mathematical Model of the Production Processes, Taking into Account Their Specific Features

E. P. Dogadina, N. E. Kholkina

Statement of the problem. *Stationary Queuing systems are standard mathematical model to describe many engineering, biological and other systems. However, in areas such as automation process control, management of environmental monitoring, planning combat actions, real systems are characterized by running in unsteady mode. The parameters of the real systems depend on the States of the system. Non-stationary queueing systems as mathematical models of these real systems are more than adequate. These queueing systems are formalized on the basis of systems of differential equations.* ***The purpose of the work***. *We have developed and investigated a mathematical model of the production process on the basis of non-stationary queueing systems. Production processes are considered In work with consequent time and cellular spatial structure typical of small serial type production.* ***The methods used.*** *Methods of the device queueing theory, methods of the decision of the systems of the differential first-order equations, theory Markovskih processes.* ***Result***. *A mathematical model of the production process was studied taking into account the parameters varying in time. The non-stationary characteristics of the production process have been identified depending on changes of intensities of the income and service of requests in time. Use got models allows most packed to present the process of the operating the production processes with consequent time and cellular spatial structure typical of small serial type production.*

Key words: *queuing system, non-stationary queueing system, unsteadiness, production processes.*

Information about Authors

Elena Petrovna Dogadina – Ph.D. of Engineering Sciences. Associate Professor at the Department of Electronics and Computer Science. Murom Institute (Branch) of the Vladimir State University named after Alexander and Nickolay Stoletovs. Field of research: systems to automations, designing and management; optimization. Ph.: +7(49234)77272. E-mail: delena86@yandex.ru

Natalia Evgenievna Kholkina – Associate Professor at the Department of Electronics and Computer Science. Murom Institute (Branch) of the Vladimir State University named after Alexander and Nickolay Stoletovs. Field of research: telecommunication information and control systems. Ph.: +7(49234)77272. E-mail: kaf-eivt@yandex.ru

Address: Russia, 602264, Murom, st. Orlovskaya, h. 23.