УДК 62-50; 519.7; 519.8

Интервальный подход к оптимизации в условиях неопределенности

Левин В. И.

Актуальность. *В статье рассмотрены существующие подходы к актуальной проблеме оптимизации систем в условиях неопределенности. Дана точная постановка задачи условной оптимизации при интервальной неопределенности параметров целевой функции и ограничений. В связи с этим изложены математическая теория сравнения интервалов, включающая точное определение максимального и минимального интервалов, условия существования таких интервалов и алгоритмы их отыскания.* ***Цель статьи.*** *Целью является изложение идеи решения задачи условной оптимизации при интервальной неопределенности параметров. Эта идея основана на правилах математической теории сравнения интервалов, позволяющих заменить сравнение интервалов и выделение максимального и минимального интервала сравнением их нижних и верхних границ.* ***Метод.*** *На базе предложенной идеи сформулирован и обоснован метод детерминизации, позволяющий решить задачу условной оптимизации при интервальной неопределенности параметров путем ее сведения к двум полностью определенным задачам оптимизации того же типа.* ***Новизна.*** *Сформулирована и доказана теорема, определяющая решение задачи условной оптимизации в условиях интервальной неопределенности параметров через решения двух полностью определенных задач оптимизации. Также сформулирована и доказана теорема, определяющая необходимое и достаточное условие существования решения задачи условной оптимизации в условиях интервальной неопределенности.* ***Результат.*** *Построен 4-шаговый алгоритм решения задачи условной оптимизации при интервальной неопределенности параметров, который реализует метод детерминизации. Приведен пример работы алгоритма; в качестве решаемой задачи выбрана интервальная задача о назначениях. Проведено сравнение предложенного подхода к решению задач условной оптимизации с неполностью определенными параметрами с другими методами (детерминированный, вероятностный и нечеткий). Указаны достоинства и недостатки различных методов. Подчеркнуто, что предложенный подход позволяет сводить оптимизацию неполностью определенных функций к оптимизации полностью определенных функций строго математически, а не эвристически, как это делается в других известных подходах.*

Ключевые слова: *оптимизация, неопределенность, оптимизация при интервальной неопределенности, метод детерминизации.*

Введение

Задачи оптимизации имеют большое прикладное значение: на базе их строятся методы оптимального проектирования различных систем – технических, экономических, социальных и т.д., обеспечивающие достижение наилучшего, в определенном смысле, результата работы создаваемой системы. В связи с этим к настоящему времени создано огромное число методов решения задач оптимизации, как универсальных, рассчитанных на применение к задачам различных классов, так и специализированных, позволяющих эффективно решать лишь узкие классы задач [1–6] (см. также работы автора последних лет [7–12]).

Однако, при всем различии существующих методов, большинство их имеют одно общее свойство – применимость только к тем задачам оптимизации, в которых оптимизируемая функция известна точно (детерминирована). Между тем, встречающиеся на практике задачи оптимизации и оптимального проектирования обычно таковы, что их оптимизируемые функции известны не точно, а с той или иной степенью неопределенности (недетерминированы). Это вызвано теми фактами, что

1) большинству реальных процессов свойственна естественная неопределенность;
2) параметры большинства систем вследствие погрешности вычислений и измерений известны неточно;
3) многие параметры систем изменяются во времени.

В связи с этим возникает проблема оптимизации неполностью определенных (недетерминированных) функций. Эта проблема достаточно сложна по сравнению с традиционной оптимизацией полностью определенных функций, поскольку для нее дополнительно необходимо:

1) обобщить понятие экстремума функции;
2) выяснить условия существования такого экстремума, связанные с ее недетерминированностью;
3) разработать специальные методы поиска экстремума таких функций.

Реально эта проблема еще сложнее, поскольку имеющаяся информация об оптимизируемой функции может быть не только неполностью определенной, но и неоднозначной, неточной, противоречивой и т.д. В такой ситуации многие авторы считают, что модели для описания сложных систем могут быть только смысловыми, носящими содержательно-описательный, словесный характер. Такой взгляд представляется нам не вполне логичным. Действительно, математика, как хорошо известно, строится как полностью определенная, однозначная, точная и непротиворечивая наука. И поэтому правильное применение математики к описанию сложных систем – неопределенных, противоречивых, неточных, неоднозначных и т.д. – вполне может давать адекватные математические модели этих систем, лишенные неопределенности, неоднозначности, неточности и противоречивости. Для этого требуется всего лишь подобрать математический аппарат, который позволяет оперировать с неопределенностью и другими НЕ-свойствами исследуемой системы так же точно и однозначно, как классическая математика оперирует с полностью определенными системами.

Имеются различные подходы к нахождению оптимума неполностью определенных (недетерминированных) функций, различающиеся достоинствами и недостатками [13].

Первый подход – детерминированный – состоит в решении задач оптимизации для определенных значений или сочетаний значений параметров оптимизируемой функции, взятых внутри заданных областей их неопределенности [13]. Например, можно взять наихудшее сочетание значений параметров внутри областей неопределенности (пессимистический подход) [13–16], наилучшее сочетание (оптимистический подход) [17], центры (середины) областей неопределенности параметров (центральный подход) [18] и др. Основное достоинство этого подхода – простота интерпретации полученного решения, основной недостаток – слабо мотивированная ориентировка на какое-то одно значение (сочетание значений) параметров, которое на практике реализуется редко, что может обернуться неоправданной сложностью решения.

Второй подход – вероятностный – состоит в решении задачи оптимизации для усредненных (ожидаемых, в смысле математического ожидания) значений параметров оптимизируемой функции или для таких значений параметров, которые обеспечивают достаточно высокую вероятность получения оптимума [19–22]. Этот подход предполагает задание вероятностных распределений указанных параметров внутри областей их неопределенности. Основное достоинство этого подхода – ориентировка получаемого решения хотя и на одно, но зато наиболее часто встречающееся (наиболее подходящее для получения оптимума) значение (сочетание значений) параметров функции, основной недостаток – необходимость знания вероятностных распределений параметров, что зачастую бывает невозможно.

Третий подход – нечеткий – идейно близок второму, но вместо вероятностных распределений параметров оптимизируемой неполностью определенной функции, являющихся объективными характеристиками значений этих параметров, используются нечеткие распределения параметров, получаемые экспертным путем, т.е. субъективно [18].

В работах [23–31] был предложен и детально описан применительно к различным оптимизационным задачам детерминизационный подход к нахождению оптимума неполностью определенных функций. Данный подход принципиально отличается от трех предыдущих тем, что оптимизация неполностью определенной функции ведется с учетом всего множества возможных значений недетерминированных параметров функции.

Указанный подход позволяет для любой функции, неопределенность которой заключается в том, что ее параметры известны лишь с точностью до интервалов возможных значений, свести нахождение оптимума такой функции к нахождению одноименных оптимумов двух полностью определенных функций. Таким образом, для нахождения оптимума неполностью определенных функций становится возможно применять многочисленные хорошо известные и эффективно работающие методы точного нахождения оптимума полностью определенных (детерминированных) функций. При этом собственно сам алгоритм нахождения оптимума неполностью определенной функции оказывается полностью определенным, точным, однозначным и непротиворечивым. Другой причиной выбора неопределенности именно интервального типа было то, что интервальные оценки неизвестных параметров систем наиболее просты и доступны для получения. В этом и заключаются основные достоинства предложенного нами подхода к оптимизации неполностью определенных функций – метода детерминизации.

Разумеется, у этого метода есть другие достоинства, а также недостатки. Они подробно рассмотрены в п. 5.

Детерминизационный подход к оптимизации неполностью определенных функций излагается и обосновывается в настоящей статье в наиболее общем виде, не зависящем от особенностей оптимизируемых функций.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать следующую ситуацию. Пусть задана некоторая произвольная непрерывная функция n переменных

$$y = F(x_1,..., x_n), \tag{1}$$

все параметры явного представления которой известны точно, и пусть она существует в области, определяемой системой ограничений

$$\Phi_i(x_1,..., x_n) \le b_i, \quad i = \overline{1,m} \}. \tag{2}$$

Тогда для функции (1) можно сформулировать полностью определенную задачу условной оптимизации

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \max, \text{при } \Phi_i(x_1,\ldots,x_n) \le b_i, i = \overline{1,m} \}. \tag{3}$$

Конечно, возможен вариант задачи (3), где необходимо не максимизировать, а минимизировать функцию F. В современном математическом программировании разработано множество различных методов эффективного решения задач (3), ориентирующихся на тип функций F и $\Phi_i, i = \overline{1,m}$.

Пусть теперь параметры $p_k, k = \overline{1,l}$ явного представления функции F известны не точно, а с точностью до интервалов своих значений, т.е. имеют вид интервалов $\tilde{p}_k = [p_{k1}, p_{k2}]$. Пусть аналогичным образом неточно заданы параметры q_s явного представления функций Φ_i в левых частях ограничений и параметры b_i в правых частях, т.е. $\tilde{q}_{si} = [q_{si1}, q_{si2}], s = \overline{1,t}, \tilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}], i = \overline{1,m}$. Тогда функции F и $\Phi_i, i = \overline{1,m}$, становятся интервальными (т.е. принимающими вид интервалов $\tilde{F}$ и $\tilde{\Phi}_i, i = \overline{1,m}$), определяемыми с точностью до интервалов возможных значений, равно как и параметры $b_i, i = \overline{1,m}$ (т.е. принимающие вид интервалов $\tilde{b}_i, i = \overline{1,m}$). В итоге полностью определенная задача условной оптимизации (3) переходит в неполностью определенную – интервальную задачу условной оптимизации

$$\tilde{F}(x_1,\ldots,x_n) = \max, \text{при } \tilde{\Phi}(x_1,\ldots,x_n) \le \tilde{b}_i, i = \overline{1,m} \}. \tag{4}$$

Конечно, возможен вариант задачи (4), где требуется не максимизировать, а минимизировать функцию $\tilde{F}$. Итак, необходимо разработать методику решения оптимизационной задачи вида (4).

2. Математика сравнения интервалов

В основе решения поставленной выше интервальной задачи условной оптимизации (4) лежит математическая теория сравнения интервалов.

Рассмотрим два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$. Попытаемся сравнить их по величине, рассматривая их как интервальные числа. Первый вариант такого сравнения – сравнить интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ на основе отношений в отдельных парах вещественных чисел (a_i, b_j), где $a_i \in \tilde{a}, b_j \in \tilde{b}$. Но такой подход сразу ведет к провалу, поскольку в общем случае, при произвольных интервалах $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, некоторые пары интервалов (a_i, b_j) будут находиться в отношении $a_i > b_j$, а другие – в противоположном отношении $a_i < b_j$. По этой причине единственное, что нам остается, – реализовать сравнение интервалов на теоретико-множественном уровне, рассматривая их как единое целое, которое не подлежит дроблению на более мелкие части. Этот путь был реализован автором статьи в 1990-е годы. Ниже приводится краткое изложение полученных результатов [32–35].

Операции взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ двух интервалов $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ введем в виде теоретико-множественных конструкций

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \{a \vee b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \{a \wedge b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}. \tag{5}$$

Согласно (5), взятие максимума (минимума) интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ есть нахождение максимума (минимума) двух точечных величин a и b при условии, что конкретные значения величин пробегают все возможные значения из интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ соответственно. Для того, чтобы интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно было сравнить по величине, установив их отношение $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо, во-первых, чтобы введенные операции $\vee, \wedge$ над этими интервалами существовали, во-вторых, чтобы эти операции давали своим результатом один из операндов – $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$, и в-третьих, чтобы эти операции являлись согласованными в том смысле, что если большим (меньшим) является один из интервалов, то меньшим (большим) является другой. Сформулированное условие сравнимости интервалов по величине является, очевидно, не только необходимым, но и достаточным.

К счастью, легко доказать, что условие согласованности $\vee$ и $\wedge$ над интервалами выполняется для любой пары интервалов $(\tilde{a}, \tilde{b})$. Очевидно также, что всегда выполняется условие существования введенных операций взятия максимума $\vee$ и минимума $\wedge$ двух интервалов, причем результатом операции оказывается некоторый, в общем случае, новый интервал. Таким образом, необходимым и достаточным условием сравнимости $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ оказывается условие, по которому операции $\tilde{a} \vee \tilde{b}$ и $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ должны иметь своим результатом один из интервалов – $\tilde{a}$ или $\tilde{b}$. Последняя формулировка условия сравнимости интервалов открывает возможность получения его в конструктивной форме, пригодной для практического применения. Основной результат здесь формулируется следующим образом.

Теорема 1. Для того, чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ являлись сравнимыми по величине (по отношению $\geq$) и находились при этом в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$, необходимо и достаточно, чтобы границы этих интервалов подчинялись следующим условиям

$$a_1 \geq b_1, \quad a_2 \geq b_2, \tag{6}$$

а для того, чтобы они были сравнимы по величине (отношению $\leq$) и находились в отношении $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq b_2. \tag{7}$$

Эта теорема говорит, что интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ являются сравнимыми по отношению $\geq$ или $\leq$ (и находятся именно в этом отношении) только в том случае, когда в таком же отношении находятся одноименные границы этих интервалов a_1, b_1 и a_2, b_2. Иными словами, два интервала $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ находятся в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ только тогда, когда $\tilde{a}$ сдвинут обеими своими границами вправо относительно $\tilde{b}$ и в отношении $\tilde{a} \leq \tilde{b}$ только тогда, когда интервал $\tilde{a}$ сдвинут обеими границами влево относительно $\tilde{b}$.

Значение вышеприведенной теоремы 1 заключается в том, что она сводит сравнение двух интервалов и выбор большего (меньшего) из них к сравнению их одноименных границ, являющихся обычными числами. Так разрешается проблема сравнения интервалов.

Теорема 2. Для того, чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были не сравнимы по величине (по отношению $\geq$ и $\leq$), т.е. не находились в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(a_1 < b_1, a_2 > b_2) \quad \text{или} \quad (b_1 < a_1, b_2 > a_2). \tag{8}$$

Эта теорема показывает, что интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ не сравнимы по отношению $\geq$ и $\leq$ лишь тогда, когда один из них полностью накрывает другой.

Результат теоремы 2 заключается в том, что она показывает существование случаев несравнимости интервалов по отношениям $\geq$ и $\leq$, в отличие от вещественных чисел, которые всегда сравнимы по этим отношениям. Несравнимость величин некоторых интервалов есть естественный результат того факта, что интервальные числа, в отличие от вещественных, задаются не точно, а с некоторой неопределенностью (например, известно, что число принимает некоторое значение в данном интервале, но не уточняется, какое именно это значение). На основе теорем 1, 2 можно доказать нижеследующие положения.

Теорема 3. Для того, чтобы существовал максимальный интервал в некоторой системе интервалов $\tilde{a}(1) = [a_1(1), a_2(1)]$, $\tilde{a}(2) = [a_1(2), a_2(2)], \ldots$ (который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\geq$), необходимо и достаточно, чтобы его границы относительно одноименных границ остальных интервалов были расположены согласно следующим условиям

$$\left.\begin{aligned} a_1(1) \geq a_1(2),\ a_1(1) \geq a_1(3), \ldots \\ a_2(1) \geq a_2(2),\ a_2(1) \geq a_2(3), \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Здесь необходимо сделать уточнение, что условия (9) даны конкретно для того случая, когда максимальным является интервал $\tilde{a}(1)$. Однако хорошо видно, что эта конкретизация не ограничивает общности.

Теорема 4. Для того, чтобы существовал минимальный интервал в некоторой системе интервалов $\tilde{a}(1) = [a_1(1), a_2(1)]$, $\tilde{a}(2) = [a_1(2), a_2(2)], \ldots$ (который находится со всеми остальными интервалами в отношении $\leq$), необходимо и достаточно, чтобы его границы относительно одноименных границ остальных интервалов были расположены согласно следующим условиям

$$\left.\begin{aligned} a_1(1) \leq a_1(2),\ a_1(1) \leq a_1(3), \ldots \\ a_2(1) \leq a_2(2),\ a_2(1) \leq a_2(3), \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Аналогично теореме 3 условия (10) заданы для случая, когда минимальным является интервал $\tilde{a}(1)$, что не ограничивает общности.

Вышеприведенные теоремы 3, 4 показывают нам, что интервал является максимальным (минимальным) среди множества имеющихся интервалов только в том случае, когда максимальны (минимальны) его нижняя граница среди нижних границ всех интервалов, а его верхняя граница среди верхних границ всех интервалов.

4. Идея решения

В задаче (4) целевая функция $\tilde{F}(x_1,..., x_n)$, функции $\tilde{\Phi}_i(x_1,..., x_n), i=\overline{1,n}$, в левых частях ограничений и параметры $\tilde{b}_i, i=\overline{1,m}$, в правых частях являются интервальными и поэтому могут быть записаны в виде интервалов

$$\begin{aligned} &\tilde{F}(x_1,..., x_n)=[F_1(x_1,..., x_n), F_2(x_1,..., x_n)],\\ &\tilde{\Phi}_i(x_1,..., x_n)=[\Phi_{i1}(x_1,..., x_n), \Phi_{i2}(x_1,..., x_n)], \quad i=\overline{1,m},\\ &\tilde{b}_i=[b_{i1}, b_{i2}], \qquad i=\overline{1,m}. \end{aligned} \tag{11}$$

После этого интервальную задачу условной оптимизации (4) можно записать в явном интервальном виде

$$\begin{aligned} &[F_1(x_1,..., x_n), F_2(x_1,..., x_n)]=\max,\\ &[\Phi_{i1}(x_1,..., x_n), \Phi_{i2}(x_1,..., x_n)]\le[b_{i1}, b_{i2}], \quad i=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{12}$$

который уже поддается решению с помощью каких-либо известных методов оптимизации. Действительно, согласно теореме 3 интервальное уравнение в верхней строке сформированной выше системы (12) можно записать в виде эквивалентной пары обычных (детерминированных) уравнений

$$F_1(x_1,..., x_n)=\max, \quad F_2(x_1,..., x_n)=\max\,. \tag{13}$$

Далее, согласно теореме 1, систему интервальных неравенств в задаче условной оптимизации (12) можно записать в виде эквивалентной системы обычных (детерминированных) неравенств

$$\Phi_{i1}(x_1,..., x_n)\le b_{i1}, \ \Phi_{i2}(x_1,..., x_n)\le b_{i2}, \quad i=\overline{1,m}. \tag{14}$$

Закончим это построение следующим очевидным образом. Рассматривая совместно пару детерминированных уравнений оптимизации (13) с системой неравенств-ограничений (14), имеем две детерминированные задачи условной оптимизации вида (3). При этом задачу (15) естественно назвать нижней граничной задачей исходной интервальной задачи (4), а задачу (16) – ее верхней граничной задачей.

$$\begin{aligned} &F_1(x_1,..., x_n)=\max,\\ &\left.\begin{aligned}&\Phi_{i1}(x_1,..., x_n)\le b_{i1}, i=\overline{1,m},\\ &\Phi_{i2}(x_1,..., x_n)\le b_{i2}, i=\overline{1,m},\end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &F_2(x_1,..., x_n)=\max,\\ &\left.\begin{aligned}&\Phi_{i1}(x_1,..., x_n)\le b_{i1}, i=\overline{1,m},\\ &\Phi_{i2}(x_1,..., x_n)\le b_{i2}, i=\overline{1,m}.\end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

Из построения видно, что пара задач (15), (16), рассматриваемых в совокупности, эквивалентна исходной интервальной задаче (4). Таким образом, для получения решения задачи (4) надо решить ее нижнюю (15) и верхнюю (16) граничные задачи. В общем случае решения нижней и верхней задач: $\{M_{\text{н}}(x), F_{1,\max}\}, \{M_{\text{в}}(x), F_{2,\max}\}$, где $M_{\text{н}}(x), M_{\text{в}}(x)$ – множества точек решений $x=(x_1, \ldots, x_n)$ нижней и верхней граничной задачи, $F_{1,\max}, F_{2,\max}$ – полученные максимальные значения целевых функций этих задач. Решение задачи (4) составляется из решений ее нижней и верхней граничных задач в виде

$$\{x^* \in M_{\text{н}}(x) \cap M_{\text{в}}(x),\ \tilde{F}_{\max} = [F_{1,\max}, F_{2,\max}]\}. \tag{17}$$

В качестве точки решения x^* в (17) берется любая точка из пересечения множеств $M_{\text{н}}(x), M_{\text{в}}(x)$, а в качестве максимального значения целевой функции $\tilde{F}_{\max}$ интервал от максимума целевой функции нижней граничной задачи $F_{1,\max}$ до максимума целевой функции верхней граничной задачи $F_{2,\max}$.

Очевидно, что преимущество нашего подхода к решению интервальной задачи условной оптимизации заключается в возможности применения традиционных, хорошо разработанных методов решения детерминированных задач оптимизации. Основанный на этом подходе метод решения является методом детерминизации, так как он сводит решение недетерминированной задачи (4) к решению двух детерминированных задач (15) и (16).

4. Алгоритм решения

Для решения интервальной задачи (4) методом детерминизации необходимо действовать по следующему алгоритму.

Шаг 1. Используя формулы интервальной математики, выражающие элементарные преобразования интервалов [18]

$$\begin{gathered}
[a_1, a_2]+[b_1, b_2]=[a_1+b_1, a_2+b_2]; \quad [a_1, a_2]-[b_1, b_2]=[a_1-b_2, a_2-b_1]; \\
k[a_1, a_2]=\begin{cases}[ka_1, ka_2], & k>0, \\ [ka_2, ka_1], & k<0;\end{cases} \\
[a_1, a_2]\cdot[b_1, b_2]=[\min_{i,j}(a_i \cdot b_j), \max_{i,j}(a_i \cdot b_j)]; \\
[a_1, a_2]/[b_1, b_2]=[a_1, a_2]\cdot[1/b_2, 1/b_1],
\end{gathered} \tag{18}$$

представляем целевую функцию $\tilde{F}$ и функции ограничений $\tilde{\Phi}_i$ задачи (4) в интервальной форме. Так же представляем параметры $\tilde{b}_i$ в ограничениях задачи. Полученные представления имеют вид (11).

Шаг 2. Подставляя интервальные представления целевой функции, функции ограничений, а также параметров, полученные на шаге 1, формируем нижнюю граничную (15) и верхнюю граничную (16) задачи интервальной задачи условной оптимизации (4).

Шаг 3. Используя известные методы решения детерминированных задач условной оптимизации, получаем решения нижней $\{M_{\text{н}}(x), F_{1,\max}\}$ и верхней $\{M_{\text{в}}(x), F_{2,\max}\}$ граничных задач. При этом $M_{\text{н}}(x)$ – множество точек решения $x=(x_1,\ldots,x_n)$ нижней граничной задачи, на котором ее целевая функция F_1 достигает своего максимума $F_{1,\max}$ и аналогично, $M_{\text{в}}(x)$ – множество точек решения $x=(x_1,..., x_n)$ верхней граничной задачи, в которых ее целевая функция F_2 достигает максимума $F_{2,\max}$.

Шаг 4. Выбрав в качестве точки решения интервальной задачи (4) любую точку x^* из пересечения множеств $M_{\text{н}}(x)$ и $M_{\text{в}}(x)$ точек решения нижней и верхней граничных задач и взяв в качестве нижней границы максимума $\tilde{F}_{\max}$ интервальной целевой функции $\tilde{F}$ задачи (4) максимум $\tilde{F}_{1,\max}$ целевой функции нижней граничной задачи, а в качестве верхней границы максимума $\tilde{F}_{\max}$ целевой функции $\tilde{F}$ задачи (4) соответственно максимум $\tilde{F}_{2,\max}$ целевой функции верхней граничной задачи, получаем полное решение интервальной задачи (4) в виде (17).

Пример (интервальный вариант задачи о назначениях). Пусть в организации имеются три работы и три исполнителя – кандидата на выполнение этих работ. Заданы издержки $\tilde{a}_{ij}=[a_{1,ij},a_{2,ij}]$ выполнения любой j-й работы любым i-м исполнителем $(i,j=\overline{1,3})$, представляющие собой интервалы и составляющие матрицу $\tilde{A}=\|\tilde{a}_{ij}\|=\|[a_{1,ij},a_{2,ij}]\|=[A_1,A_2]$, где $A_1=\|a_{1,ij}\|$ и $A_2=\|a_{2,ij}\|$ – нижняя и верхняя граничные матрицы издержек. Нужно распределить работы между исполнителями таким образом, чтобы каждый из них был занят выполнением ровно одной работы, а суммарные издержки были минимальны.

Для моделирования задачи введем множество неизвестных булевых матриц назначений $X=\|x_{ij}\|, x_{ij}\in\{0,1\}$, где $x_{ij}=1$, если i-й исполнитель выполняет j-ю работу, и $x_{ij}=0$ в противном случае. Тогда имеем

$$\tilde{F}(x_{ij})\equiv\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\tilde{a}_{ij}x_{ij}=\min,\quad \text{при}$$

$$\Phi_1(x_{ij})\equiv\sum_{i=1}^{3}x_{ij}=1,\quad j=\overline{1,3},\qquad \Phi_2(x_{ij})\equiv\sum_{j=1}^{3}x_{ij}=1,\quad i=\overline{1,3}.$$

Эта задача представляет собой частный случай общей интервальной задачи условной оптимизации (4). Поэтому для ее решения мы можем применить 4-шаговый алгоритм, описанный выше.

Шаг 1. С помощью формул (18) представляем целевую функцию нашей задачи $\tilde{F}$ в интервальной форме

$$\tilde{F}(x_{ij})\equiv\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{1,ij}x_{ij},\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{2,ij}x_{ij}\right].$$

Представлять в интервальной форме функции $\tilde{\Phi}_1(x_{ij}),\tilde{\Phi}_2(x_{ij})$ ограничений задачи и параметры в правых частях ограничений не надо, т.к. в них не фигурируют интервальные параметры.

Шаг 2. Используя полученные на шаге 1 представления, формируем нижнюю граничную и верхнюю граничную задачи решаемой нами интервальной задачи условной оптимизации:

$$F_1(x_{ij})\equiv\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{1,ij}x_{ij}=\min,\quad \text{при}\quad \sum_{i=1}^{3}x_{ij}=1,\quad j=\overline{1,3},\quad \sum_{j=1}^{3}x_{ij}=1,\quad i=\overline{1,3},$$

$$F_2(x_{ij}) \equiv \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{2,ij}x_{ij} = \min, \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,3}, \quad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,3}.$$

Шаг 3. Решаем нижнюю и верхнюю граничную задачи интервальной задачи, сформированные на предыдущем шаге, принимая следующее конкретное числовое значение интервальной матрицы издержек

$$\tilde{A} = [A_1, A_2], \quad \text{где} \quad A_1 = \|a_{1,ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \|a_{2,ij}\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Имеется всего 6 различных значений матриц неизвестных $X = \|x_{ij}\|$, удовлетворяющих ограничениям решаемой задачи. Поэтому решение легко ищется перебором на множестве этих матриц. В итоге получаем решение нижней граничной задачи в виде $\{M_{н}(x), F_{1,\min}\}$, где множество решений $M_{н}$

$$M_{н}(x) = \left\{ X_{1a} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad X_{1b} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad X_{1c} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad X_{1d} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \right\},$$

а достигнутое минимальное значение целевой функции $F_{1,\min} = 5$. Далее, получаем решение верхней граничной задачи $\{M_{в}(x), F_{1,\min}\}$: множество решений

$$M_{в}(x) = \left\{ X_{2a} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad X_{2b} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \right\},$$

а соответствующее достигнутое минимальное значение целевой функции верхней граничной задачи составляет $F_{2,\min} = 9$.

Шаг 4. Находим пересечение множеств решений нижней $M_{н}(x)$ и верхней $M_{в}(x)$ граничных задач. Оно состоит из одной матрицы назначений

$$X^* = X_{1b} = X_{2a} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

которая есть решение всей задачи. Наконец, находим достигнутое на этом решении минимальное значение заданной интервальной целевой функции, в нашем случае оно представляет собой интервал $\tilde{F}_{\min} = [F_{1,\min}, F_{2,\min}] = [5, 9]$.

Итак, оптимальное решение интервальной задачи следующее: назначить 1-го исполнителя на 1-ю работу, 2-го – на 3-ю, 3-го – на 2-ю. Издержки имеют минимальное значение [5, 9]. Еще примеры см. в [13–15, 21, 25].

5. Сравнение предлагаемого подхода с существующими

Как было сказано во введении, оптимизация неполностью определенных функций, по сравнению с традиционной оптимизацией полностью определенных функций, требует дополнительно

1) обобщения понятия экстремума функции;
2) выяснения условий существования экстремума функций, связанных с ее неполной определенностью;
3) разработки специальных методов поиска экстремума таких функций.

Именно по этой схеме разработан предлагаемый в статье детерминизационный подход к оптимизации. Конкретно, обобщение понятия экстремума функции на случай неполностью определенных (интервальных) функций дано в п. 2 (формулы (5)). Далее, условия существования (несуществования) экстремума интервальной функции приведены в теоремах 1–4 того же п. 2. Наконец, специальный метод поиска экстремума интервальной функции разработан в п. 4. Необходимость проведения этой работы очевидна. Действительно, оптимизация полностью определенных функций основана на сравнении вещественных чисел, с выделением большего и меньшего, причем на вещественной оси большее число сдвинуто вправо относительно меньшего. Однако для оптимизации неполностью определенных функций такой подход не работает, т.к. неполностью определенные числа (например, интервальные), в отличие от вещественных, в общем случае не находятся в отношении «сдвинуто вправо (влево) на вещественной оси» и потому не могут сравниваться непосредственно, с выделением большего и меньшего числа. Вследствие этого для таких функций и приходится обобщать понятие экстремума. Далее, неполнота информации, которой характеризуются неполностью определенные числа и функции, при достижении определенного уровня может привести к ситуации несравнимости таких чисел и невозможности выделить из них большее и меньшее и, как следствие, – к отсутствию экстремума таких функций. В связи с этим и возникает необходимость нахождения условий существования экстремума неполностью определенных функций. Наконец, вследствие иного, более общего, чем для полностью определенных функций, понятия экстремума неполностью определенной функции и возможности несуществования этого экстремума, вызванной неполнотой информации, приходится разрабатывать специальные методы отыскания экстремума таких функций. Важно понимать, что невозможность в определенных случаях при помощи предложенного в статье алгоритма нахождения экстремума неполностью определенной функции не связана с качеством самого алгоритма, а является следствием объективной реальности, а именно – отсутствия экстремума из-за недостатка информации об анализируемой функции. В тех случаях, когда информация о функции достаточна и потому ее экстремум существует, предложенный алгоритм позволяет его найти (п. 5). Требовать от алгоритма большего, очевидно, нельзя.

Охарактеризуем теперь другие существующие подходы к оптимизации неполностью определенных функций. Кратко об их основных достоинствах и недостатках сказано во введении. Изучим вопрос подробнее. Начнем с детерминированного подхода. Здесь задача оптимизации неполностью определенной функции (исходная) заменяется другой задачей – оптимизации полностью определенной функции. Причем конструирование этой новой задачи путем выбора определенных значений параметров внутри областей неопределенности параметров функции исходной задачи зачастую производится на основе чисто эвристических соображений и не опирается ни на какие математически ясные обобщения понятия экстремума на случай неполностью определенных функций. Из-за этого новая задача оказывается, как правило, математически неэквивалентной исходной, а интерпретация ее решения в терминах исходной задачи – проблематичной. Кроме того, из-за большой сложности некоторых критериев оптимизации, используемых в новой задаче $(\max\min, \min\max)$, трудоемкость алгоритмов поиска экстремума неполностью определенных функций при детерминированном подходе может оказаться высокой. Зато при этом подходе обычно не возникает проблемы выяснения условий существования экстремума функций, т.к. полностью определенные функции практически всегда имеют экстремум. Теперь о вероятностном подходе. При первом варианте данного подхода исходная задача оптимизации неполностью определенной функции заменяется, как и в случае детерминированного подхода, другой задачей, а именно, оптимизации полностью определенной функции, которая теперь получается из исходной функции путем замены ее случайных параметров их математическими ожиданиями (центрами). Сразу ясно, что эта новая задача неэквивалентна исходной в еще большей степени, чем при детерминированном подходе, поскольку она, не опираясь ни на какие обобщения понятия экстремума для неполностью определенных функций, не учитывает не только неопределенность возможных значений параметров анализируемой функции, но также и случайный характер реализации конкретных значений параметров на практике. При втором варианте подхода задача оптимизации неполностью определенной функции с интервальными параметрами фактически заменяется задачей оптимизации неполностью определенной функции со случайными параметрами. Последние получаются из интервальных параметров исходной задачи принятием, например, гипотезы о равномерном распределении значений параметров внутри своих интервалов. Принятие указанной гипотезы сразу упрощает выбор экстремального интервала. Например, для выбора большего из двух интервалов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ достаточно лишь вычислить вероятности $P(\tilde{a} > \tilde{b})$ и $P(\tilde{b} > \tilde{a})$ и взять тот из интервалов, для которого вероятность превышения им второго интервала больше. Данный подход гарантирует существование решения, полученного с помощью гипотезы модельной задачи оптимизации функции со случайными параметрами. Но проблема заключается в том, что модельная задача неэквивалентна исходной задаче оптимизации функции с интервальными параметрами, так как одно лишь задание неопределенности функции в форме интервалов возможных значений ее параметров не предполагает задания дополнительной информации, например, о вероятностных распределениях внутри интервалов. Все, что говорилось о вероятностном подходе, справедливо и для нечеткого, с заменой термина «вероятностное распределение параметров недетерминированной функции» термином «нечеткое распределение» этих параметров.

В практике для решения конкретных задач оптимизации неполностью определенных функций, в зависимости от условий, могут применяться различные подходы. В общем случае рекомендуется начинать с детерминизационного подхода, поскольку он базируется на точном определении понятия максимума и минимума неопределенной величины (интервала), что упрощает интерпретацию полученного решения и делает его более прозрачным. Если детерминизационный подход не приводит к решению, вследствие недостаточной информации об оптимизируемой функции, целесообразно эту информацию пополнить путем сужения интервалов возможных значений параметров этой функции с помощью дополнительных измерений, наблюдений, привлечения более квалифицированных экспертов, после чего снова применить данный подход. Если и это не помогло получить решение, рекомендуется использовать другие подходы. В первую очередь, целесообразно попытаться применить вероятностный подход, который достаточно прост в реализации. При этом нужно иметь в виду, что используемые при этом подходе вероятностные распределения параметров неполностью определенной функции должны быть известны с достаточной точностью, т.к. в противном случае найденное предположительно оптимальное значение функции может оказаться далеким от настоящего оптимума. Надо еще учитывать, что при вероятностном подходе получение оптимума функции вообще строго не гарантируется, а только «обещается» с определенной вероятностью, притом не обязательно близкой к единице, что не всегда приемлемо. Поэтому на практике часто обращаются к детерминированному подходу в оптимизации неполностью определенных функций. Этот подход, в отличие от детерминизационного, всегда обеспечивает существование оптимума для неполностью определенной функции, и, в отличие от вероятностного, гарантирует получение этого оптимума. К сожалению, при этом подходе, как говорилось ранее, вследствие преобразования исходной неполностью определенной функции в полностью определенную, новая задача оптимизации оказывается неэквивалентна исходной, а интерпретация ее решения в терминах исходной задачи проблематичной. Например, выбор с помощью детерминированного подхода минимального из двух интервалов $\tilde{a}=[4,5], \tilde{b}=[3,15]$ по критерию оптимальности «нижняя граница интервала минимальна» дает следующее решение: $\min(\tilde{a},\tilde{b})=\tilde{b}=[3,15]$. Но данное решение проблематично интерпретировать практически, поскольку оно противоречит эвристическим представлениям. Любой автомобилист уверенно выберет как более экономную машину с расходом топлива от 4 до 5 л на 100 км машине с расходом 3–15 л!

Заключение

В статье показано, что проблема оптимизации неполностью определенных функций достаточно просто разрешима, если неопределенность задавать в интервальной форме и, кроме того, использовать конструктивную теорию сравнения интервальных величин, которая сводит указанное сравнение к сравнению одноименных границ этих интервалов. Тем самым поиск оптимума неполностью определенной функции можно свести к нахождению одноименного оптимума двух полностью определенных (детерминированных) функций. Наш подход (его естественно назвать детерминизационным) примечателен тем, что позволяет вполне строго свести оптимизацию неполностью определенных функций к хорошо известным и эффективным методам оптимизации полностью определенных функций.

Литература

1. Юдин Д. Б., Гольдштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М. Советское радио, 1964. 735 с.

2. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964. 390 с.

3. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. М.: Наука, 1967. 268 с.

4. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969. 280 с.

5. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 352 с.

6. Левин В. И. Структурно-логические методы исследования сложных систем с применением ЭВМ. М.: Наука, 1987. 304 с.

7. Левин В. И. Моделирование задач оптимизации в условиях интервальной неопределенности // Известия Пензенского гос. пед. ун-та. Физико-математические и технические науки. 2011. № 26. С. 589–595.

8. Левин В. И. Оптимизация в условиях интервальной неопределенности. Метод детерминизации // Автоматика и вычислительная техника. 2012. № 4. С. 157–163.

9. Левин В. И. Методы оптимизации систем в условиях интервальной неопределенности параметров // Информационные технологии. 2012. № 4. С. 52–59.

10. Левин В. И. Оптимальное проектирование в условиях неопределенности. Метод детерминизации // Онтология проектирования. 2013. № 3 (9). С. 41–52.

11. Левин В. И. Методология оптимизации в условиях неопределенности методом детерминизации // Информационные технологии. 2014. № 5. С. 14–21.

12. Левин В. И. Оптимизация в условиях неопределенности методом детерминации // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 3. С. 844–851.

13. Первозванский А. А. Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975. 616 с.

14. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function // Control and Cybernetics. 1980. Vol. 9. № 4. P. 189–202.

15. Тимохин С. Г., Шапкин А. В. О задачах линейного программирования в условиях неточных данных // Экономика и математические методы. 1981. № 5. С. 955.

16. Рощин В. А., Семенова Н. В., Сергиенко И. В. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования // Кибернетика. 1989. № 2. С. 42–46.

17. Семенова Н. В. Решение одной задачи обобщенного целочисленного программирования // Кибернетика. 1984. № 5. С. 25–31.

18. Вощинин А. П., Сотиров Г. Р. Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во МЭИ, 1989. 224 с.

19. Ащепков Л. Т., Давыдов Д. В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М.: Наука, 2006. 285 с.

20. Давыдов Д. В. Интервальные методы и модели принятия решений в экономике. Диссерт. докт. экон. наук. Дальневосточный гос. ун-т. Владивосток, 2009.

21. Островский Г. М., Волин Ю. М. Технические системы в условиях неопределенности. Анализ гибкости и оптимизация. М. Бином. 2008. 325 с.

22. Островский Г. М., Зиятдинов Н. Н., Лаптева Т. В. Оптимизация технических систем. М.: Кнорус. 2012. 252 с.

23. Левин В. И. Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97–106.

24. Левин В. И. Булево линейное программирование с интервальными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 1994. № 7. С. 111–122.

25. Левин В. И. Интервальное дискретное программирование // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 6. С. 92–103.

26. Левин В. И. Оптимизация расписаний в системах с неопределенными временами обработки. I // Автоматика и телемеханика. 1995. № 2. С. 99–110.

27. Левин В. И. Оптимизация расписаний в системах с неопределенными временами обработки. II // Автоматика и телемеханика. 1995. № 3. С. 106–116.

28. Левин В. И. Задача трех станков с неопределенными временами обработки // Автоматика и телемеханика. 1996. № 1. С. 109–120.

29. Левин В. И. Интервальная модель общей задачи линейного программирования. I // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 1998. Т. 3. № 4. С. 401–407.

30. Левин В. И. Интервальная модель общей задачи линейного программирования. II // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 1999. Т. 4. № 1. С. 18–27.

31. Левин В. И. Нелинейная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 2.

32. Левин В. И. Антагонистические игры с интервальными параметрами // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 4. С. 149–159.

33. Левин В. И. О недетерминистской дискретной оптимизации // Принятие решений в условиях неопределенности. Сборник статей. Уфа: Изд-во Уфимского авиационного ин-та, 1990. С. 37–45.

34. Левин В. И. Математическая теория сравнения интервальных величин и ее применение в задачах измерения // Измерительная техника. 1998. № 5. С. 52–63.

35. Левин В. И. Математическая теория сравнения интервальных величин и ее применение в задачах измерения, контроля и управления // Измерительная техника. 1998. № 9. С. 67–79.

36. Левин В. И. Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности. – Пенза: Изд-во Пензенского технологического ин-та, 1998. 82 с.

References

1. Iudin D. B, Gol'dshtein E. G. *Zadachi i metody lineinogo programmirovaniia* [Tasks and Methods of Linear Programming]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1964, 735 p (in Russia).

2. Venttsel' E. S. *Vvedenie v issledovanie operatsii* [Introduction to operational research]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1964, 390 p (in Russia).

3. Wilde D.J. Optimum Seeking Methods. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964, 202 p.

4. Korbut A. A., Finkel'shtein Iu. Iu. *Diskretnoe programmirovanie* [Discrete Programming]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 280 p (in Russia).

5. Moiseev N. N., Ivanilov Iu. P., Stoliarova E. M. *Metody optimizatsii* [Optimization Technique]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 352 p (in Russia).

6. Levin V. I. *Strukturno-logicheskie metody issledovaniia slozhnykh sistem s primeneniem EVM* [Structural-Logical Research Methods of Complex Systems Using Computer]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 304 p (in Russia).

7. Levin V. I. Modeling of Optimization Problems in Condition of Indeterminacy. *Izvestiia Penzenskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. V.g. Belinskogo*, 2011, no. 26, pp. 589-595 (in Russia).

8. Levin V. I. Optimization in Terms of Interval Uncertainty: The Determinization Method. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2012, vol. 46. no. 4, pp. 157–163 (in Russia).

9. Levin V. I. Systems Optimization Methods in Conditions of Interval Uncertainty of Parameters. *Information Technologies*, 2012, no. 4, pp. 52-59 (in Russia).

10. Levin V. I. Optimal Design in Condition of Uncertainty Determination Method. *Ontology of Designing*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 41-52 (in Russia).

11. Levin V. I. The Methodology of Optimization in Condition of Uncertainty by Determination Method. *Information Technologies*, 2013, no. 5, pp. 13-21 (in Russia).

12. Levin V. I. Optimization in Conditions of Interval Uncertainty by Determination Method. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University. Natural and Technical Sciences], 2014, vol. 19, no. 3, pp. 844-851 (in Russian).

13. Pervozvanskii A. A. *Matematicheskie modeli v upravlenii proizvodstvom* [Mathematical Models in Production Management]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 616 p (in Russia).

14. Libura M. Integer Programming Problems with Inexact Objective Function/ *Control and Cybernetics*, 1980, vol. 9, no 4, pp. 189–202.

15. Timokhin S.G., Shapkin A. V. O zadachakh lineinogo programmirovaniia v usloviiakh netochnykh dannykh [About Linear Programming Problems in Terms of Imperfect Data]. *Economics and mathematical methods*, 1981, no. 5, 955 p (in Russia).

16. Roshchin V.A., Semenova N. V., Sergienko I. V. Solution and Investigation of One Class of Inexact Integer Programming Problems. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1989, vol. 25, no. 2, pp. 185–193.

17. Semenova N. V. Solution of a Generalized Integer-Valued Programming Problem. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1984, vol. 20, no. 5, pp. 641–651.

18. Voshchinin A. P., Sotirov G. R. *Optimizatsiia v usloviiakh neopredelennosti* [Optimization under uncertainty]. Moscow, MEI Publ., 1989, 224 p (in Russia).

19. Ashchepkov L. T., Davydov D. V. *Universal'nye resheniia interval'nykh zadach optimizatsii i upravleniia* [Universal Solutions of Interval Problems of Optimization and Control]. Moscow, Nauka Publ., 2006, 285 p (in Russia).

20. Davydov D. V. *Interval'nye metody i modeli priniatiia reshenii v ekonomike*. Diss. dokt. ekon. nauk[Interval Methods and Models of Decision Making in the Economy. Extended Abstract of Dr. habil. Thesis]. Vladivostok, Far Eastern National University Publ., 2009 (in Russian).

21. Ostrovskii G. M., Volin Iu. M. *Tekhnicheskie sistemy v usloviiakh neopredelennosti. Analiz gibkosti i optimizatsiia* [Technical Systems in Conditions of Uncertainty. Analysis of Flexibility and Optimization]. Moscow, Binom Publ., 2008, 325 p (in Russian).

22. Ostrovskii G. M., Ziiatdinov N. N., Lapteva T. V. *Optimizatsiia tekhnicheskikh system* [Optimization of Technical Systems]. Moscow, Knorus Publ., 2012, 252 p (in Russian).

23. Levin V. I. Discrete Optimization under Interval Uncertainty. *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no 7, pp 1039–1047.

24. Levin V. I. Boolean Linear Programming with Interval Coefficients. *Automation and Remote Control*, 1994, vol. 55, no. 7, pp. 1019–1028(in Russian).

25. Levin V. I. Interval Discrete Programming. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1994, vol. 30, no. 6, pp. 866–874.

26. Levin V. I. Scheduling Optimization in Systems with Indefinite Process-ing Times. Part I. *Automation and Remote Control*, 1995, vol 56, no 2, pp. 236–244.

27. Levin V. I. Scheduling Optimization in Systems with Indefinite Processing Times. Part II. *Automation and Remote Control*, 1995, vol. 56,no 3,pp. 394–400.

28. Levin V. I. The 3-Bench Problem with Indefinite Operation Times. *Automation and Remote Control*, 1996, vol. 57, no 1,pp. 89–97.

29. Levin V. I. The Interval Model for the General Problem of Linear Programming. Part I. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University. Natural and Technical Sciences], 1998, vol. 3, no. 4, pp. 401-407 (in Russian).

30. Levin V. I. The Interval Model for the General Problem of Linear Programming. Part II. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Estestvennye i tekhnicheskie*

nauki [Tambov University. Natural and Technical Sciences], 1999, vol. 4, no. 1, pp. 18-27 (in Russian).

31. Levin V. I. Nonlinear Optimization under Interval Uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1999, vol. 35, no. 2, pp. 297–306.

32. Levin V. I. Antagonistic games with interval parameters. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1999, vol. 35, no. 4, pp. 644-652.

33. Levin V. I. O nedeterministskoi diskretnoi optimizatsii [About a nondeterministic discrete optimization]. *Priniatie reshenii v usloviiakh neopredelennosti. Sbornik statei* [Decision Making under Uncertainty. Digest of articles]. Ufa, Ufa State Aviation Technical University Publ., 1990, pp. 37-45 (in Russian).

34. Levin V. I. Mathematical Theory of Interval Comparison and its Application to Measurement Problems. *Measurement Techniques*, 1998, no. 5, pp. 399-406.

35. Levin V. I. The problem of choosing the points for measurement monitoring of measuring instruments. *Measurement Techniques*, 1998, no. 9, pp. 876-881.

36. Levin V. I. *Interval'naia matematika i issledovanie sistem v usloviiakh neopredelennosti* [Interval Mathematics and the Study of Systems Under Uncertainty]. Penza, Penza State University Publ., 1998, 82 p. (in Russian).

Статья поступила 14 ноября 2015 г.

Информация об авторе

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. Тел. +7(8412)670-263. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Interval Approach to Optimization with Uncertainty

V.I. Levin

Relevance. *The existing approaches to the actual problem of optimization of systems under uncertainty are considered. An exact formulation of problem of constrained optimization under interval uncertainty of the parameters of the objective function and constraints is given. In this connection the mathematical theory of comparison of intervals is set out, including a precise definition of the maximal and minimal intervals, conditions for existence of such intervals and algorithms for finding them.* ***The purpose.*** *The aim of the article is to propose the idea of solving constrained optimization problems under interval uncertainty of its parameters. This idea is based on the rules of the mathematical theory of comparison of intervals which allows replace comparison of intervals and determination of maximal and minimal interval by comparing their lower and upper bounds.* ***Method.*** *On the basis of the proposed idea the determination* *method that allows to solve the problem of constrained optimization under interval uncertainty parameters by reducing it to two entirely certain optimization problems of same type is formulated and proved.* ***Novelty.*** *We formulate and prove a theorem that defines the solution of problem of constrained optimization under interval uncertainty of parameters through solutions of two completely certain optimization problems. Also the theorem that defines the necessary and sufficient condition for the existence of a solution of constraint optimization under interval uncertainty is formulated and proved.* ***Result****. The 4-step algorithm for solving constrained optimization under interval uncertainty parameters that implements a method of determination is constructed. The example of algorithm is given. The interval assignment task is selected as a problem to be solved. A comparison of the proposed approach to solving constrained optimization problems with incompletely defined parameters with other methods for solving such problems (deterministic, probabilistic and fuzzy) is done. Advantages and disadvantages of different methods are listed. It is emphasized that the proposed in the article approach allows us to reduce the optimization of incompletely specified functions to fully optimize certain functions strictly mathematically rather than heuristically, as is done in other well-known approaches.*

Keywords: *optimization, uncertainty, interval uncertainty, determination method.*

Information about Author

Vitaly Ilich Levin – Dr. habil. of Technical Sciences, Full Professor. Honoured Scientist of Russia. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economics, sociology, history; decision making, optimization, recognition, automata theory, reliability theory, history of science, problems of education. Tel. +7(8412)670-263. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: Russia, 440039, Penza, pr. Baydukova/Gagarin st., 1A/11.