

УДК 62–50; 519.7; 519.8

## Интервальные уравнения и моделирование неопределенных систем

Левин В. И.

**Актуальность.** При моделировании технических, экономических, социальных систем часто возникает необходимость решения уравнений с интервально-определенными параметрами (интервальные уравнения). Решение таких уравнений требует специальных методов, отличных от методов решения обычных, детерминированных уравнений. В работе предложен новый метод решения интервальных уравнений, основанный на аппарате интервальной математики. **Цель.** Целью работы является разработка полностью формализованного метода решения интервальных уравнений, базирующегося на упомянутом математическом аппарате. **Метод.** Предложенный в статье метод заключается в использовании эквивалентных преобразований обеих частей интервального уравнения по законам интервальной математики, позволяющих перейти от интервального уравнения к обычным детерминированным уравнениям и их последующему решению известными методами. **Результат.** Показано, что решение разнообразных интервальных уравнений можно выполнить двумя различными методами: множественным и интервальным. Выявлены различия между этими двумя методами в понятии решения уравнения, в используемом математическом аппарате, в возможности точного решения, в мощности получаемого множества решений. Приведен пример решения двумя методами интервального уравнения, используемого при расчете зоны загрязнения опасным веществом. **Выводы.** В статье предложен новый подход к решению интервальных уравнений, основанный на эквивалентном преобразовании уравнения по законам интервальной математики. Такое преобразование позволяет привести уравнение к детерминированному виду, что дает возможность решить его хорошо известными методами решения обычных (детерминированных) уравнений. Предложенный подход позволяет находить точное решение интервального уравнения (если оно существует) или его приближенное решение (если точного решения не существует).

**Ключевые слова:** интервал, интервальная функция, интервальное уравнение, множественный метод, интервальный метод.

### Введение

Современная наука и практика успешно справляются с задачами исследования систем с полностью определенными параметрами. Они формулируются как задачи расчета, анализа и синтеза различных функций с детерминированными параметрами, служащих характеристиками изучаемых систем. Но на практике чаще встречаются системы с неполностью определенными параметрами. Причины появления таких систем – естественная неопределенность реальных процессов, происходящих в системах; неточное задание параметров большинства систем из-за погрешности при их вычислении или измерении; изменение во времени параметров систем; необходимость совместного исследования семейств однотипных систем, имеющих сходные функции-характеристики и раз-

---

#### Библиографическая ссылка на статью:

Левин В. И. Интервальные уравнения и моделирование неопределенных систем // Системы управления, связи и безопасности. 2017. № 2. С. 101-112. URL: <http://sccs.intelgr.com/archive/2017-02/04-Levin.pdf>

#### Reference for citation:

Levin V. I. Interval Equations and Modelling of Uncertain Systems. *Systems of Control, Communication and Security*, 2017, no. 2, pp. 101-112. Available at: <http://sccs.intelgr.com/archive/2017-02/04-Levin.pdf>

личающихся лишь значениями параметров этих функций. Исследование введенных неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих характеристиками данных систем. Эти задачи сложнее их упомянутых выше детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с детерминированными параметрами. Это усложнение – результат того, что алгебра недетерминированных чисел всегда сложнее алгебры детерминированных чисел.

В настоящей работе рассматриваются задачи нахождения корней интервальных уравнений. Эти уравнения отличаются от обычных (полностью определенных) уравнений тем, что их параметры – неполностью определенные и задаются в виде интервалов возможных значений. Интервальные уравнения встречаются на практике, например, в задачах оптимизации систем в условиях неопределенности, при нахождении критических точек характеристик и точек пересечения характеристик неполностью определенных (эмпирических) моделей и т. д.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим обычное (детерминированное) уравнение с одной переменной

$$f(P, x) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $f$  – некоторая детерминированная функция,  $x$  – детерминированная переменная,  $P$  – детерминированный вектор параметров вида

$$P = (p, q, \dots, s). \quad (2)$$

Если заменить в уравнении (1) детерминированный вектор параметров  $P$  вектором параметров  $\tilde{P}$  вида

$$\tilde{P} = (\tilde{p}, \tilde{q}, \dots, \tilde{s}),$$

где  $\tilde{p} = [p_1, p_2]$ ,  $\tilde{q} = [q_1, q_2], \dots$ ,  $\tilde{s} = [s_1, s_2]$  – интервальные параметры, то детерминированная функция  $f$  перейдет в соответствующую интервальную функцию  $\tilde{f} = [f_1, f_2]$ , а вещественное число 0 – в соответствующее интервальное число  $\tilde{0} = [0, 0]$ . В результате детерминированное уравнение (1) перейдет в интервальное уравнение вида

$$\tilde{f}(\tilde{P}, x) = \tilde{0}. \quad (3)$$

Уравнение (3) и будет объектом нашего изучения. Основной задачей этого изучения является нахождение корня (множества корней) уравнения (3), т. е. значений переменной  $x$ , которые обращают значение левой части уравнения в значение его правой части, т. е. в интервальный нуль  $\tilde{0}$ . Эта задача, в отличие от задачи решения обычного уравнения, носит неоднозначный характер. Это связано с тем, что пересечение интервальных кривых, определяющее корни интервального уравнения (3), может пониматься в различных смыслах. Этот эффект не возникает при пересечении обычных кривых, с которым связано решение обычного уравнения.

## 2. Обзор литературы

Хотя необходимость решения интервальных и других неточно определяемых (стохастических, нечетких и т. д.) уравнений возникает достаточно часто на практике [1-5], систематическое изучение таких уравнений и методов их решения началось сравнительно недавно. По-видимому, первое упоминание об интервальных уравнениях и методах их решения появилось в книге [6]. В этой работе использован множественный подход, при котором интервальное уравнение (3) рассматривается как множество образующих его обычных уравнение (1), получаемых при варьировании их параметров  $P$  в границах заданных интервальных параметров  $\tilde{P}$ . При этом множество решений интервального уравнения получается как множество решений указанных, образующих его обычных уравнений. Аналогичный подход используется в работе [7] для решения конкретного интервального уравнения, возникающего в важной прикладной задаче расчета длины опасной зоны загрязнения поверхности токсичным веществом. Краткий обзор различных ситуаций, возникающих при решении практических задач с помощью указанного подхода, приведен в работе [8]. При этом рассматриваются как ситуации, моделируемые уравнениями с одним корнем, так и ситуации, моделируемые уравнениями с двумя или несколькими корнями. Наконец, в книге [9] был предложен другой, чисто интервальный подход к решению интервальных уравнений вида (3), при котором такое уравнение рассматривается не как множество обычных уравнений вида (1), а как одно уравнение, имеющее интервальные параметры и потому подчиняющееся законам интервальной математики. Использование этих законов позволяют совершать эквивалентные преобразования интервального уравнения, упрощая его и приводя к детерминированному виду, из которого непосредственно вытекает его решение. Таким образом, предложенные в литературе подходы к решению интервальных уравнений существенно различаются по определению того, что считать решением уравнения, и по используемому математическому аппарату. Кроме того, они различаются по своим возможностям в отыскании корней уравнений. В частности, чисто интервальный подход, в отличие от множественного подхода, не всегда обеспечивает существование точного решения интервального уравнения. Однако отсутствие точного решения такого уравнения является не недостатком интервального подхода, а следствием неопределенности задачи, выражающейся в задании параметров уравнения с точностью лишь до интервалов возможных значений [10, 11].

Ближкие проблемы теории и приложений интервальной математики обсуждаются в работах [12, 13]. Специальные вопросы, связанные с решением линейных систем интервальных уравнений, изучаются в работе [14]. Предложен новый алгоритм решения, обобщающий алгоритм Гаусса-Зейделя. В работе [15] рассматривается проблема существования решения систем линейных интервальных уравнений. Для нахождения решения предложен метод максимизации распознавания функционала множества решений.

### 3. Множественный подход

Будем решать интервальное уравнение (3), используя множественный подход. Рассмотрим первый случай, когда последней операцией в левой части уравнения является сложение. Тогда уравнение (3) можно представить в виде

$$\tilde{f}_A(\tilde{P}, x) + \tilde{f}_B(\tilde{P}, x) = \tilde{0}, \quad (4)$$

где  $\tilde{f}_A = [f_{A_1}, f_{A_2}]$ ,  $\tilde{f}_B = [f_{B_1}, f_{B_2}]$  – новые по отношению к  $\tilde{f}$  интервальные функции тех же переменной  $x$  и вектора параметров  $\tilde{P}$ . Обозначив  $-\tilde{f}_B = \tilde{f}_C$ , уравнение (4) можно переписать в виде

$$\tilde{f}_A(\tilde{P}, x) = \tilde{f}_C(\tilde{P}, x). \quad (5)$$

Поскольку интервальные функции в левой и правой части уравнения (5) графически представляются в виде интервальных кривых, решение этого уравнения сводится к нахождению пересечения двух интервальных кривых, т. е. к нахождению множества  $\Omega$  точек (области), принадлежащих обеим интервальным кривым. В этом, очевидно, и проявляется множественный подход к решению интервальных уравнений. При этом собственно решением интервального уравнения (5) является не само указанное выше множество  $\Omega$ , а его проекция  $\Omega_x$  на ось  $X$ .

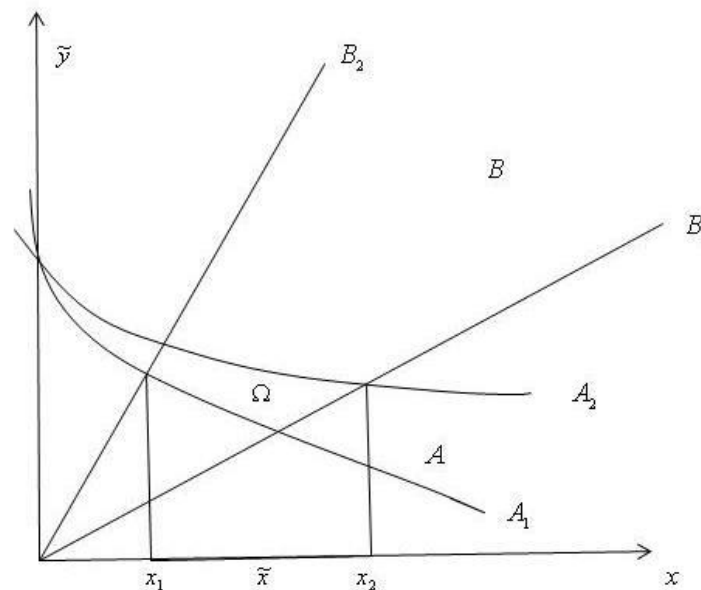
Детали множественного алгоритма нахождения решения интервального уравнения проще показать на примере решения уравнения с одним корнем.

**Пример 1.** Найти решение интервального уравнения  $e^{-\tilde{p} \cdot x} = \tilde{q}x$  с интервальными параметрами  $\tilde{p} = [p_1, p_2]$ ,  $\tilde{q} = [q_1, q_2]$ . Это уравнение используется при расчете длины опасной зоны загрязнения поверхности токсичным веществом. Графическое изображение интервальных кривых, представляющих функции левой и правой частей заданного уравнения, показаны на рис. 1.

Из рисунка видно, что единственная область  $\Omega$ , являющаяся общей частью обеих интервальных кривых, расположена между крайней левой точкой  $x_1$  и крайней правой точкой  $x_2$ . Так что проекция  $\Omega_x$  области  $\Omega$  на ось  $X$ , являющаяся искомым единственным решением уравнения, имеет вид интервала  $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ . Причем, как видно из рис. 1, левая граница  $x_1$  этого решения есть точка пересечения кривых  $A_1$  и  $B_2$ , т. е. решение обычного детерминированного уравнения  $e^{-p_2 \cdot x} = q_2 x$ , а правая граница  $x_2$  этого решения есть точка пересечения кривых  $A_2$  и  $B_1$ , т. е. решение обычного уравнения  $e^{-p_1 \cdot x} = q_1 x$ . Таким образом для решения заданного интервального уравнения достаточно решить два указанных обычных уравнения.

Пусть, например, надо найти решение конкретного интервального уравнения  $e^{-[0,5;0,7] \cdot x} = [2,3]x$ . Тогда для нахождения левой границы решения  $x_1$  надо решить детерминированное уравнение  $e^{-0,7 \cdot x} = 3x$ , а для нахождения правой границы  $x_2$  - детерминированное уравнение  $e^{-0,5 \cdot x} = 2x$ . Решая эти уравнения численным методом, находим  $x_1 = 0,275$ ,  $x_2 = 0,408$ . Отсюда решение заданно-

го конкретного интервального уравнения получается в виде  $\tilde{x} = [x_1, x_2] = [0,275;0,408]$ .



$A$  – интервальная кривая  $\tilde{y} = e^{-\tilde{p} \cdot x}$ , где  $\tilde{p} = [p_1, p_2]$ ;

$B$  – интервальная кривая  $\tilde{y} = \tilde{q}x$ , где  $\tilde{q} = [q_1, q_2]$ ;

$A_1$  – детерминированная кривая  $y = e^{-p_1 \cdot x}$ ;

$A_2$  – детерминированная кривая  $y = e^{-p_2 \cdot x}$ ;

$B_1$  – детерминированная кривая  $y = q_1 x$ ;

$B_2$  – детерминированная кривая  $y = q_2 x$ ;

$\Omega$  – пересечение интервальных кривых  $A$  и  $B$

$x^* = [x_1, x_2]$  – проекция  $\Omega$  на ось  $X$  – решение интервального уравнения

$$e^{-\tilde{p} \cdot x} = \tilde{q}x$$

Рис. 1. Графическое представление решения интервального уравнения множественным методом

Если задано интервальное уравнение, имеющее два или более корней, его решение производится путем последовательного вычисления этих корней, с использованием алгоритма, примененного выше в примере 1.

Мы рассмотрели процедуру решения с помощью множественного подхода интервального уравнения вида (3) в случае, когда последней операцией в левой части уравнения является сложение. В случае, когда последней операцией в левой части является умножение, уравнение (3) можно представить как

$$\tilde{f}_A(\tilde{P}, x) \cdot \tilde{f}_B(\tilde{P}, x) = \tilde{0} \tag{6}$$

с теми же функциями  $f_A = (\circ)$ ,  $f_B = (\circ)$ , что и в формуле (4). Уравнение (6) можно разбить на пару уравнений

$$\tilde{f}_A(\tilde{P}, x) = \tilde{0} \text{ или } \tilde{f}_B(\tilde{P}, x) = \tilde{0}, \tag{7}$$



в левых частях которых последней операцией является сложение. Благодаря этому уравнения (7) можно решить с помощью алгоритма, изложенного выше.

#### 4. Интервальный подход

Будем решать интервальное уравнение (3), используя интервальный подход. Этот подход основан на эквивалентных преобразованиях обеих частей интервального уравнения с помощью подходящих законов интервальной математики. В результате таких преобразований левая и правая части интервального уравнения приводятся к явному виду интервала, а все интервальное уравнение – к явному интервальному виду

$$[f_1(P_f, x), f_2(P_f, x)] = [\varphi_1(P_\varphi, x), \varphi_2(P_\varphi, x)], \quad (8)$$

где  $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$  – детерминированные функции переменной  $x$ , а  $P_f, P_\varphi$  – векторы параметров вида (2). От (8), приравняв нижние границы левого и правого интервалов, а также их верхние границы, получаем систему из двух обычных (детерминированных) уравнений, которая эквивалентна исходному интервальному уравнению (8)

$$\left. \begin{aligned} f_1(P_f, x) &= \varphi_1(P_\varphi, x) \\ f_2(P_f, x) &= \varphi_2(P_\varphi, x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом, решение  $x^*$  системы детерминированных уравнений (9), если оно существует, является точным решением интервального уравнения (3). Если система (9) не имеет решения, но первое и второе ее уравнения имеют решения соответственно  $x'_1$  и  $x'_2$ , которые близки, то можно принять  $x^* \approx x'_1$  или  $x^* \approx x'_2$  или, что, очевидно, лучше  $x^* \approx (x'_1 + x'_2)/2$  или даже  $x^* = [x'_1, x'_2]$ . В остальных случаях решения системы детерминированных уравнений (9), а значит, и решения интервального уравнения (3) не существует.

В эквивалентных преобразованиях обеих частей интервального уравнения (3) для приведения его к системе (9) используются следующие законы интервальной математики

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] + [b_1, b_2] &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2]; \quad [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]; \\ k[a_1, a_2] &= \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0, \\ [ka_2, ka_1], & k < 0; \end{cases} \\ [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] &= [\min_{i,j} (a_i \cdot b_j), \max_{i,j} (a_i \cdot b_j)]; \\ [a_1, a_2] / [b_1, b_2] &= [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1] = [\min_{i,j} (a_i / b_j), \max_{i,j} (a_i / b_j)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Детали интервального алгоритма поиска решения интервального уравнения поясним, как и выше, на примере решения уравнения с одним корнем.

**Пример 2.** Найти решение интервального уравнения  $e^{-\tilde{p} \cdot x} = \tilde{q}x$  с интервальными параметрами  $\tilde{p} = [p_1, p_2]$ ,  $\tilde{q} = [q_1, q_2]$ . Решение данного уравнения множественным способом, с использованием графического представления интервальных кривых, было показано в примере 1. Теперь применим интервальный метод. При этом необходимость графического представления кривых от-

падает, и процедура отыскания решения интервального уравнения упрощается. Алгоритм решения следующий.

**Шаг 1.** Приводим левую и правую части уравнения к явному виду интервала. Учитывая, что корень уравнения  $x > 0$ , а функция  $e^x$  – монотонно возрастающая, с помощью (10) находим: правая часть  $\tilde{q}x = [q_1, q_2] \cdot x = [q_1x, q_2x]$ , левая часть  $e^{-\tilde{p}x} = e^{-[p_1, p_2]x} = e^{-[p_1x, p_2x]} = e^{[-p_2x, -p_1x]} = [e^{-p_2x}, e^{-p_1x}]$

**Шаг 2.** Представляем все уравнение в явном интервальном виде

$$[e^{-p_2x}, e^{-p_1x}] = [q_1x, q_2x] \quad (11)$$

**Шаг 3.** Переходим от интервального уравнения (11) к системе двух детерминированных уравнений, приравнивая нижние границы правого и левого интервала в (11), а также их верхние границы. Получаем

$$\left. \begin{aligned} e^{-p_2x} &= q_1x \\ e^{-p_1x} &= q_2x \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

**Шаг 4.** Решаем систему уравнений (12). Находим корни 1-го уравнения  $x'_1$  и 2-го уравнения  $x'_2$ . Если  $x'_1 = x'_2$ , то существует точное решение системы (12), которое равно  $x^* = x'_1 = x'_2$ . Оно же является решением заданного интервального уравнения. Если  $x'_1 \neq x'_2$ , то точное решение системы (12) и, соответственно, точное решение интервального уравнения не существует. Однако при  $x'_1 \approx x'_2$  существует приближенное решение  $x^*$  системы (12) и интервального уравнения:  $x^* \approx x'_1$  или  $x^* \approx x'_2$  или  $x^* \approx (x'_1 + x'_2)/2$  или  $x^* = [x_1^*, x_2^*]$ , где  $x_1^* = \min(x'_1, x'_2)$ ,  $x_2^* = \max(x'_1, x'_2)$ . При существенно различных  $x'_1$  и  $x'_2$  решения системы (12) и интервального уравнения не существует.

Найдем решение того же конкретного интервального уравнения, что и в примере 1:  $e^{-[0,5;0,7]x} = [2,3]x$ . В данном случае система (12) приобретает вид

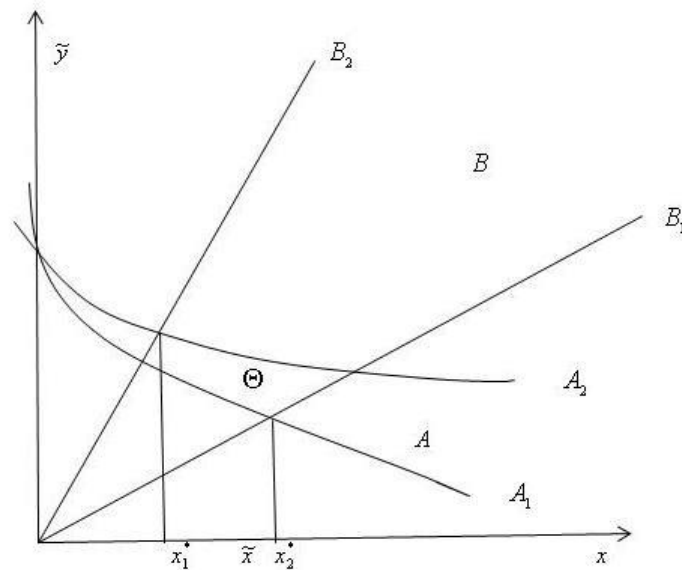
$$\left. \begin{aligned} e^{-0,7x} &= 2x \\ e^{-0,5x} &= 3x \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Решая 1-е и 2-е уравнения (13) численным методом, находим их решения в виде  $x'_1 = 0,381$ ,  $x'_2 = 0,289$ . Здесь  $x'_1 \neq x'_2$ , так что точного решения системы (13) заданного интервального уравнения не существует. Однако можно считать, что  $x'_1 \approx x'_2$  и потому существует приближенное их решение

$$\begin{aligned} x^* &\approx 0,381 \text{ или } x^* \approx 0,289 \text{ или } x^* \approx (0,381 + 0,289)/2 = 0,335 \text{ или} \\ x^* &= [0,289, 0,381]. \end{aligned} \quad (14)$$

Графическое изображение интервальных кривых, представляющих функции левой и правой частей рассмотренного в примере 2 интервального уравнения, показано на рис.2.

Из рис. 2 видно, что единственная область  $\Theta$ , которую следует считать общей частью обеих интервальных кривых, расположена между крайней правой точкой  $x'_2$  и крайней левой точкой  $x'_1$ . Так что проекция области  $\Theta$  на ось  $X$ , являющаяся объединенным решением заданного интервального уравнения, имеет вид интервала  $x^* = [x_1^*, x_2^*]$ .



$A$  - интервальная кривая  $\tilde{y} = e^{-\tilde{p} \cdot x}$ , где  $\tilde{p} = [p_1, p_2]$ ;

$B$  - интервальная кривая  $\tilde{y} = \tilde{q}x$ , где  $\tilde{q} = [q_1, q_2]$ ;

$A_1$  - детерминированная кривая  $y = e^{-p_1 \cdot x}$ ;

$A_2$  - детерминированная кривая  $y = e^{-p_2 \cdot x}$ ;

$B_1$  - детерминированная кривая  $y = q_1 x$ ;

$B_2$  - детерминированная кривая  $y = q_2 x$

$\Theta$  - пересечение интервальных кривых  $A$  и  $B$

$x^* = [x_1^*, x_2^*]$  – проекция  $\Theta$  на ось  $X$  – решение интервального уравнения  
$$e^{-\tilde{p} \cdot x} = \tilde{q}x$$

Рис. 2. Графическое представление решения интервального уравнения интервальным методом

Левая  $x_1^*$  и правая  $x_2^*$  границы этого решения являются соответственно точкой пересечения кривых  $A_2$  и  $B_2$  [т.е. решением 2-го уравнения (13)] и точкой пересечения кривых  $A_1$  и  $B_1$  [т.е. решением 1-го уравнения (13)].

Сравнивая рис. 1 и рис. 2, видим, что область  $\Omega$ , определяющая множество решений рассмотренного интервального уравнения при множественном подходе, шире области  $\Theta$ , определяющей множество решений этого уравнения при интервальном подходе. Это положение остается справедливым и для других интервальных уравнений. Оно может быть записано в виде  $\Theta \subset \Omega$ .

Решение с помощью интервального подхода интервальных уравнений с несколькими корнями и уравнений типа (6) (где последняя операция не сложение, а умножение) осуществляется так же, как при использовании множественного подхода.



## 5. Обсуждение

Выше было показано (теоретически и на конкретных примерах), что решение возникающих на практике разнообразных интервальных уравнений возможно, по крайней мере, двумя различными способами. Первый, множественный способ рассматривает интервальное уравнение как множество образующих его обычных уравнений, полученных варьированием их параметров в границах интервальных параметров интервального уравнения. При этом множество решений интервального уравнения получается как множество решений образующих его обычных уравнений. Второй, чисто интервальный способ рассматривает интервальное уравнение не как множество обычных уравнений, а как одно уравнение, имеющее, однако, интервальные параметры, подчиняющиеся законам интервальной математики. Эквивалентное преобразование интервального уравнения по этим законам приводит его к виду детерминированного уравнения, решение которого можно получить известными методами. Предложенный в данной статье чисто интервальный способ решения интервального уравнения существенно отличается от известного ранее множественного способа. Отличие есть в определении того, что считать решением интервального уравнения (при множественном подходе решением является множество всех точек пересечения интервальных функций в левой и правой частях уравнения, а при интервальном подходе – множество точек, в которых интервальные функции в левой и правой частях уравнения равны или приближенно равны): в используемом математическом аппарате (при множественном подходе это теория множеств, при интервальном подходе – интервальная математика); в возможности нахождения точного решения (при множественном подходе такое решение всегда существует и может быть найдено всегда, при интервальном подходе – не всегда). Кроме того, множество получаемых с помощью интервального подхода решений интервального уравнения всегда уже множества решений, получаемых с помощью множественного подхода, составляя его часть. Последняя особенность интервального подхода связана с тем, что в нем учитываются только часть точек, геометрически относящихся к пересечению интервальных кривых левой и правой частей уравнения. Эта особенность свидетельствует об адекватности предложенного в статье интервального подхода, проявляющейся в том, что сокращение информации об уравнении (переход от детерминированного к интервальному уравнению) приводит к размыванию его решения (переходу от единственности решения к множеству решений).

## Заключение

В работе предложен новый подход к решению интервальных уравнений, основанный на эквивалентном преобразовании уравнения по законам интервальной математики, в результате чего оно приводится к детерминированному виду и может быть решено хорошо известными методами решения обычных (детерминированных) уравнений. Этот подход отличается от известного множественного подхода содержанием понятия «решение интервального уравнения» и полной формализацией процесса отыскания корней уравнения. Этот процесс строится на использовании аппарата интервальной математики, благо-

даря чему полностью исключает различные эвристические приемы, что существенно упрощает процесс решения уравнения. Важно отметить, что точные значения корней интервального уравнения при интервальном подходе могут существовать, а могут и не существовать. В первом случае эти значения можно найти. Во втором случае можно найти приближенные значения корней уравнения. Предложенный подход к решению интервальных уравнений имеет важное значение, позволяя решать разнообразные задачи, связанные с исследованием неточно известных характеристик систем в технике, экономике, социальной сфере.

### Литература

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 2005. – 575 с.
2. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
3. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
4. Канторович Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. № 5. С. 3-14.
5. Налимов В. В., Чернова Л. А. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 320 с.
6. Вошинин А. П., Сотиров Г. Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – М.: МЭИ, София: Техника, 1989. – 226 с.
7. Gorsky V., Shvetzova-Shilovskaya T., Voschinin A. Risk assessment of Accident involving environmental high-toxicity substances // Journal of Hazardous Materials. 2000. no. 78.
8. Вошинин А. П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. 2002. Т. 68. № 1. С. 118-126.
9. Левин В. И. Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности. – Пенза: ПТИ, 1998. – 68 с.
10. Левин В. И. Методология оптимизации в условиях неопределенности методом детерминизации // Информационные технологии. 2014. № 5. С. 14-21.
11. Левин В. И. Метод моделирования поведения функций с помощью раздетерминизации // Радиоэлектроника, информатика, управление. 2017. № 1. С. 33-41.
12. Орлов А. И. Статистика интервальных данных // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81. № 3. С. 61-69.
13. Скибицкий Н. В. Построение прямых и обратных статических характеристик объектов по интервальным данным // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Т. 83. № 1. Ч. 1. С. 87-98.
14. Хладик М. Новый оператор и способ решения линейных интервальных уравнений // arXiv.org [Электронный ресурс]. 2013. – URL: <https://arxiv.org/pdf/1306.6739v1.pdf> (дата обращения: 20.09.2017).

15. Шарый С. П., Шарая И. А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 3. С.80-109.

### References

1. Ventcel E. S. *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2005. 575 p. (in Russian).

2. Zadeh L. A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. *Information Sciences*, 1975, no 8, 9, pp. 199-249, 301-357, 43-80.

3. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to Interval Computation*. N.Y., Academic Press, 1983. 352 p.

4. Kantorovich L. V. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений [Some new approaches to computational methods and treatment of observations]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal*, 1962, vol. 3, no. 5, pp. 3-14. (in Russian).

5. Nalimov V. V., Chernova L. A. *Teoriya experimenta* [The theory of the experiment]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 320 p. (in Russian).

6. Voschinin A. P., Sotirov G. R. *Optimizatsiya v usloviyah neopredelennosti* [Optimization under uncertainty]. Moscow, Moscow Power Engineering Institute, 1989. 226 p. (in Russian).

7. Gorsky V., Shvetzova-Shilovskaya T., Voschinin A. Risk assessment of Accident involving environmental high-toxicity substances. *Journal of Hazardous Materials*, 2000, no. 78.

8. Voschinin A. P. Intervalniy analiz dannyh: razvitie i perspektivy [Interval data analysis: development and prospects]. *Zavodskaya laboratoriya*, 2002, vol. 68, no. 1, pp. 118-126 (in Russian).

9. Levin V. I. *Intervalnaya matematika i issledovanie sistem v usloviyah neopredelennosti* [Interval mathematics and the study of systems under conditions of uncertainty]. Penza, Penza Polytechnic Institute, 1998. 68 p. (in Russian).

10. Levin V. I. The Methodology of Optimization in Condition of Uncertainty by Determination Method. *Informacionnye tehnologii*, 2014, no. 5, pp. 14-21 (in Russian).

11. Levin V. I. Method of modeling of behavior of function by dedetermination. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2017, no. 1, pp. 33-41 (in Russian).

12. Orlov A. I. Statistics of interval data. *Industrial Laboratory*, 2015, vol. 81, no 3, pp. 61-69 (in Russian).

13. Skibitsky N. V. Construction of direct and inverse static characteristics of objects by interval data. *Industrial Laboratory*, 2017, vol. 83, no. 1, part 1, pp. 87-98 (in Russian).

14. Khladik M. New operator and method for solving linear interval equations. *arXiv.org*, 2013. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1306.6739v1.pdf> (accessed 20 September 2017) (in Russian).

15. Shary S. P., Sharaya I. A. Recognition of the solvability of interval equations and its applications to data analysis. *Computational Technologies*, 2013, vol. 18, no 3, pp. 80-109 (in Russian).

Статья поступила 25 сентября 2017 г.

### Информация об авторе

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. E-mail: vilevin@mail.ru  
Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

---

## Interval Equations and Modelling of Uncertain Systems

V. I. Levin

**Relevance.** In the modeling of technical, economic, social systems, it is often necessary to solve equations with interval-specific parameters (interval equations). The solution of such equations requires special methods that differ from the methods for solving ordinary, deterministic equations. A new method for solving interval equations based on the apparatus of interval mathematics is proposed. **Goal.** The aim of the work is the development of a completely formalized method for solving interval equations based on the mathematical apparatus mentioned. **Method.** The method proposed in the article consists in using equivalent transformations of both parts of the interval equation according to the laws of interval mathematics that allow one to move from the interval equation to the ordinary deterministic equations and their subsequent solution by known methods. **Result.** It is shown that the solution of various interval equations can be performed by two different methods: multiple and interval. The differences between these two methods in the concept of solving the equation, in the mathematical apparatus used, in the possibility of an exact solution, in the power of the resulting set of solutions are revealed. An example of a solution of the interval equation used in the calculation of the zone of contamination by a dangerous substance is given by two methods. **Conclusions.** The paper proposes a new approach to solving interval equations based on an equivalent transformation of the equation according to the laws of interval mathematics. Such a transformation allows us to bring the equation to a deterministic form, which makes it possible to solve it by well-known methods for solving ordinary (deterministic) equations. The proposed approach allows us to find the exact solution of the interval equation (if it exists) or its approximate solution (if there is no exact solution).

**Keywords:** interval, interval function, interval equation, set method, interval method.

### Information about Author

Vitaly Ilich Levin – Doctor of Technical Sciences, Full Professor. Honoured Scientist of Russia. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economics, sociology, history; decision making, optimization, recognition, automata theory, reliability theory, history of science, problems of education. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: 440039, Russia, Penza, pr. Baydukova / Gagarin st., 1a/11.