УДК 62–50:519.7/8

Полиинтервалы в задачах оптимизации неопределенных систем

Левин В.И.

Актуальность. *В последние десятилетия в гражданской и военных сферах все чаще встречаются технологии, основанные на новых подходах к описанию неопределенности. Эти технологии широко применяются в технике, экономике, социальной сфере. Для их поддержки необходимы новые математические модели и методы. В связи с этим данная статья, посвященная разработке новой модели неопределенности (полиинтервал) и математических методов ее изучения, применительно к решению задач оптимизации в условиях неопределенности, является актуальной.* ***Цель статьи*** *заключается в детальной разработке новой математической модели неопределенности – полиинтервала, являющегося последовательностью конечного числа интервалов неопределенности, с целью оптимизации разнообразных систем с полиинтервальными параметрами.* ***Метод.*** *Для достижения поставленной цели предложено распространить на изучение оптимальных операций над полиинтервалами известный в интервальной математике метод введения операций над интервалами в виде теоретико-множественного обобщения соответствующих операций над вещественными числами.* ***Новизна*** *работы заключается в предложенной новой математической модели неопределенности систем в виде полиинтервалов, совместно с математическим аппаратом, позволяющим выполнять оптимальные операции над полиинтервалами и тем самым дающим возможность решать задачи оптимизации систем с полиинтервальными параметрами.* ***Результат****. В статье детально разработана новая математическая модель неопределенности – полиинтервал. Определены оптимальные операции (max, min) над полиинтервалами, выведены правила их выполнения. Установлены необходимые и достаточные условия существования этих операций, т.е. условия сравнимости полиинтервалов. Дан пример использования полученных результатов для принятия оптимального решения.*

Ключевые слова: *полиинтервалы, сравнение полиинтервалов, максимальный (минимальный) полиинтервал.*

Введение

В период Второй мировой войны появилось много новых технологий: обнаружение воздушных целей с помощью радаров, управление огнем зенитной артиллерии, шифровка и дешифровка информации в системах связи и т.д. Все эти технологии были связаны с исследованием неопределенности и использовали соответствующие математические методы, главным образом, теорию вероятностей. После войны эти исследования были продолжены и распространены на гражданскую сферу – технику, экономику, социум. При этом под неопределенностью стали понимать не только случайность возможных исходов, но и их неединственность или незнание, дрейф переменных, семантическую неопределенность целей, многокритериальность при принятии решений, недоопределенность модели или структуры изучаемой системы и т.д.

Библиографическая ссылка на статью:
Левин В.И. Полиинтервалы в задачах оптимизации неопределенных систем // Системы управления, связи и безопасности. 2017. № 1. С. 49–59. URL: http://sccs.intelgr.com/archive/2017-01/05-Levin.pdf
Reference for citation:
Levin V. I. Polyintervals in Problems of Optimization of Indeterminate Systems. *Systems of Control, Communication and Security*, 2017, no. 1, pp. 49–59. Available at: http://sccs.intelgr.com/archive/2017-01/05-Levin.pdf (in Russian).

Эти новые подходы к описанию неопределенности систем привели к созданию новых математических методов их изучения: теория нечетких множеств [1], многозначная и непрерывная логика [2], теория сверхслучайных процессов [3] и т.д. Одним из популярных методов стала также интервальная математика, изучающая величины, определяемые с точностью до интервалов возможных значений [4, 5]. Однако одиночные интервалы, изучаемые в интервальной математике, не охватывают всех практических ситуаций. Например, неопределенный период времени, в течение которого возможно проведение некоторой военной операции, может содержать несколько последовательных временных интервалов. Эти новые неопределенные объекты, имеющие вид последовательностей интервалов неопределенности, были введены В.И. Левиным в работе [6] и названы полиинтервалами. Полиинтервалы являются расширением интервальной модели неопределенности систем. В работе [6] было построено исчисление полиинтервалов, основанное на операциях над полиинтервалами, аналогичных операциям над интервалами в интервальной математике. Этими операциями являются сложение, вычитание, умножение и деление. Данная статья посвящена построению и исследованию другой важной операции над полиинтервалами – сравнению. Эта операция вводится на основе теории сравнения интервалов [7] и может быть использована для оптимизации полиинтервальных величин и функций.

1. Постановка задачи

Базой для исчисления полиинтервалов [6] служит исчисление интервалов, называемое иначе интервальной математикой [4, 5]. Интервал вводится как множество всех возможных значений неполностью определенной величины $\tilde{a}$, задаваемой лишь ее нижней a_1 и верхней a_2 границами. Формально, величину $\tilde{a}$ можно записать в виде следующего числового множества – ограниченного интервала неопределенности

$$\tilde{a} \equiv [a_1, a_2] = \{a \mid a_1 \le a \le a_2\}. \qquad (1)$$

Согласно (1) неизвестное истинное значение неопределенной величины $\tilde{a}$ достоверно лежит в пределах интервала $[a_1, a_2]$, не выходя за его границы a_1 и a_2. При этом все значения величины $\tilde{a}$ в пределах указанного интервала считаются равновозможными в том смысле, что нет никаких оснований предпочитать одно значение другому. Понятие равновозможности здесь не означает задание равномерного вероятностного или какого-либо иного равномерного распределения величины $\tilde{a}$ внутри указанного интервала. Над интервалами вида (1) вводятся алгебраические операции, обобщающие соответствующие операции над числами. Для этого используется теоретико-множественная конструкция

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \bullet b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \circ \tilde{a} = \{\bullet a \mid a \in \tilde{a}\}. \qquad (2)$$

Согласно (2), любая операция над интервалами $\circ$ определяется на базе соответствующей операции над точными числами $\bullet$, при условии, что конкретные значения этих чисел пробегают все возможные значения из соответствующих интервалов. Из определения (2) следуют простые правила выполнения операций над интервалами:

$$
\begin{aligned}
&[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,a_2+b_2];\\
&[a_1,a_2]-[b_1,b_2]=[a_1-b_2,a_2-b_1];\\
&k\cdot[a_1,a_2]=\begin{cases}[ka_1,ka_2], & k>0,\\ [ka_2,ka_1], & k<0;\end{cases}\\
&[a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=[\min_{i,j}(a_i\cdot b_j),\max_{i,j}(a_i\cdot b_j)];\\
&[a_1,a_2]/[b_1,b_2]=[a_1,a_2]\cdot[1/b_2,1/b_1],\ \text{при}\ 0\notin[b_1,b_2].
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Развивая понятие интервала, в [6] было введено понятие полиинтервала как последовательности нескольких непересекающихся одиночных интервалов

$$\tilde{A}=(\tilde{a},\tilde{b},...,\tilde{d}), \tag{4}$$

где $\tilde{a},\tilde{b},...,\tilde{d}$ – одиночные интервалы вида (1).

В (4) считается, что каждый следующий одиночный интервал сдвинут вправо от предыдущего и не пересекается с ним. Операции над полиинтервалами были введены в [6] аналогично операциям над интервалами с помощью теоретико-множественной конструкции типа (2)

$$\tilde{A}\circ\tilde{B}=\{a\bullet b\,|\,a\in\tilde{A},b\in\tilde{B}\},\quad \circ\tilde{A}=\{\bullet a\,|\,a\in\tilde{A}\}. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{A}$ – полиинтервал вида (4), $\tilde{B}$ – другой полиинтервал того же вида, но с другими составляющими его одиночными интервалами. На базе определения (5) операций над полиинтервалами в работе [6] были выведены правила конструктивного выполнения следующих алгебраических операций с полиинтервалами: сложение, вычитание, умножение полиинтервала на число, умножение и деление полиинтервалов. Задача настоящей статьи заключается в том, чтобы на базе того же определения вывести правило конструктивного выполнения еще одной, весьма важной операции над полиинтервалами – определение максимального и минимального из двух полиинтервалов. Важность этой операции связана с тем, что к ее выполнению (равно как и к выполнению аналогичной операции над одиночными интервалами) сводятся многие классы задач оптимального планирования разнообразных систем и процессов, функционирующих в условиях неопределенности [8]. На базе этой операции также появляется возможность сравнения интервалов и их упорядочения по отношениям «больше», «меньше» и «равно».

2. Решение задачи

Следуя [6], будем представлять полиинтервалы (4) в теоретико-множественных терминах следующим образом:

$$\tilde{A}=\tilde{a}\cup\tilde{b}\cup...\cup\tilde{d}. \tag{6}$$

Пусть заданы два полиинтервала $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ следующего вида

$$\tilde{A}=\bigcup_{i=1}^{m}\tilde{a}^i,\quad \tilde{B}=\bigcup_{j=1}^{n}\tilde{b}^j, \tag{7}$$

где $\tilde{a}^i = [a_1^i, a_2^i], i = \overline{1,m}$ и $\tilde{b}^j = [b_1^j, b_2^j], j = \overline{1,n}$ – одиночные интервалы, в совокупности составляющие $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ соответственно. Требуется определить максимальный и минимальный из этих интервалов. Другими словами, требуется выполнить операции

$$\tilde{C} = \tilde{A} \vee \tilde{B},\ \tilde{D} = \tilde{A} \wedge \tilde{B}, \tag{8}$$

где $\vee$ – операция взятия максимума, а $\wedge$ – операция взятия минимума, а $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ – максимальный и минимальный интервалы. Эти две операции мы определим формально, как и другие операции над полиинтервалами, введенные в [6] (сложение, вычитание, умножение), при помощи теоретико-множественной конструкции (5). Таким образом, максимум и минимум двух полиинтервалов определяются в виде

$$\tilde{C} = \tilde{A} \vee \tilde{B} = \{a \vee b \mid a \in \tilde{A}, b \in \tilde{B}\},\ \tilde{D} = \tilde{A} \wedge \tilde{B} = \{a \wedge b \mid a \in \tilde{A}, b \in \tilde{B}\}. \tag{9}$$

Т.е. операции взятия максимума (минимума) двух полиинтервалов определяются на основе соответствующих операций над двумя точно заданными величинами при условии, что конкретные значения этих величин пробегают все возможные значения из соответствующих полиинтервалов.

Исходя из определений операции взятия максимума и минимума двух полиинтервалов (9), нетрудно установить формулу для конструктивного выполнения этих операций. Для этого используем следующую базовую формулу, позволяющую выполнить произвольную операцию $\circ$ над этими полиинтервалами $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в виде суперпозиции этой операции над одиночными интервалами $\tilde{a}^i$, $\tilde{b}^j$, составляющими $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ [6]

$$\tilde{A} \circ \tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^i \circ \tilde{b}^j)$$

или в развернутом виде

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^i \right) \circ \left(\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{b}^j \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^i \circ \tilde{b}^j) \tag{10}$$

Подставляя теперь в формулу (10) вместо $\circ$ конкретные операции $\vee$ и $\wedge$, получим необходимые формулы для конструктивного выполнения операций взятия максимума и минимума двух полиинтервалов

$$\tilde{A} \vee \tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^i \vee \tilde{b}^j),$$

или в развернутом виде

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^i \right) \vee \left(\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{b}^j \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^i \vee \tilde{b}^j). \tag{11}$$

$$\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^i \wedge \tilde{b}^j),$$

или в развернутом виде

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m}\tilde{a}^i\right)\wedge\left(\bigcup_{j=1}^{n}\tilde{b}^j\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}(\tilde{a}^i\wedge\tilde{b}^j). \qquad (12)$$

Формулы (11), (12) сводят вычисление максимума и минимума двух полиинтервалов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ к вычислению максимумов и минимумов всех пар одиночных интервалов ($\tilde{a}^i$, $\tilde{b}^j$), составляющих $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. Однако непосредственное использование этих формул для вычисления максимального (минимального) из полиинтервалов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не всегда удобно, так как, во-первых, это требует вычисление максимума (минимума) для каждой пары одиночных интервалов ($\tilde{a}^i$, $\tilde{b}^j$), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, а, во-вторых, не для каждой пары полиинтервалов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ существует максимальный (минимальный) полиинтервал. Поэтому гораздо практичнее сначала установить существование максимального (минимального) из двух заданных полиинтервалов, используя подходящий критерий существования, и только после этого устанавливать максимальный и минимальный полиинтервал. Простой критерий существования максимального (минимального) из двух заданных полиинтервалов дает нижеследующая теорема. Она же сразу устанавливает, какой из полиинтервалов является максимальным, а какой – минимальный.

В работе [7] были введены отношения между интервалами на основе теории множеств. При этом для любых двух интервалов $\tilde{a}=[a_1,a_2]$, $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ по определению принимается:

$$\tilde{a}=\tilde{b}, \text{ если } a_1=b_1,\ a_2=b_2, \qquad (13)$$

$$\tilde{a}\geq\tilde{b}, \text{ если } \tilde{a}\vee\tilde{b}=\tilde{a},\ \tilde{a}\wedge\tilde{b}=\tilde{b}, \qquad (14)$$

$$\tilde{a} \text{ не сравнимо с } \tilde{b}, \text{ если } \tilde{a}\neq\tilde{b},\ \tilde{a}\ngeq\tilde{b},\ \tilde{b}\ngeq\tilde{a}, \qquad (15)$$

На основании определений (13)–(15) было показано [7]:

1) для того, чтобы интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ находились в отношении $\tilde{a}\geq\tilde{b}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $a_1\geq b_1$, $a_2\geq b_2$;

2) для того, чтобы интервалы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ были несравнимы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $a_1<b_1$, $a_2>b_2$ или $b_1<a_1$, $b_2>a_2$.

Другими словами, для выполнения отношения $\tilde{a}\geq\tilde{b}$ требуется, чтобы интервал $\tilde{a}$ был сдвинут относительно интервала $\tilde{b}$ вправо обеими своими границами, а для несравнимости этих интервалов требуется, чтобы один из них (безразлично какой) полностью накрывал другой.

Отношения между полиинтервалами мы введем теперь аналогично отношению между интервалами. Именно, для любых двух полиинтервалов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ вида (7) по определению принимаем

$$\tilde{A}=\tilde{B}, \text{ если } m=n,\ \tilde{a}^1=\tilde{b}^1,\ \tilde{a}^2=\tilde{b}^2,\dots\tilde{a}^m=\tilde{b}^m, \qquad (16)$$

$$\tilde{A}\geq\tilde{B}, \text{ если } \tilde{A}\vee\tilde{B}=\tilde{A},\ \tilde{A}\wedge\tilde{B}=\tilde{B}, \qquad (17)$$

$$\tilde{A} \text{ не сравнимо с } \tilde{B}, \text{ если } \tilde{A}\neq\tilde{B},\ \tilde{A}\ngeq\tilde{B},\ \tilde{B}\ngeq\tilde{A}. \qquad (18)$$

Теорема 1. Для того, чтобы два полиинтервала $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ вида (7) были сравнимы и находились в отношении $\tilde{A}\geq\tilde{B}$, необходимо и достаточно, чтобы входящий в состав $\tilde{A}$ минимальный одиночный интервал $\tilde{a}^1$ и входящий в состав $\tilde{B}$ максимальный одиночный интервал $\tilde{b}^n$ находились в отношении $\tilde{a}^1 \geq \tilde{b}^n$.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие $\tilde{a}^1 \geq \tilde{b}^n$. Тогда, по определению полиинтервалов, для всех i, j справедливо неравенство $\tilde{a}^i \geq \tilde{b}^j$. Отсюда ясно, что для всех i, j имеем $\tilde{a}^i \vee \tilde{b}^j = \tilde{a}^i$, $\tilde{a}^i \wedge \tilde{b}^j = \tilde{b}^j$. Таким образом, по формулам (11), (12) получаем

$$\tilde{A} \vee \tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^i = \tilde{A},\ \tilde{A} \wedge \tilde{B} = \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{b}^j = \tilde{B}.$$

Два последних соотношения, согласно определению (17) означают, что полиинтервалы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ сравнимы и находятся в отношении $\tilde{A} \geq \tilde{B}$. Что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть два полиинтервала $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ сравнимы и находятся в отношении $\tilde{A} \geq \tilde{B}$. Тогда, в соответствии с определением этого отношения (17), верны следующие два равенства $\tilde{A} \vee \tilde{B} = \tilde{A}$, $\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \tilde{B}$. Выражая в них операции $\vee$ и $\wedge$ по формулам (11), (12), а полиинтервалы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ по формулам (7), перепишем их в виде

$$\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^i \vee \tilde{b}^j) = \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^i,\ \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^i \wedge \tilde{b}^j) = \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{b}^j.$$

В первом выписанном равенстве правая часть зависит только от интервалов $\tilde{a}^i$, $i = \overline{1,m}$, поэтому, чтобы имело место равенство, его левая часть также должна зависеть только от интервалов $\tilde{a}^i$, $i = \overline{1,m}$, а это возможно только при выполнении условия $\tilde{a}^i \geq \tilde{b}^j$ для всех i, j. Аналогично выводится выполнение этого условия из второго выписанного равенства. Выполнение данного условия означает, что любой одиночный интервал $\tilde{a}^i$, входящий в состав полиинтервала $\tilde{A}$, находится в отношении $\geq$ к любому одиночному интервалу $\tilde{b}^j$, входящему в состав полиинтервала $\tilde{B}$. В частности, справедливо отношение $\tilde{a}^1 \geq \tilde{b}^n$, что и требовалось доказать.

Формулы (11), (12) дают нам конструктивные правила выделения большего и меньшего из двух имеющихся полиинтервалов для тех случаев, когда они существуют. Теорема 1 дает простое правило проверки существования большего и меньшего из двух имеющихся полиинтервалов. Теперь алгоритм решения различных задач исследования систем с полиинтервальными характеристиками, требующих сравнения полиинтервалов, можно представить следующим образом.

Шаг 1. Построение абстрактной математической модели, представляющей решение задачи как попарное сравнение некоторого числа полиинтервалов, являющихся числовыми значениями характеристик изучаемой системы в условиях неопределенности, с целью последующего выделения полиинтервалов, являющихся решением задачи.

Шаг 2. Анализ подлежащих сравнению пар полиинтервалов, с целью выявления пар сравнимых и несравнимых полиинтервалов. Анализ проводится с помощью условий (16)–(18). При этом пары, удовлетворяющие условию (16) (равные полиинтервалы) или условию (17) (полиинтервалы, находящиеся в отношении $\geq$), относим к парам сравнимых полиинтервалов, а пары, удовлетворяющие условию (18) – к парам несравнимых полиинтервалов.

Шаг 3. Построение структурной математической модели решения задачи в виде частично ориентированного графа, с использованием шагов 1, 2. Вершинами графа являются полиинтервалы, выделенные на шаге 1, его ребрами – линии, соединяющие вершины равных полиинтервалов, его дугами (ориентированными ребрами) – линии, соединяющие вершины неравных полиинтервалов в направлении от меньших полиинтервалов к большим. При этом вершины, отвечающие несравнимым полиинтервалам, не соединяются никакими линиями. При построении граф-модели используются пары равных полиинтервалов, пары полиинтервалов с отношением $\geq$ и пары несравнимых полиинтервалов, полученные на шаге 2.

Шаг 4. Вычисление по структурной граф-модели вершины, соответствующей полиинтервалу, представляющему собой решение задачи. Чаще всего в качестве такого полиинтервала берется экстремальный – максимальный или минимальный полиинтервал. Возможны и другие варианты.

Пример. При поступлении на службу работник выбирает между фирмами A, B и С. Фирма A предлагает ему месячную зарплату (в зависимости от заказов фирмы) в размере 10000 ± 2000 руб. или 15000 ± 2000 руб., аналогично фирма B – в размере 5000 ± 1000 руб. или 8000 ± 1000 руб., а фирма C – в размере 6000 ± 1000 руб. или 9000 ± 1000 руб. Работнику нужно выбрать фирму с максимальной зарплатой.

Решение. *Шаг 1.* В фирме A первую заработную плату работника можно представить в виде интервала $[a_1^1, a_2^1] = [8000, 12000]$, 2-ю – как интервал $[a_1^2, a_2^2] = [13000, 17000]$. Аналогично, в фирме B 1-ю зарплату работника можно представить в виде интервала $[b_1^1, b_2^1] = [4000, 6000]$, а 2-ю – в виде интервала $[b_1^2, b_2^2] = [7000, 9000]$, а в фирме C 1-ю зарплату можно представить в виде интервала $[c_1^1, c_2^1] = [5000, 7000]$, а 2-ю – в виде интервала.$[c_1^2, c_2^2] = [8000, 10000]$. Итак, месячную зарплату работника в фирмах A, B и C можно представить соответственно следующими полиинтервалами

$$\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{2} [a_1^i, a_2^i] = [8000, 12000] \cup [1300, 17000],$$

$$\tilde{B} = \bigcup_{j=1}^{2} [b_1^j, b_2^j] = [4000, 6000] \cup [7000, 9000],$$

$$\tilde{C} = \bigcup_{j=1}^{2} [c_1^j, c_2^j] = [5000, 7000] \cup [8000, 10000].$$

Абстрактная математическая модель решения задачи представляет собой совокупность полиинтервалов $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$, попарное сравнение которых должно на следующих шагах выделить максимальный полиинтервал, являющийся решением задачи.

Шаг 2. Попарно сравниваем полиинтервалы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ с помощью условий (16)–(18) и теоремы 1. Пара ($\tilde{A}$, $\tilde{B}$). Сравнив полиинтервалы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ с помощью теоремы 1, находим $a^1 = [8000,12000]$, $b^2 = [7000,9000]$, здесь $8000 > 7000$, $12000 > 9000$, и поэтому, согласно (14), $a^1 \geq b^2$, откуда по теореме 1 $\tilde{A} \geq \tilde{B}$.

Пара ($\tilde{A}$, $\tilde{C}$). С помощью тех же условий находим $a^1 = [8000,12000]$, $c^2 = [8000,10000]$, здесь $8000 \geq 8000$, $12000 > 10000$ и потому, согласно (14), $a^1 \geq c^2$, откуда по теореме 1 $\tilde{A} \geq \tilde{C}$.

Пара ($\tilde{B}$, $\tilde{C}$). С помощью тех же условий находим $b^1 = [4000,6000]$, $c^2 = [8000,10000]$, здесь $4000 < 8000$, $6000 > 10000$ и потому $b^1 \ngeq c^2$, откуда по теореме 1 $\tilde{B} \ngeq \tilde{C}$. Аналогично имеем $c^1 = [5000,7000]$, $b^2 = [7000,9000]$, где $5000 < 7000$, $7000 < 9000$, поэтому $c^1 \ngeq b^2$, откуда по теореме 1 $\tilde{C} \ngeq \tilde{B}$. С другой стороны, согласно условию (16), $\tilde{B} \neq \tilde{C}$. Таким образом, в соответствии с (18) полиинтервалы $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ не сравнимы.

Шаг 3. По результатам шагов 1, 2 получаем структурно-математическую модель решения задачи в виде частично ориентированного графа (рис.1). Вершины этого графа – полиинтервалы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, его дуги ориентированы в направлении от меньших вершин $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ к большей вершине $\tilde{A}$, а его ребро не ориентировано и соединяет несравнимые вершины(полиинтервалы) $\tilde{B}$, $\tilde{C}$.

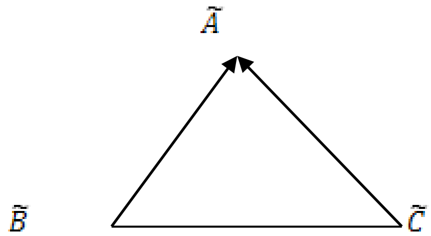

Рис. 1

Шаг 4. По структурной граф-модели (рис. 1) находим вершину, соответствующую максимальному полиинтервалу. Непосредственно из рис. 1 видно, что этой вершиной является $\tilde{A}$, т.к. соответствующий полиинтервал $\tilde{A}$ больше других полиинтервалов $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$. Обратим внимание, что оба полиинтервала, не являющиеся максимальными – $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ – не сравнимы между собой, но это не повлияло на решение задачи. Это решение – выбор работником, из трех предложивших ему работу фирм A, B, C, фирмы A, как предложившей максимальную зарплату.

3. Обсуждение

Как показано в статье, дальнейшее развитие известной операции сравнения интервалов неопределенности, с выделением максимального и минимального интервала [7], приводит к новой операции сравнения полиинтервалов, с выделением максимального и минимального полиинтервала. Таким образом, и для такой более сложной по сравнению с интервалом модели неопределенности, как полиинтервал, оказывается возможным сравнивать полиинтервалы и выбирать максимальный (минимальный) из них. Это открывает возможность решения задач оптимизации для неопределенных систем и процессов с полининтервальными параметрами. Полиинтервальная модель неопределенности является более сложной, чем интервальная. Она встречается достаточно часто в военном деле, экономике, технике, социальной сфере и др. областях и поэтому заслуживает изучения и разработки. Это изучение и разработку применительно к проблеме оптимизации естественно осуществлять, используя подходы интервальной математики к оптимизации [7] и развивая их в направлении учета многоинтервальности. И здесь выявляется важный факт: сравнение двух полиинтервалов, как показывает теорема 1, сводится к сравнению их крайних интервалов, благодаря этому сложность решения проблемы оптимизации систем с полиинтервальными параметрами такая же, как и для систем с интервальными параметрами. Это делает задачи оптимизации систем с полиинтервальными параметрами реально разрешимыми.

Заключение

В настоящей статье сформулирована задача дальнейшего изучения новой модели неопределенности – полиинтервала, обобщающей известную модель неопределенности – интервал – на случай области из нескольких последовательных интервалов неопределенности. С помощью известной из интервальной математики теоретико-множественной конструкции, вводящей операции над интервалами, в том числе, операции взятия максимума (минимума), аналогичным путем введена операция взятия максимума (минимума) двух полиинтервалов. Разработана методика сведения операции взятия максимума и минимума полиинтервалов к аналогичным операциям с интервалами. С ее помощью доказана основная теорема, сводящая сравнение двух полиинтервалов, с выделением максимального и минимального из них, к сравнению двух интервалов – крайнего левого интервала одного полиинтервала и крайнего правого интервала другого. На примере из области экономики показана практическая польза разработанной теории и методов.

Литература

1. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 176 с.

2. Левин В. И. Непрерывная логика. – Пенза: ПензГТА, 2008. – 496 с.

3. Горбань И. И. Феномен статистической устойчивости. – Киев: Наукова Думка, 2014. – 370 с.

4. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М: Мир, 1987. – 370 с.

5. Левин В. И. Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности. – Пенза: Изд-во Пензенского технологического ин-та, 1998. – 55 с.

6. Левин В. И. Полиинтервалы, их исчисление и применение // Системы управления, связи и безопасности. 2016. №3. С. 239-246. URL: http://sccs.intelgr.com/archive/2016-03/07-Levin.pdf (дата обращения 7.03.2017).

7. Левин В. И. Методы оптимизации систем в условиях интервальной неопределенности параметров // Информационные технологии. – 2012. – № 4. – С. 52–59.

8. Вощинин А. П., Сотиров Г. Р. Оптимизация в условиях неопределенности. М.: МЭИ, София: Техника, 1989. – 226 с.

References

1. Zadeh L. A. *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*. Moscow, Mir, 1976. 176 p. (in Russian).

2. Levin V. I. *Nepreryvnaya logika* [Continuous Logic]. Penza, PenzGTA, 2008. 496 p. (in Russian).

3. Gorban I. I. *Fenomen statisticheskoyj ustoyjchivosti* [Phenomena of Statistical Stability]. Kiev, Naukova Dumka, 2014. 370 p. (in Russian).

4. Alefeld G., Herzberger Ju. *Einführung in die Intervallrechnung* [Introduction to the Interval Computations]. Zürich, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1974, 398 p. (in German).

5. Levin V. I. *Intervalnaya matematika i issledovanie sistem v usloviyah neopredelennosti* [Interval Mathematics and Research of Systems in Condition of Uncertainty]. Penza, PenzGTA, 1998. 55 p. (in Russian).

6. Levin V. I. Polyintervals: Calculus and Applications. *Systems of Control, Communication and Security*, 2016, no. 3, pp. 239–246. Available at: http://sccs.intelgr.com/archive/2016-03/07-Levin.pdf (accessed 7 March 2017) (in Russian).

7. Levin V. I. Metody optimizacii sistem v usloviyah intervalnoy neopredelennosti parametrov [Methods of System Optimization with Interval Uncertainty]. *Informacionnye Tehnologii*, 2012, no. 4, pp. 52–59 (in Russian).

8. Voschinin A. P., Sotirov G. R. *Optimizaciya v usloviyah neopredelennosti* [Optimization in Conditions of Uncertainty]. Moscow, MEI, Sofiya, Tehnika, 1989. 226 p. (in Russian).

Информация об авторе

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Polyintervals in Problems of Optimization of Indeterminate Systems

Levin V. I.

Relevance. *In recent decades, in the civil and military spheres, new technologies associated with the study of uncertainty are increasingly encountered. These technologies are widely used in engineering, economics, social sphere. To support them, new mathematical models and methods are needed. In this regard, this article, devoted to the development of a new model of uncertainty (poly-interval) and mathematical methods for its study, as applied to solving optimization problems under uncertainty, is topical.* ***The purpose*** *of the article is to detailed development of a new mathematical model of uncertainty – a polyinterval, which is a sequence of a finite number of uncertainty intervals, in order to optimize various systems with polyinterval parameters.* ***Method.*** *To achieve this goal, it is proposed to extend the method of introducing operations on intervals in the form of a set-theoretic generalization of the corresponding operations over real numbers, known in interval mathematics, to the study of optimal operations over polyintervals.* ***The novelty*** *of the work lies in the proposed new mathematical model of the uncertainty of systems in the form of polyintervals, in conjunction with a mathematical apparatus that allows performing optimal operations on polyintervals and thereby making it possible to solve problems of optimizing systems with polyinterval parameters.* ***Result.*** *The article elaborates a new mathematical model of uncertainty – polyinterval. The optimal operations (max, min) over the polyintervals have been determined, and the rules for their implementation have been derived. Necessary and sufficient conditions for the existence of these operations are established, i.e. conditions for the comparability of polyintervals. An example of using the results obtained for making optimal decisions is given.*

Keywords: *polyintervals, comparison of polyintervals, maximal (minimal) polyinterval.*

Information about Author

Vitaly Ilyich Levin – the Doctor of Engineering Sciences, Professor, PhD, Full Professor. Honored worker of science of the Russian Federation. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economy, sociology, history; decision-making; optimization; automata theory; theory of reliability; history of science; problems of education. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: 440039, Russia, Penza, pr. Baydukova / Gagarin st., 1a/11.