УДК 62–50:519.7/8

Модели производной и их применение для описания неполностью определенных систем

Левин В.И.

Актуальность. *Рассматривается проблема адекватности классического дифференциального исчисления. Указаны разнообразные недостатки этого исчисления, мешающие его использованию при моделировании реальных систем и процессов в условиях неопределенности, а именно: невозможность использования понятия классической производной в случае неполностью определенных исходных функций; различная функциональная принадлежность классических производных различных порядков, несмотря на их сходную интерпретацию как скоростей различных порядков; несуществование производной в отдельных точках у функций, моделирующих реальные процессы движения, несмотря на очевидное существование скорости в любой из точек каждого такого процесса; отсутствие единообразной формулы для нахождения производных различных порядков, несмотря на одинаковую интерпретацию всех таких производных как скоростей различных порядков; несоответствие классической производной требованиям физичности в отношении размерности.* ***Цель статьи.*** *Решение проблемы обобщения классического дифференциального исчисления, позволяющего обойти все эти недостатки.* ***Метод.*** *В статье показано, что переход от классической производной, которая вводится для точно заданной функции, к интервальной производной, которая вводится для функции, задаваемой с точностью до интервала возможных значений, дает возможность устранить все указанные выше недостатки.* ***Новизна.*** *Введение понятия интервальной производной позволяет строить дифференциальное исчисление для неполностью определенных исходных функций. Оно также позволяет унифицировать функциональную принадлежность производных любых порядков. Далее, новое понятие производной обеспечивает существование производной для всех непрерывных интервальных функций.* ***Результат.*** *Разработанное дифференциальное исчисление содержит единую формулу для производных всех порядков и соответствует требованиям физичности в отношении размерности. Приведен алгоритм построения интервальных моделей динамических неполностью определенных систем при использовании производных интервального типа. Дан пример построения модели такой системы.*

Ключевые слова: *интервальная функция, интервальная производная, интервальное дифференциальное исчисление, адекватность понятия производной.*

Введение

Усилиями двух классиков естествознания – англичанина Исаака Ньютона и немца Готфрида Вильгельма Лейбница в XVII в. было открыто понятие производной функции и на его основе построено дифференциальное, а затем и интегральное исчисление [1]. Это открытие, позволившее формализованно изучать поведение самых разнообразных функций, имело колоссальное значение для последующего развития науки и расширения сферы ее приложений. С его помощью было получено огромное, не поддающееся точной оценке число новых научных результатов в самых разнообразных научных направлениях как в самой математике, так и во многих ее приложениях. Но время идет, подходы в науке меняются и, по нашему мнению, пришла пора разобраться, насколько модель производной Ньютона–Лейбница адекватна физической реальности и что надо сделать, чтобы эту адекватность улучшить. Решение проблемы позволит увеличить результативность исследований в различных областях науки и сделать их, с одной стороны, более глубокими и осмысленными, а с другой – открывающими путь для более точного математического моделирования реальных систем и процессов.

1. Постановка проблемы

Как хорошо известно, понятие производной в классическом дифференциальном исчислении Ньютона–Лейбница [1] базируется на понятии предельного перехода, т.е. неограниченного приближения переменной величины – функции к некоторой постоянной величине – пределу, в процессе которого разность между указанными величинами неограниченно приближается к нулю. Однако ясно, что такое предельное поведение возможно лишь в случае точно определенных функций и величин. На практике же при построении и исследовании математических моделей реальных систем и процессов различные их характеристики – функции и величины – всегда известны не полностью, а с некоторой ограниченной точностью (например, с точностью до интервалов возможных значений). В этих условиях никакого предельного перехода функции в смысле Ньютона–Лейбница не существует. Соответственно этому не существует ни классического понятия производной, ни классического дифференциального исчисления Ньютона–Лейбница. В связи со сказанным выше возникает, прежде всего, следующая базовая проблема: возможна ли переформулировка основных понятий классического дифференциального исчисления таким образом, чтобы они работали как в случаях, когда изучаемые функции и величины известны точно, так и в случаях, когда они известны с ограниченной точностью? Каким может быть это новое дифференциальное ичисление?

Другая серьезная проблема в рассматриваемой нами области заключается в следующем. Как известно [1], производная в классическом дифференциальном исчислении имеет смысл скорости, с которой эта функция изменяется в различных точках относительно своего аргумента. В соответствии с этим производные высших порядков приобретают смысл скоростей высших порядков, с которыми данная функция изменяется относительно своего аргумента. Например, производная второго порядка означает ускорение – скорость изменения скорости изменения нашей функции, т.е. скорость изменения функции второго порядка. Аналогично интерпретируются производные третьего и последующих порядков. Единообразная интерпретация производных различных порядков дает нам основание полагать, что производные всех порядков должны принадлежать одному и тому же классу функций. Однако на практике это условие в классическом дифференциальном исчислении не выполняется. Возникает естественный вопрос: означает ли эта разнородность производных различных порядков, что мы имеем дело с нормальным явлением, которое надо лишь правильно объяснить, или она свидетельствует о не вполне адекватной модели скорости изменения природных процессов, принятой в классическом дифференциальном исчислении, которую можно исправить, изменив модель и тем самым повысив точность моделирования различных систем и процессов? Какова эта новая модель?

Еще одна проблема связана с тем, что скорость изменения природных процессов – это характеристика реально существующих процессов, которая поэтому должна обязательно существовать. Таким образом, любая функция, моделирующая реально существующий процесс, обязательно должна иметь всюду производную, если только само понятие производной введено адекватно. Но для обычной производной в классическом дифференциальном исчислении указанное требование, как известно, выполняется не всегда. В связи с этим уместен следующий вопрос: может ли модель скорости изменения реальных природных процессов, принятая в классическом дифференциальном исчислении, считаться вполне адекватной, учитывая, что в ней не всегда выполняется указанное естественное требование – существование скорости процесса, или же ее нужно признать не вполне адекватной и заменить другой, более адекватной моделью, в которой данное требование строго выполняется, что позволяет повысить точность моделирования разнообразных систем и процессов? Какова эта новая модель?

Далее, поскольку в классическом дифференциальном исчислении Ньютона–Лейбница производная любого порядка имеет один и тот же смысл скорости соответствующего порядка, с которой некоторая функция изменяется относительно своего аргумента, имеется основание полагать, что производные всех порядков должны принадлежать одному и тому же классу функций (см. выше изложение второй проблемы). Из этого можно вывести, что должна существовать некоторая единая формула для производных всех порядков от любой заданной функции. Однако известно, что такой формулы в классическом дифференциальном исчислении нет. В связи с этим возникает следующий резонный вопрос: можно ли считать вполне адекватной модель скорости изменения природных процессов, принятую в классическом дифференциальном исчислении, при том, что в ней не выполняется естественное требование – существование единообразной формулы для скорости (производной) любого порядка? Или же ее надо признать не вполне адекватной и заменить другой, более адекватной моделью, где выполняется указанное требование, что позволяет повысить точность моделирования различных систем и процессов? Какова тогда эта новая модель?

Наконец, последняя проблема в изучаемой нами области состоит в следующем. Понятие производной в любом из исчислений, в которых производная имеет смысл скорости изменения функции относительно своего аргумента, должно отвечать условию физичности в отношении размерности. Это требование связано с тем, что скорость – понятие физическое. Оно проявляется в том, что если, например, функция выражает зависимость пути в метрах (м) от времени в секундах (сек), то 1-я производная от этой функции по ее аргументу, выражающая скорость рассматриваемого движения, должна иметь размерность м/сек, 2-я производная, выражающая ускорение этого движения, т.е. скорость 2-го порядка, – размерность м/сек^2 и т.д. Но в классическом дифференциальном исчислении это требование не всегда выполняется. Например, если зависимость пути в метрах s от времени в секундах t выражается функцией $s = e^t$, то скорость движения, выражаемая производной от s по t, имеет вид $s' = e^t$ и размерность, такую же, как s, т.е. м, а не м/сек, как должно быть по условию физичности. В связи с этим возникает следующий вопрос: можно ли модель скорости изменения реальных процессов, принятую в классическом дифференциальном исчислении, считать вполне адекватной, хотя в ней не выполняется обязательное требование физичности в отношении размерности производной, или ее надо признать не вполне адекватной и заменить другой, более адекватной моделью, в которой это требование выполняется, благодаря чему можно повысить точность моделирования различных систем и процессов? Какова может быть новая модель?

Эта модель производной, а также соответствующее ей дифференциальное исчисление, применимые для работы с функциями, заданными с ограниченной точностью, зависят от формы неопределенности, в которой задается функция. При стохастической неопределенности вводятся стохастическая производная и стохастическое дифференциальное исчисление (в частности, стохастические дифференциальные уравнения) [2]. Аналогично, в случае нечеткой неопределенности вводятся нечеткие производные, нечеткое дифференциальное исчисление, а также нечеткие дифференциальные уравнения [3–5] (обзор этой темы на русском языке см. в [6, 7]). Более простая и физичная версия всех этих понятий получается, если вместо нечетких функций использовать для введения неопределенности многозначные функции [8]. В настоящей работе проблема построения новой модели производной и соответствующего дифференциального исчисления рассматривается в предположении интервальной формы неопределенности функций, что позволяет получать необходимые результаты в еще более простой и ясной форме, используя хорошо разработанный аппарат интервальной математики [9]. Кроме того, при указанном подходе удается конструктивно решить поставленные выше проблемы, вызванные неопределенностью изучаемых функций.

2. Решение базовых проблем

Рассмотрим сначала первую из проблем, поставленных в п. 1, и укажем пути ее возможного решения.

Эта проблема, как уже указывалось, заключается в том, что при задании функций не точно, а с ограниченной точностью, понятие предела в смысле Ньютона–Лейбница, а вместе с ним и понятие производной перестают существовать. Возникает вопрос, можно ли распространить указанные понятия и на этот случай, чтобы получить возможность моделирования реальных процессов? Оказывается, что такое распространение возможно, если задавать функции с точностью до интервалов возможных значений, а в качестве математического аппарата использовать аппарат интервальной математики [9]. Следуя [10–12], используем понятие интервальной функции

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}), \tag{1}$$

где $\tilde{x} = [x_1, x_2]$ – интервальная независимая переменная, выраженная в виде замкнутого вещественного интервала, $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – интервальная зависимая переменная, также выраженная в виде замкнутого вещественного интервала, $\tilde{f}$ – однозначное отображение множества интервалов $\{\tilde{x}\}$ на множество интервалов $\{\tilde{y}\}$. Понятие предела интервальной функции (1) отличается от понятия предела обычной (точно заданной) функции. Пусть $\tilde{x}_0 = [x_{01}, x_{02}]$ – интервальная постоянная. Будем говорить, что интервальная независимая переменная $\tilde{x}$ в процессе своего изменения стремится к интервальному пределу $\tilde{x}_0$, если x_1 стремится к пределу x_{01}, а x_2 – к пределу x_{02}. Символически это определение записывается в виде

$$\{\lim(\tilde{x} = [x_1, x_2]) = (\tilde{x}_0 = [x_{01}, x_{02}])\} \Leftrightarrow \{\lim x_1 = x_{01}, \lim x_2 = x_{02}\}. \quad (2)$$

Аналогично имеет место определение предела интервальной зависимой переменной

$$\{\lim(\tilde{y} = [y_1, y_2]) = (\tilde{y}_0 = [y_{01}, y_{02}])\} \Leftrightarrow \{\lim y_1 = y_{01}, \lim y_2 = y_{02}\}. \quad (3)$$

Предел интервальной функции (1) теперь можем определить следующим образом. Пусть в процессе своего изменения интервальная независимая переменная $\tilde{x}$ стремится к интервальному пределу $\tilde{x}_0$, при этом интервальная зависимая переменная $\tilde{y}$ стремится к интервальному пределу $\tilde{y}_0$. Будем в этом случае говорить, что предел интервальной функции (1) при $\tilde{x}$, стремящемся к $\tilde{x}_0$, равен $\tilde{y}_0$, или символически

$$\lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \tilde{y} = \tilde{y}_0 \quad (4)$$

или, по-другому, с использованием обозначения функции (1),

$$\lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}_0. \quad (5)$$

Теперь, используя понятие предела интервальной функции, мы можем ввести понятие производной интервальной функции (1). Будем полагать эту функцию непрерывной, т.е. ее нижнюю и верхнюю границы непрерывными функциями нижней и верхней границ интервала $\tilde{x}$ – независимой переменной. Тогда фиксированному значению $\tilde{x}_0 = [x_{01}, x_{02}]$ независимой переменной будет соответствовать фиксированное значение функции $\tilde{y}_0 = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$. Определим приращения независимой и зависимой переменных нашей функции относительно их указанных фиксированных значений

$$\Delta\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}_0, \quad \Delta\tilde{y} = \tilde{y} - \tilde{y}_0 = \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}_0) \quad (6)$$

и составим отношение второго приращения к первому

$$\Delta\tilde{y} / \Delta\tilde{x} = (\tilde{y} - \tilde{y}_0)/(\tilde{x} - \tilde{x}_0) = (\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}_0))/(\tilde{x} - \tilde{x}_0). \quad (7)$$

Возьмем предел отношения (7) при стремлении независимой переменной $\tilde{x}$ к ее пределу $\tilde{x}_0$:

$$\lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \Delta\tilde{y} / \Delta\tilde{x}. \quad (8)$$

Предел (8), если он существует, назовем интервальной производной от интервальной функции (1) в точке $\tilde{x}_0$ и обозначим $\tilde{y}'_{\tilde{x}_0}$ или $\tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x})$. Итак,

$$\tilde{y}'_{\tilde{x}_0} = \tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \Delta\tilde{y} / \Delta\tilde{x}. \quad (9)$$

Доказано [10–12], что для существования в точке $\tilde{x}_0$ интервальной производной от интервальной непрерывной функции (1) необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки и в ней самой все значения независимой переменной $\tilde{x}$ функции являлись невырожденными интервалами (интервалами с несовпадающими верхней и нижней границами). Также доказано [10–12], что интервальная производная от непрерывной интервальной функции в произвольной точке $\tilde{x}$ может быть выражена в конечном виде через значения независимой переменной $\tilde{x}$ и зависимой переменной $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ этой функции в указанной точке следующим образом

$$\tilde{y}'_{\tilde{x}} \equiv \tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x}) = (\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}))/(\tilde{x} - \tilde{x}). \quad (10)$$

Отметим, что выражение (10) не нужно воспринимать как неопределенность вида $0/0$, поскольку у любой существующей в точке $\tilde{x}$ интервальной производной интервал $\tilde{x}$ невырожден и потому, в соответствии с формулами интервальной математики, знаменатель выражения (10) не равен нулю.

Формулы, приведенные в этом разделе наглядно демонстрируют, что предпринятая переформулировка базовых понятий классического дифференциального исчисления – предела и производной – с использованием интервальной математики открывает возможность работы с этими понятиями в новых условиях, когда изучаемые величины и функции известны не точно, а с ограниченной точностью (в данном случае – с точностью до интервалов возможных значений). При этом предел сохраняет смысл постоянной величины, к которой неограниченно приближается переменная величина, а производная – смысл скорости, с которой указанная функция изменяется относительно своего аргумента. Здесь все постоянные и переменные величины, а также функции от них, являются интервальными. Эти новые математические понятия открывают возможность для адекватного моделирования реальных процессов, известных с ограниченной точностью.

Рассмотрим теперь вторую из проблем, поставленных в п. 1. Эта проблема заключается в том, что, несмотря на единообразную интерпретацию в классическом дифференциальном исчислении Ньютона–Лейбница производных различных порядков как скоростей изменения функций различных порядков, в общем случае производные различных порядков не принадлежат одному и тому же классу функций. Является ли это положение нормальным, требующим лишь соответствующего объяснения, или же оно свидетельствует о некоторой неадекватности модели скорости изменения реальных процессов в классическом дифференциальном исчислении, которую, следовательно, необходимо исправить путем изменения модели? Обратимся к понятию интервальной производной, введенному выше. Она показывает скорость изменения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ относительно ее аргумента $\tilde{x}$. Запишем выражение интервальной производной (10) в виде

$$\tilde{y}' = \tilde{y}_{\Delta} / \tilde{x}_{\Delta}, \quad (11)$$

при следующих обозначениях:

$$\tilde{y}' = \tilde{y}'_{\tilde{x}} = \tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x}), \quad \tilde{y}_{\Delta} = \tilde{y} - \tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}), \quad \tilde{x}_{\Delta} = \tilde{x} - \tilde{x}. \quad (12)$$

Беря интервальную производную от интервальной производной функции

1-го порядка вида (11), можно получить интервальную производную функцию 2-го порядка в виде

$$\tilde{y}'' = (\tilde{y}_\Delta / \tilde{x}_\Delta)_\Delta / \tilde{x}_\Delta . \qquad (13)$$

Аналогично, беря интервальную производную от интервальной производной 2-го порядка (13), получим интервальную производную 3-го порядка

$$\tilde{y}''' = ((\tilde{y}_\Delta / \tilde{x}_\Delta)_\Delta / \tilde{x}_\Delta)_\Delta / \tilde{x}_\Delta \qquad (14)$$

и т.д. Выражение интервальной производной n-го порядка в общем виде имеет следующую форму

$$\tilde{y}^{(n)} = \underbrace{(...((}_{n-1\,\text{скобка}}\ \tilde{y}_\Delta / \tilde{x}_\Delta \underbrace{)_\Delta / \tilde{x}_\Delta)_\Delta / \tilde{x}_\Delta ...)}_{n-1\,\text{скобка}}{}_\Delta / \tilde{x}_\Delta . \qquad (15)$$

Формулы интервальных производных (13)–(15) развертываются аналогично (12), используя выражение оператора Δ, указанное в (12). Как хорошо видно из приведенных формул (11)–(15), интервальные производные любого n-го порядка принадлежат одному и тому же классу интервальных функций, получаемых из исходной функции (1) по одному и тому же алгоритму при помощи лишь двух операций – деления и вычитания. Таким образом, можно считать, что понятие производной в интервально-дифференциальном исчислении изначально соответствует требуемой в постановке проблемы, рассмотренной в п. 1, единообразной интерпретации производных различных порядков как скоростей различных порядков изменения функции. В то же время понятие производной в классическом дифференциальном исчислении не соответствует данной интерпретации, что свидетельствует о некоторой неадекватности модели скорости изменения реальных процессов, принятой в классическом дифференциальном исчислении. Так что переход от классического дифференциального исчисления к интервальному нужно рассматривать как некоторую корректировку модели производной в сторону ее большей адекватности процессам, происходящим в реальности, что способствует более точному моделированию указанных процессов с помощью интервально-дифференциального исчисления.

Третья из проблем, затронутых в п. 1, состоит в том, что скорость изменения любых природных процессов, как характеристика реально существующих процессов, должна обязательно существовать. В связи с этим производная любой функции, описывающей природный процесс, должна обязательно существовать, если модель производной адекватна понятию скорости. Но на практике классическая производная существует не для всякой функции, описывающей природный процесс. Означает ли это некоторую неадекватность классической модели производной и можно ли эту неадекватность исправить путем перехода к новой модели? К какой?

Обратимся к понятию интервальной производной, введенному выше в разделе 2. Было указано, что интервальная производная в любой точке непрерывной интервальной функции существует всегда, когда в данной точке и некоторой ее окрестности все значения независимой переменной этой функции являются невырожденными интервалами (т.е. интервалами с несовпадающими нижней и верхней границами). Таким образом, интервальная производная от интервальной функции существует практически всегда, в отличие от производной в классическом дифференциальном исчислении, которая во многих случаях не существует (например, в точках излома исходной функции). Снова видим, что переход от классической модели производной к интервальной можно считать корректировкой модели производной в сторону ее большей адекватности природным процессам, что дает возможность более точного моделирования этих процессов с помощью интервально-дифференциального исчисления.

Четвертая проблема, указанная в п. 1, состоит в том, что производная любого n-го порядка в классическом дифференциальном исчислении имеет смысл скорости изменения функции n-го порядка относительно своего аргумента (т.е. принципиально имеет один и тот же смысл – скорости изменения). Поэтому можно ожидать существования единой формулы для производных всех порядков от любой функции. Тем не менее, в классическом дифференциальном исчислении такой формулы нет. Означает ли это некоторую неадекватность классической модели производной? Можно ли каким-нибудь образом скорректировать эту неадекватность, перейдя к новой модели производной? Снова обратимся к понятию интервальной производной. Рассмотрим формулу (15). Она дает единое выражение интервальных производных всех порядков от любой интервальной функции и тем самым полностью решает проблему. Таким образом, опять видим, что переход от классической модели производной к интервальной позволяет сделать ее более адекватной изучаемым реальным природным процессам и тем самым более точно моделировать эти процессы с помощью интервально-дифференциального исчисления.

Пятая проблема, поставленная в п. 1, состоит, как уже было сказано, в том, классическая модель производной не всегда удовлетворяет условию физичности в отношении размерности. Проявляется это в том, что скорости различных процессов, полученные путем вычисления соответствующих производных, не всегда имеют ту размерность, которую они должны иметь по законам физики. В связи с этим возникает некоторое сомнение в адекватности классической модели производной как скорости изменения реальных процессов и мысль заменить ее другой, более адекватной моделью.

Обратимся к явным выражениям интервальных производных разных порядков – суперпозициям интервалов $\tilde{y}_\Delta, \tilde{x}_\Delta$, (11), (13), (14), (15). Из выражений (12) интервалов $\tilde{y}_\Delta$ и $\tilde{x}_\Delta$ видно, что интервал $\tilde{y}_\Delta$ имеет размерность исходной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$, от которой мы берем последовательные производные, а интервал $\tilde{x}_\Delta$ – размерность аргумента $\tilde{x}$ этой функции. Обозначим эти размерности соответственно $\text{разм}\,\tilde{y}$ и $\text{разм}\,\tilde{x}$. Теперь, после применения формул (11), (13), (14), (15), легко получается, что размерность последовательных интервальных производных функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ имеет вид

$$\begin{gathered}\text{разм}\,\tilde{y}' = \text{разм}\,\tilde{y} / \text{разм}\,\tilde{x}, \quad \text{разм}\,\tilde{y}'' = \text{разм}\,\tilde{y} / (\text{разм}\,\tilde{x})^2, \\ \text{разм}\,\tilde{y}''' = \text{разм}\,\tilde{y} / (\text{разм}\,\tilde{x})^3, \; \ldots, \quad \text{разм}\,\tilde{y}^{(n)} = \text{разм}\,\tilde{y} / (\text{разм}\,\tilde{x})^n.\end{gathered} \tag{16}$$

Именно такой должна быть, с точки зрения физики, размерность этих производных, если исходить из их физического смысла как скоростей различных порядков изменения природных процессов. Т.е. получаемые в соответствии с формулами (16) размерности интервальных производных различных порядков полностью решают проблему. Например, если некоторая функция $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ задает закон движения, в котором $\tilde{x}$ означает время в секундах, $\tilde{y}$ – пройденный путь в метрах, то 1-я производная $\tilde{y}'$, являясь скоростью движения, должна иметь размерность м/сек, вторая производная $\tilde{y}''$, являясь ускорением, – размерность м/сек^2 и т.д.

Снова видим, что переход от классической модели производной к интервальной делает модель более адекватной реальным процессам, позволяя тем самым более точно моделировать эти процессы с помощью математического аппарата интервально-дифференциального исчисления.

3. Алгоритм моделирования динамических неполностью определенных систем с использованием интервальных производных

Из представленных в п. 2 результатов вытекает следующий алгоритм построения математической модели динамической неполностью определенной системы.

Шаг 1. Берем уже имеющуюся (или строим заново) математическую модель динамической полностью определенной (детерминированной) системы, служащей прототипом динамической неполностью определенной (недетерминированной) системы, подлежащей моделированию (система-прототип получается из системы-оригинала путем детерминизации всех параметров системы, а система-оригинал получается из системы-прототипа путем их надлежащей раздетерминизации). Полагаем, что модель системы-прототипа имеет вид некоторого уравнения – алгебраического (если в нем есть только алгебраические операции), дифференциального (если в дополнение к алгебраическим операциям в нем есть классические производные) или разностного (если, в дополнение к алгебраическим операциям, в нем фигурируют разностные операторы).

Шаг 2. Математическую модель системы-прототипа, полученную на прошлом шаге, подвергаем раздетерминизации. Для этого мы заменяем все точно заданные параметры этой модели соответствующими интервальными параметрами, а все точно заданные операторы – соответствующими интервальными операторами (классическую производную – интервальной, обычный разностный оператор – интервальным). В результате получаем математическую модель системы-оригинала в символьной форме, где операторы (разностный и производной) представлены пока соответствующими символами, но интервальные параметры фигурируют уже в явном виде.

Шаг 3. Полученную на шаге 2 символьную математическую модель динамической неполностью определенной системы подвергаем необходимой десимволизации. Для этого заменяем все символы интервальных производных различных порядков соответствующими явными выражениями, применяя формулы (11), (13), (14), (15). С использованием аналогичных формул заменяем соответствующими явными выражениями все символы разностных операторов.

В результате получаем математическую модель динамической неполностью определенной системы в явной интервальной форме, т.е. в форме суперпозиции интервальных параметров этой системы.

Конец процедуры.

Созданная с помощью указанного алгоритма математическая модель динамической неполностью определенной системы более адекватно отражает функционирование этой системы, чем детерминированная модель, полученная с помощью классического дифференциального исчисления.

Пример (демография). Известно, что скорость прироста населения прямо пропорциональна количеству населения. Найти модель, описывающую зависимость количества населения A от времени t, если известно, что в некоторый начальный момент $t=0$ количество населения равнялось A_0, а через год оно увеличилось на $a\%$. Построить математическую модель роста числа населения в условиях интервальной неопределенности системы.

Шаг 1. Скорость изменения количества населения – 1-я производная от количества населения по времени, т.е. A'_t. Тогда по условию нашей задачи получаем дифференциальное уравнение – математическую модель роста количества населения $dA/dt = kA$ или, разделяя переменные,

$$dA/A = kdt.$$

Интегрируя почленно, находим

$$\ln A = \ln e^{kt+C_1},$$

что после потенцирования дает общее решение уравнения в виде

$$A = Ce^{kt}, \quad C = e^{C_1}.$$

Сначала найдем константу C. Подставляя в общее решение соответствующее количество населения и времени $A = A_0, t=0$, получим

$$A_0 = Ce^{k\cdot 0} = C\cdot 1 = C,$$

так что общее решение принимает вид $A = A_0 e^{kt}$.

Найдем константу k. По условиям задачи количество населения через год, т.е. при $t=1$, составит $A=((100+a)A_0)/100$. Подставляя эти значения в общее решение, получим

$$((100+a)A_0)/100 = A_0 e^k.$$

Откуда

$$e^k = (100+a)/100, \quad k = \ln((100+a)/100) = \ln\left(1+\frac{a}{100}\right),$$

так что имеем следующее решение дифференциального уравнения – модели роста количества населения

$$A = A_0((100+a)/100)^t.$$

Сама модель, представляющая основной интерес, приобретает окончательный вид дифференциального уравнения

$$dA/dt = \ln\left(1+\frac{a}{100}\right)A, \quad A|_{t=0} = A_0.$$

Шаг 2. Полученную на шаге 1 модель полностью определенной (детерминированной) демографической системы подвергаем раздетерминизации. Для этого точный параметр A мы заменяем интервальным параметром $\tilde{A}=[A_1, A_2]$, аналогично точные параметры A_0, t – соответствующими интервальными параметрами $\tilde{A}_0=[A_{01}, A_{02}], \tilde{t}=[t_1, t_2]$. Классическую производную dA/dt заменяем интервальной производной $d\tilde{A}/d\tilde{t}$. В итоге получаем математическую модель демографической системы в виде интервально-дифференциального уравнения, записанного в символьной форме

$$d\tilde{A}/d\tilde{t} = \ln\left(1+\frac{a}{100}\right)\tilde{A}, \quad \tilde{A}|_{\tilde{t}=[0,0]} = \tilde{A}_0.$$

Шаг 3. Полученную на шаге 2 символьную математическую модель демографической системы десимволизируем, заменяя символьное выражение интервальной производной соответствующим явным интервальным выражением (11). В результате получаем математическую модель демографической системы в явной интервальной форме

$$\frac{\tilde{A}-\tilde{A}}{\tilde{t}-\tilde{t}} = \ln\left(1+\frac{a}{100}\right)\tilde{A}, \quad \tilde{A}|_{\tilde{t}=[0,0]} = \tilde{A}_0.$$

4. Заключение

Классическая производная и основанное на ней классическое дифференциальное исчисление были созданы для исследования поведения точно определенных процессов. Однако в наше время большинство изучаемых процессов задаются неточно, так что их изучение с помощью классического дифференциального исчисления практически невозможно. Кроме того, оказывается, что классическое дифференциальное исчисление даже при изучении точно определенных процессов обнаруживает некоторые черты неадекватности по отношению к изучаемым процессам. Все это побуждает искать новые модели производных, пригодные для построения более адекватного дифференциального исчисления. Одной из них является интервальная производная, определяемая для функций, заданных с точностью до интервала возможных значений. Эта производная, предложенная автором ранее, детально изучена выше с целью установления ее адекватности реальным процессам. Наше изучение показало, что переход от классической производной к интервальной модели позволяет нам построить интервально-дифференциальное исчисление, которое более адекватно процессам, заданным неточно, и, таким образом, позволяет точнее моделировать такие процессы. Кроме того, переход дает возможность избавиться от некоторых проявлений неадекватности, свойственных классической производной, при изучении точно определенных процессов.

Литература

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Физматлит, 2005. – 650 с.

2. Леваков А. А. Стохастические дифференциальные уравнения. – Минск: БГУ, 2009. – 231 с.

3. Puri M. L., Ralescu D. A. Fuzzy Random Variables // Journal of Mathematical Application. – 1986. – № 4. – P. 409–422.

4. Friedman M., Ming M., Kandel A. Fuzzy Linear Systems // Fuzzy Sets and Systems. – 1988. – № 96. – P. 201–209.

5. Buckley J. J., Feuring J. Fuzzy Differential Equations // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – № 110. – P. 43–54.

6. Мочалов И. А., Хрисат М. С., Шихаб Еддин М. Я. Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. 1 // Информационные технологии. – 2015. Т. 21. – № 3. – С. 171–178.

7. Мочалов И. А., Хрисат М. С., Шихаб Еддин М. Я. Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. 2 // Информационные технологии. – 2015. Т. 21. – № 4. – С. 243–250.

8. Горбань И. И. Феномен статистической устойчивости. – Киев: Наукова Думка, 2014. – 370 с.

9. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

10. Левин В. И. Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления // Онтология проектирования. – 2013. – № 4. – С. 72–84.

11. Левин В. И. Интервально-дифференциальное исчисление и некоторые его применения // Информационные технологии. – 2014. – № 7. С. 3–10.

12. Левин В. И. Дифференциальное исчисление для интервально-определенных функций // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. – 2015. Т. 2. – № 2. – С. 8–25.

References

1. Fihtengolc G. M. *Kurs differencialnogo i integralnogo ischisleniya* [The Course of Differential and Integral Calculus]. Vol. 1. Moscow, Fizmatlit, 2005, 650 p. (in Russian).

2. Levakov A. A. *Stohasticheskie differencialnye uravneniya* [Stochastic Differential Equations]. Minsk, BGU Publishing, 2009, 231 p. (in Russian).

3. Puri M. L., Ralescu D. A. *Fuzzy Random Variable*, Journal of Mathematical Application, 1986, 4, pp. 409–422.

4. Friedman M., Ming M., Kandel A. *Fuzzy Linear Systems*, Fuzzy Sets and Systems, 1988, 96, pp. 201–209.

5. Buckley J. J., Feuring J. *Fuzzy Differential Equations* // Fuzzy Sets and Systems, 2000, 110, pp. 43–54.

6. Mochalov I. A., Hrisat M. S., Shihab Eddin M. Ya. *Nechetkie differencialnye uravneniya v zadachah upravleniya* [Fuzzy Differantial Equations in Problems of Control]. Part 1, Informacionnye tehnologii [Information Technologies], 2015, Vol. 21,

3, p. 171–178 (in Russian).

7. Mochalov I. A., Hrisat M. S., Shihab Eddin M. Ya. *Nechetkie differencialnye uravneniya v zadachah upravleniya* [Fuzzy Differantial Equations in Problems of Control]. Part 2, Informacionnye tehnologii [Information Technologies], 2015, Vol. 21, 4. pp. 243–250 (in Russian).

8. Gorban I. I. *Fenomen Statisticheskoy Ustoychivosti* [Phenomena of Statistical Stability]. Kiev, Naukova Dumka, 2014, 370 p. (in Russian).

9. Alefeld G., Herzberger Ju. *Einführung in die Intervallrechnung* [Introduction to the Interval Computations]. Zürich, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1974, 398 p. (in German).

10. Levin V. I. *Intervalnaya proizvodnaya i nachala nedeterministskogo differencialnogo ischislehiya* [Interval Derivative and Basis of Nondeterministic Differential Calculus], Ontologiya proektirovanija [Ontology of Design], 2013, 4, pp. 72–84 (in Russian).

11. Levin V. I. *Intervalno-differencialnoye ischislenie i nekotorye ego primeneniya* [Interval Differential Calculus and Some Its Applications], Informacionnye technologii [Information Technologies], 2014, 7, pp. 3–10 (in Russian).

12. Levin V. I. *Differencialnoye ischisleniye dlya intervalno-opredelennyh funkciy* [Differential Calculus for Interval-Determibed Functions], Evristicheskie algoritmy i raspredelennye vychisleniya [Heuristic Algorithms and Distributed Computations], 2015, Vol. 2, 2, pp. 8–25 (in Russian).

Информация об авторе

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Models of Derivative and Their Application to Description of Incompletely Defined Systems

V. I. Levin

Relevance. *The problem of the adequacy of the classic differential calculus is considered in this article. Disadvantages of this calculation that prevent use it for simulation of real systems and processes in the uncertainty are discussed: inability to use classic concept of the derivative in the event of an incomplete initial functions; different functional accessory of classical derivatives of various orders, despite similar interpretation as the speed of various orders; nonexistence of derivative in individual points of functions that simulate the real movement despite the existence of apparent rate at any point of each such process; the absence of a uniform formula for derivatives of various orders, despite a similar interpretation of all such derivatives as speeds of various orders; the inconsistency of derivative to physicality in relation to dimension.* ***The purpose.*** *In this regard, the solution of problem of possibility of generalizing the classical differential calculus to circumvent all these shortcomings is discussed.* ***Method.*** *It is shown how transition from classical derivative, which is introduced for exactly determined functions to interval derivative, which* *is incorporated to functions given up interval of possible values, allows to eliminate all the above drawbacks.* ***Novelty***. *Specifically, it is shown that introduction of the concept of interval derivative allows you to build differential calculus for not fully certain original functions. It also allows you to standardize functional accessory derivatives of any order. Moreover, it provides existence of derivative of continuous interval functions.* ***Result.*** *Also, new calculus contains a single formula for derivatives of all orders and corresponds to the requirement of physicality in relation of dimension. Algorithm of construction interval models of dynamic incomplete defined systems using interval derivatives is given. An example of building of such model is presented.*

Keywords: *interval, interval function, function calculus, interval derivative, interval computing, nondeterministic differential calculus.*

Information about Author

Vitaly Ilyich Levin – the Doctor of Engineering Sciences, Professor, PhD, Full Professor. Honored worker of science of the Russian Federation. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economy, sociology, history; decision-making; optimization; automata theory; theory of reliability; history of science; problems of education. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: 440039, Russia, Penza, pr. Baydukova / Gagarin st., 1a/11.