УДК 62–50; 519.7; 519.8

Раздетерминизация – новый подход к исследованию функций с неопределенностью в особых точках

Левин В. И.

Актуальность. *При моделировании организационно-технических систем в ряде случаев возникают сложности в исследовании функционирования таких систем, в случае если они формализованы на основе аналитико-детерминированных функций. В работе предложен новый метод – раздетерминизация, предназначенный для решения проблемы вычисления детерминированных функций, имеющих так называемые особые точки, в которых у функции не существует определенного значения.* ***Цель статьи.*** *Целью является разработка подхода, позволяющего осуществлять деление на нуль и тем самым исключать особые точки функций.* ***Метод.*** *Предложенный метод заключается в переходе от проблематичной, с точки зрения вычисления, детерминированной функции к соответствующей недетерминированной, а именно, интервальной функции, путем замены детерминированных параметров функции соответствующими интервальными параметрами. Благодаря этой замене значения функции в особых точках становятся интервальными и вполне определенными значениями. Последнее и позволяет решить проблему вычисления функции.* ***Новизна.*** *Решение этой проблемы достигается легализацией деления на нуль путем интервализации вычислений. При этом используется принцип вырезания окрестности нуля из интервала, являющегося делителем интервальной дроби, представляющей исследуемую функцию.* ***Результат.*** *Путем вырезания интервальной функции выведены рабочие формулы, основанные на основных положениях интервальной математики и позволяющие легко вычислять значения этой функции. Предложенный в статье подход к решению проблемы вычисления функций с особыми точками имеет важное значение для всех тех классов прикладных систем, в которых эта проблема реально существует. Речь здесь идет о тех системах, функции-характеристики которых имеют некоторое число особых точек. Подобные системы встречаются чаще всего в телеметрии, теории и практике надежности, гуманитарной сфере и ряде др. областей. Особенности этих областей в том, что в них не всегда применимы классические методы детерминистской математики. Это побуждает искать новые подходы к решению возникающих здесь задач.*

Ключевые слова: *интервал, интервальная функция, интервальные вычисления, раздетерминизация, деление на нуль.*

Введение

Появление в XX веке разнообразных сложных систем (системы управления экономикой, ракетно-космические системы, атомная энергетика и др.) выдвинуло новые сложные задачи по их изучению. Современная наука и практика обработки информации уже вполне успешно справляется с задачами исследования различных сложных систем с полностью определенными (детерминированными) параметрами. Эти задачи обычно формулируются как задачи расчета, анализа и синтеза тех или иных функций с детерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками изучаемых систем. Но на практике часто встречаются другие системы – системы с неточно известными, т.е. неполностью определенными (недетерминированными) параметрами. Причины появления таких систем заключаются в естественной неопределенности, свойственной многим реальным процессам, происходящим в системах; в неточном задании параметров большинства систем из-за неизбежных погрешностей при их вычислении или измерении; в изменении во времени параметров систем; в необходимости или целесообразности совместного исследования целых семейств однотипных систем, имеющих одинаковые функции-характеристики и различающихся лишь значениями параметров этих функций. Учет неопределенности систем особенно важен при их проектировании, поскольку полная определенность в работе системы появляется лишь на последних этапах ее создания.

Исследование введенных неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками данных систем. Все эти задачи значительно сложнее их вышеупомянутых детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с детерминированными параметрами. Это усложнение связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел сложнее алгебры детерминированных чисел. В связи с этим для решения указанных задач приходится применять тот или иной специализированный математический аппарат: теорию вероятностей [1], теорию нечетких множеств [2], интервальную математику [3], многозначные функции [4].

Применение этого математического аппарата позволяет строить и изучать более адекватные математические модели сложных систем с недетерминированными параметрами, учитывающие неопределенность поведения таких систем [5–13].

Однако на практике встречаются еще более трудные для изучения классы сложных систем, в которых даже математические модели с детерминированными параметрами приводят к задачам, не имеющим определенного решения. Таковы, например, сложные системы, изучение которых сводится к решению системы линейных уравнений, определитель которой в некоторых случаях может быть равен нулю. Именно для подобных систем раздетерминизация, т.е. переход к соответствующей недетерминированной системе позволяет получить необходимое решение. Так, для сложных систем, изучение которых сводится к решению системы линейных уравнений (с возможно нулевым определителем), определитель после раздетерминизации становится численно равным интервалу, включающему, кроме нуля, также ненулевые значения, что открывает возможность получения решения.

В настоящей статье рассматриваются задачи изучения именно таких классов сложных систем. В качестве раздетерминизации используется процедура перехода от системы с детерминированными параметрами к системе с недетерминированными – интервальными параметрами. В качестве математического аппарата используется интервальная математика, точнее – интервальная алгебра. Раздетерминизация является процедурой, обратной по отношению к детерминизации, широко используемой в работах автора по изучению поведения неопределенных систем [14–19].

1. Постановка задачи

Предположим, что имеется некоторая практическая задача, сводящаяся с математической точки зрения к изучению (расчету и анализу поведения) некоторой детерминированной функции одной независимой переменной – характеристики изучаемой системы

$$y = f(x), \tag{1}$$

однозначно отображающей заданное множество $X = \{x\}$ независимых переменных x в заданное множество $Y = \{y\}$ зависимых переменных y, в соответствии с законом f, который и называется функцией. Хорошо известно, что задача расчета (вычисления значений) функции (1) принципиально всегда решается с помощью адекватного этой задаче математического аппарата алгебры вещественных чисел, с использованием подходящих методов вычислений, а задача анализа поведения функции (1) – с помощью адекватного ей математического аппарата классического дифференциального исчисления.

Рассмотрим далее распространенную ситуацию, когда изучаемая функция (1) имеет вид дроби

$$f(x) = f_1(x)/f_2(x), \tag{2}$$

с числителем – функцией $f_1(x)$ и знаменателем – функцией $f_2(x)$. В этой ситуации расчет и анализ поведения функции (1) затрудняется, поскольку в каждой точке с нулевым знаменателем эта функция не существует (если в этой точке числитель не равен нулю) либо принимает бесконечное множество значений, т.е. не имеет определенного значения (если в этой точке числитель равен нулю). Очевидно, что для функций с указанными точками (их естественно называть особыми) должны быть разработаны специальные методы расчета и анализа поведения функций, позволяющие исключить эффект влияния таких особых точек. Задача настоящей работы состоит в построении двух систематических процедур, связанных с изучением поведения детерминированных функций вида (2). А именно:

1) процедура расчета (т.е. вычисления значений) детерминированной функции типа (2), содержащей особые точки;
2) процедура анализа поведения такой же детерминированной функции.

2. Обзор литературы

Ниже мы будем изучать поведение детерминированных функций типа (2), содержащих особые точки, имея в виду преодоление трудности, связанной с наличием таких точек, путем раздетерминизации, т.е. перехода от функции (2) к соответствующей недетерминированной функции (функции с недетерминированными, точнее – с интервальными параметрами). В связи с этим представляет интерес обзор литературы посвященной изучению различных неопределенных объектов.

Проблема изучения объектов, характеризуемых той или иной неопределенностью, впервые возникла в начале Второй мировой войны, в связи с необходимостью управления огнем зенитной артиллерии, в условиях случайного движения воздушных целей. Соответствующими задачами занимались выдающиеся математики-вероятностники Н. Винер [5] и А.Н. Колмогоров [6] и их многочисленные последователи. Однако широкое развитие исследований по изучению гражданских объектов, работающих в условиях неопределенности, началось только в конце 1950-х – начале 1960-х гг., в рамках математической статистики и ее новых направлений – обработка данных и планирование экспериментов [7, 8].

Исследования, выполненные в 1970-е–80-е годы, привели к более широкому пониманию неопределенности, включившей в себя теперь не только случайность, но и незнание, неединственность возможных исходов, неопределенность целей, многокритериальность при решении задач оптимизации. В связи с этим появились новые подходы к описанию неопределенности: теория нечетких множеств, принцип недоопределенной модели, принятие решений в многокритериальных задачах [2, 9, 10].

С 1980-х годов начал интенсивно применяться подход к описанию неопределенности, базирующийся на интервальной математике, позволяющей получать оценки характеристик неопределенных систем с гарантированной точностью [11–18]. При этом указанный подход применялся сначала в метрологии для определения интервального значения известной функции при интервальных значениях аргументов. Затем его развитие пошло по двум направлениям. За рубежом этот подход развивался как средство автоматического учета ошибок округления при численном решении задач на компьютерах, в то время как в СССР и России ученые развивали его с целью нахождения области возможных значений результата вычислений с учетом структуры данных и функций, заданных в символьном виде.

Наконец, с 1990-х годов начала изучаться очень важная в практических приложениях задача исследования поведения произвольной недетерминированной функции с интервальными параметрами, являющейся аналогом хорошо известной задачи математического анализа – исследования поведения детерминированной функции средствами дифференциального исчисления [20].

3. Используемые методы

Изложим сначала основную идею предлагаемого метода. Рассмотрим детерминированную функции вида дроби (2), с возможными особыми точками, т.е. точками, в которых знаменатель функции (2) равен нулю. В таких точках, как уже говорилось в п. 1, функция (2) либо не существует, либо не имеет определенного значения. Мы предлагаем метод, позволяющий придать функции (2) одно определенное значение во всех ее точках, включая и особые, тем самым исключается влияние особых точек на характер поведения функции.

Предлагаемый метод состоит в переходе от детерминированной функции (2) к соответствующей недетерминированной – интервальной функции

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) / \tilde{f}_2(x) \tag{3}$$

путем замены всех точно заданных параметров исходной функции соответствующими интервальными параметрами. Эту процедуру естественно назвать *раздетерминизацией*. В результате раздетерминизации все точные значения числителя $y_1 = f_1(x)$ и знаменателя $y_2 = f_2(x)$ исходной функции $f(x)$ переходят в соответствующие интервальные значения $\tilde{y}_1 = \tilde{f}_1(x), \tilde{y}_2 = \tilde{f}_2(x)$, где $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ – интервалы $\tilde{y}_1 = [y_{11}, y_{12}]$, $\tilde{y}_2 = [y_{21}, y_{22}]$, а все точные значения самой исходной функции $y = f(x)$ – в соответствующие интервальные значения этой функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, где $\tilde{y} = [y_1, y_2]$. При этом все особые точки исходной функции после раздетерминизации можно исключить из рассмотрения. Действительно, в каждой такой точке знаменатель $f_2(x)$ исходной функции равен нулю, но раздетерминизируемый знаменатель $\tilde{f}_2(x)$ в этой точке равен уже не нулю, а интервалу, содержащему нуль. Деление на такой интервал в интервальной математике не рассматривается и предполагается невозможным [3]. Однако это ошибочная точка зрения, поскольку, если вырезать из интервала малый подынтервал, содержащий нуль, то оставшаяся, большая часть интервала уже не будет содержать нуля и деление на такой интервал по методологии интервальной математики окажется вполне возможным. Таким образом, использование метода раздетерминизации исходной детерминированной функции(2) в сочетании с вырезанием нуля из интервала возможных значений раздетерминизируемого знаменателя этой функции позволяет ликвидировать все особые точки исходной функции (2) и применить к изучению поведения этой функции обычные методы изучения поведения интервальной функции [3, 11, 14, 19, 20].

Разумеется, предлагаемый нами метод изучения поведения детерминированной функции, содержащей особые точки, является приближенным, поскольку при вырезании интервала, содержащего нуль, отбрасывается часть возможных значений подфункции – знаменателя изучаемой функции. Однако погрешность такого приближения может быть сделана как угодно малой путем уменьшения ширины вырезаемого интервала.

Опишем теперь метод раздетерминизации подробнее. Как известно из интервальной математики [3], любая операция над интервалами определяется как теоретико-множественное обобщение соответствующей операции над точными вещественными числами. Т.е. если a, b – точные вещественные числа, $\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ – интервалы, $\bullet$ – операция над точными вещественными числами, а $\circ$ – соответствующая операция над интервалами, то по определению получаем

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} \equiv [a_1, a_2] \circ [b_1, b_2] \equiv \{a \cdot b | a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}. \tag{4}$$

Также получаем формулу для операции деления двух интервалов

$$\tilde{a}/\tilde{b} \equiv [a_1, a_2]/[b_1, b_2] \equiv \{a/b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\},\ 0 \notin \tilde{b}. \qquad (5)$$

Дополнительное требование относительно нуля в этой формуле связано с невозможностью деления вещественного числа на нуль. Учитывая, что операция деления вещественных чисел обратна операции умножения, формулу (5) можно переписать в терминах операции умножения

$$\tilde{a}/\tilde{b} \equiv [a_1, a_2]/[b_1, b_2] \equiv [a_1, a_2]\cdot[1/b_1, 1/b_2],\ 0 \notin \tilde{b}. \qquad (6)$$

А операция умножения интервалов, как известно из [3], выполняется по формуле такого вида

$$\tilde{c}\cdot\tilde{d} \equiv [c_1, c_2]\cdot[d_1, d_2] = [\min_{i,j}(c_i \cdot d_j), \max_{i,j}(c_i \cdot d_j)]. \qquad (7)$$

Соединяя формулы (6), (7), получаем окончательную формулу для операции деления двух интервалов

$$\tilde{a}/\tilde{b} \equiv [a_1, a_2]/[b_1, b_2] = [\min_{i,j}(a_i/b_j), \max_{i,j}(a_i/b_j)],\ 0 \notin \tilde{b}. \qquad (8)$$

Эта формула, однако, пригодна для выполнения операции деления двух интервалов только в тех случаях, когда интервал-делитель $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ не содержит нуля. А что делать, если он содержит нуль? Интервальная математика не отвечает на этот вопрос [3].

Мы предлагаем следующий ответ на него. Будем считать, что интервал-делитель содержит нуль внутри себя (а не на одном из концов). Вырежем из интервала-делителя $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ в формуле (8) деления двух интервалов некоторый достаточно малый подынтервал $\tilde{b}^* = [b'_1, b'_2]$, содержащий нуль, тем самым заменив интервал $\tilde{b}$ биинтервалом

$$\tilde{b}''' = \tilde{b}/\tilde{b}^* = \tilde{b}' \cup \tilde{b}'', \qquad (9)$$

где $\tilde{b}' = [b_1, b'_1]$, $\tilde{b}'' = [b'_2, b_2]$ (см. рис. 1).

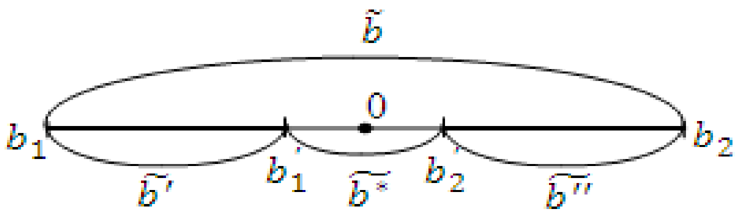

Рис. 1.

Произведенную выше операцию естественно назвать операцией вырезания подынтервала из указанного интервала. Объективный смысл этой операции – это приближение исходного интервала $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ биинтервалом (объединением двух непересекающихся интервалов) вида $\tilde{b}' \cup \tilde{b}''$, выражающимся по формуле (9), таким образом, чтобы полученный биинтервал не содержал неприемлемого для нас множества точек. В данном случае это множество точек – интервал $\tilde{b}^* = [b_1', b_2']$, содержащий нуль. Таким образом, если мы хотим разделить интервал $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на интервал $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, содержащий нуль, надо заменить в общей формуле деления (5) интервал $\tilde{b}$ биинтервалом $\tilde{b}'''$ вида (9), не содержащим нуль. Явный вид этой формулы найдем, используя общий принцип теоретико-множественного обобщения операций над точными вещественными числами (4). Имеем

$$\tilde{a}/\tilde{b} \approx \tilde{a}/(\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = \tilde{a}/(\tilde{b}'/\tilde{b}'') = \{a/b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}' \cup \tilde{b}''\} = \{(a/b') \cup (a/b'') \mid a \in \tilde{a},$$
$$b' \in \tilde{b}', b'' \in \tilde{b}''\} = \{a/b' \mid a \in \tilde{a}, b' \in \tilde{b}'\} \cup \{a/b'' \mid a \in \tilde{a}, b'' \in \tilde{b}''\} = (\tilde{a}/\tilde{b}') \cup (\tilde{a}/\tilde{b}'').$$

Итак, деление интервала $\tilde{a}$ на интервал $\tilde{b}$, содержащий нуль, можно выполнить по приближенной формуле

$$\tilde{a}/\tilde{b} = (\tilde{a}/\tilde{b}') \cup (\tilde{a}/\tilde{b}''), \tag{10}$$

где $\tilde{b}'$ и $\tilde{b}''$ – подынтервалы интервала $\tilde{b}$, не содержащие нуля, объединение которых приближенно равно $\tilde{b}$ (рис. 1). Поскольку $\tilde{b}'$ и $\tilde{b}''$ не содержат нуля, обе скобки в правой части (10) можно вычислять по формуле (8). В развернутом виде формула (10) переписывается как

$$[a_1, a_2]/[b_1, b_2] \equiv [a_1, a_2]/[b_1, b_1'] \cup [a_1, a_2]/[b_2', b_2]. \tag{11}$$

4. Рабочие формулы деления интервала на интервал, содержащий нуль

Общую формулу (10) деления на интервал, содержащий нуль, или эквивалентную ей формулу (11) можно значительно упростить и конкретизировать, рассмотрев возможные типы области делимого $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ (рис. 2). В процессе упрощения используем соотношения для делителя $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ (рис. 1)

$$\underbrace{b_1 < b_1'}_{<0} < \underbrace{b_2' < b_2'}_{>0}. \tag{12}$$

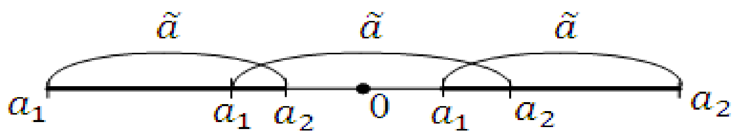

Рис. 2.

Случай 1:

$$\tilde{a} = [a_1, a_2] \geq 0. \tag{13}$$

В этом случае, вычисляя скобки в правой части формулы (10) по формуле (8), найдем формулу деления интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на интервал $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, содержащий нуль, в виде биинтервала

$$\tilde{a}/\tilde{b} = [\underbrace{a_2/b_1', a_1/b_1}_{<0}] \cup [\underbrace{a_1/b_2, a_2/b_2'}_{>0}], \text{ при } \tilde{a} = [a_1, a_2] \geq 0. \tag{14}$$

Случай 2:

$$\tilde{a} = [a_1, a_2] \le 0. \qquad (15)$$

Здесь, вычисляя аналогично предыдущему скобки в правой части формулы (10) по формуле (8), получим формулу деления интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на интервал $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, содержащий нуль, в виде биинтервала

$$\tilde{a} / \tilde{b} = [\underbrace{a_1 / b_2', a_2 / b_2}_{<0}] \cup [\underbrace{a_2 / b_1, a_1 / b_1'}_{>0}], \text{ при } \tilde{a} = [a_1, a_2] \le 0. \qquad (16)$$

Случай 3:

$$\tilde{a} = [a_1, a_2] \text{ такой, что } a_1 < 0 < a_2. \qquad (17)$$

В этом случае, вычисляя аналогично предыдущему скобки в правой части (10) по формуле (8), получим формулу деления интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на интервал $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, содержащий нуль, сначала в виде объединения 4 интервалов

$$\tilde{a} / \tilde{b} = (\tilde{a} / \tilde{b}') \cup (\tilde{a} / \tilde{b}'') = [a_1, a_2] / [b_1, b_1'] \cup [a_1, a_2] / [b_2', b_2] = [a_1, 0] / [b_1, b_1'] \cup$$

$$\cup [0, a_2] / [b_1, b_1'] \cup [a_1, 0] / [b_2', b_2] \cup [0, a_2] / [b_2', b_2] = \underline{[0, a_1 / b_1']} \cup \underline{\underline{[a_2 / b_1', 0]}} \cup \underline{[a_1 / b_2', 0]} \cup \underline{\underline{[0, a_2 / b_2']}},$$

далее, после объединения одинаково подчеркнутых интервалов, в виде объединения 2 интервалов

$$\tilde{a} / \tilde{b} = [\underbrace{a_1 / b_2'}_{<0}, \underbrace{a_1 / b_1'}_{>0}] \cup [\underbrace{a_2 / b_1'}_{<0}, \underbrace{a_2 / b_2'}_{>0}],$$

и, наконец, используя операции непрерывной логики

$$\wedge = \min, \ \vee = \max, \qquad (18)$$

в виде одного интервала

$$\tilde{a} / \tilde{b} = [a_1 / b_2' \wedge a_2 / b_1', a_1 / b_1' \vee a_2 / b_2']. \qquad (19)$$

5. Случай деления интервалов, симметричных относительно нуля

Особый практический интерес представляет один подслучай случая 3, когда оба интервала – делимое $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и делитель $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ – расположены симметрично относительно нуля, в соответствии с чем естественно и вырезаемый из интервала $\tilde{b}$ подынтервал $\tilde{b}^* = [b_1', b_2']$ сделать симметричным относительно нуля. Тогда условия симметричности интервалов относительно нуля

$$a_2 = -a_1, \ b_2 = -b_1, \ b_2' = -b_1'. \qquad (20)$$

Подставляя соотношения (20) в формулу (19), найдем

$$\tilde{a} / \tilde{b} = [a_1, a_2] / ([b_1, b_1'] \cup [b_2', b_2]) = [\underbrace{(-a_2 / b_2') \wedge (a_2 / -b_2')}_{<0}, \underbrace{(-a_2 / -b_2') \vee (a_2 / b_2')}_{>0}].$$

Окончательно

$$\tilde{a} / \tilde{b} = [a_1, a_2] / ([b_1, b_1'] \cup [b_2', b_2]) = [-a_2 / b_2', a_2 / b_2')]. \qquad (21)$$

Как видно из (21), деление интервальных чисел, симметричных относительно нуля, дает интервальное число, симметричное относительно нуля.

Интерпретацию формулы (21) легко дать, учитывая, что a_2 – это полуширина интервала делимого $\tilde{a}=[a_1,a_2]$, а b'_2 – полуширина интервала – выреза $\tilde{b}^*=[b'_1,b'_2]$ в интервале-делителе $\tilde{b}=[b_1,b_2]$, обеспечивающего отсутствие в этом интервале нуля и тем самым – возможность деления интервала $\tilde{a}$ на интервал $\tilde{b}$. Таким образом, смысл формулы (21) таков: частное от деления интервала $\tilde{a}$ на интервал $\tilde{b}$, содержащий нуль (в случае, если эти интервалы симметричны относительно нуля, как и вырез в интервале $\tilde{b}$, обеспечивающий отсутствие в нем нуля), равно интервалу (также симметричному относительно нуля), левая граница которого равна частному от деления ширины интервала-делимого $\tilde{a}$ на ширину интервала-выреза $\tilde{b}^*$, взятому со знаком минус, а правая граница – этому же частному, взятому со знаком плюс.

Формуле (21) можно придать более ясную форму, в которой числитель и знаменатель вычисляемой интервальной дроби представлены в явном виде. Для этого обозначим ширину интервала-делимого $\tilde{a}$ через a, ширину интервала-делителя $\tilde{b}$ через b, ширину интервала-выреза $\tilde{b}^*$ через b^*. Далее, обозначим через β долю ширины выреза b^* от ширины b всего интервала, в котором этот вырез производится $(0<\beta<1)$ (коэффициент вырезания). Тогда величины в правой части (21) выражаются в виде

$$a_2=a/2,\ b'_2=b^*/2=\beta b/2,$$

и формула (21) принимает искомую форму

$$\tilde{a}/\tilde{b}=[-0{,}5a,\ 0{,}5a]/[-0{,}5b,\ 0{,}5b]=[-a/\beta b,\ a/\beta b]. \tag{22}$$

Коэффициент β в формуле (22) должен выбираться достаточно близким к нулю, поскольку чем он ближе к нулю, тем точность приближенной формулы (22) выше.

Пример 1. Вычислить дробь $[-2{,}2]/[-5{,}5]$, полученную делением двух интервальных чисел, симметричных относительно нуля. Примем коэффициент вырезания $\beta=0{,}1$. Далее, учтем, что в нашем случае ширина интервала-делимого равна $a=2-(-2)=4$, а ширина интервала-делителя $b=5-(-5)=10$, тогда по формуле (22) получим

$$[-2{,}2]/[-5/5]=[-4/(0{,}1\cdot 10),4/(0{,}1\cdot 10)]=[-4/4].$$

Как и следовало ожидать, результатом деления оказалось также интервальное число, симметричное относительно нуля.

6. Случай деления интервала на интервал с нулем на конце

В п. 3, 4, 5 мы рассмотрели случай, когда интервал-делитель содержит нуль внутри себя. В случае, когда нуль находится на одном из концов интервала-делителя, формулы деления интервалов изменяются. Это связано с тем, что в этом случае интервал-делитель $\tilde{b}=[b_1,b_2]$ приобретает одну из двух конкретных форм, отличных от ранее рассмотренной формы, указанной на рис. 1, и эти две формы таковы

$$1)\ \tilde{b} = [0,b] \text{ или } 2)\ \tilde{b} = [b,0]. \tag{23}$$

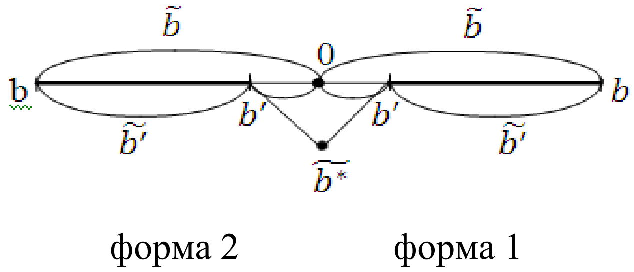

Рис. 3.

Они показаны на рис. 3. Последующий вывод рабочих формул деления интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ на интервал $\tilde{b}$ проведем отдельно для каждого возможного сочетания типа интервала $\tilde{a}$ и типа интервала $\tilde{b}$.

Исходная приближенная формула для выполнения операции деления интервала $\tilde{a}$ на интервал $\tilde{b}$ такова

$$\tilde{a}/\tilde{b} = \tilde{a}/(\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*). \tag{24}$$

Формула (24) имеет для рассматриваемого здесь случая тот же смысл, что и формула (10) для случая нахождения нуля внутри интервала-делителя. Вывод рабочих формул деления начнем со случая формы 1 интервала-делителя $\tilde{b}$ (см. рис. 3). В этом случае скобка в формуле (24) равна

$$(\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = [0,b] \setminus [0,b'] = [b,b'], \text{ где } 0 < b' < b. \tag{25}$$

Как видно из (25), интервал-делитель в правой части формулы (24) не содержит нуля. Поэтому деление в этой формуле можно выполнять по формуле (8). Получение соответствующих рабочих формул проведем отдельно для возможных трех типов интервала-делимого $\tilde{a} = [a_1, a_2]$.

1) $\tilde{a} = [a_1, a_2] \ge 0$. Тога по формуле (8) получаем из формулы (24) следующую рабочую формулу

$$\tilde{a}/\tilde{b} = \tilde{a}/(\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = [a_1, a_2]/[b', b] = [a_1/b, a_2/b'] = [a_1/b, a_2/\beta b], \tag{26}$$

где $\beta = b'/b$ – коэффициент ширины выреза b' в интервале-делителе $\tilde{b}$;

2) $\tilde{a} = [a_1, a_2] \le 0$. Тогда по формуле (8) получаем из формулы (24) такую рабочую формулу

$$\tilde{a}/\tilde{b} = \tilde{a}/(\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = [a_1, a_2]/[b', b] = [a_1/b', a_2/b] = [a_1/\beta b, a_2/b], \tag{27}$$

где β – тот же коэффициент.

3) $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ такой, что $a_1 < 0 < a_2$. Тогда из формулы (24) по формуле (8) получаем следующую рабочую формулу

$$\tilde{a}/\tilde{b} = \tilde{a}/(\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = [a_1, a_2]/[b', b] = [a_1/b', a_2/b'] = [a_1/\beta b, a_2/\beta b], \tag{28}$$

где β – тот же коэффициент.

Теперь проделаем ту же процедуру для случая формы 2 интервала-делителя $\tilde{b}$ (см. рис. 3).

В этом случае скобка в формуле (24) равна

$$(\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = [b, 0] \setminus [b', 0] = [b, b'], \text{ где } b < b' < 0. \qquad (29)$$

Как видно из (29), интервал-делитель в правой части формулы (24) и в этом случае не содержит нуля. Поэтому деление и здесь можно выполнять по формуле (8). Как и в случае формы 1 интервала-делителя $\tilde{b}$, рассматриваем возможные три типа интервала-делимого $\tilde{a} = [a_1, a_2]$.

1) $\tilde{a} = [a_1, a_2] \geq 0$. По формуле (8) из формулы (24) получаем следующую рабочую формулу

$$\tilde{a} / \tilde{b} = \tilde{a} / (\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = [a_1, a_2] / [b, b'] = [a_2 / b', a_1 / b] = [a_2 / \beta b, a_1 / b], \qquad (30)$$

где $\beta = b'/b$ – коэффициент ширины выреза b' в интервале-делителе $\tilde{b}$;

2) $\tilde{a} = [a_1, a_2] \leq 0$. По формуле (8) из (24) получаем такую рабочую формулу

$$\tilde{a} / \tilde{b} = \tilde{a} / (\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = [a_1, a_2] / [b, b'] = [a_2 / b, a_1 / b'] = [a_2 / b, a_1 / \beta b], \qquad (31)$$

где β – тот же коэффициент:

3) $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ такой, что $a_1 < 0 < a_2$. По формуле (8) получаем из (24) такую рабочую формулу

$$\tilde{a} / \tilde{b} = \tilde{a} / (\tilde{b} \setminus \tilde{b}^*) = [a_1, a_2] / [b, b'] = [a_2 / b', a_1 / b'] = [a_2 / \beta b, a_1 / \beta b], \qquad (32)$$

где β – тот же коэффициент.

Сравнение рабочих формул деления интервалов (26) с (30), (27) с (31) и (28) с (32) показывает, что эти двойственные формулы (в них интервал-делимое $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ одного и того же типа, а интервал-делитель $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ противоположного типа) различаются лишь тем, что выражение для нижней границы результата деления в одной формуле является выражением для верхней границы результата деления в другой формуле и наоборот.

7. Алгоритм решения поставленных задач

Обратимся к двум задачам, поставленным в п. 1. Будем решать эти задачи в условиях, когда обычные методы математического анализа, основанные на понятии предельного перехода в особую точку, не работают, ввиду отсутствия предела, так что получить решение невозможно даже для простейших особых точек – вида $0/0$. Поэтому для получения решения используем здесь принципиально иной подход, основанный на интервальной раздетерминизации, т.е. переходе от исходной детерминированной функции к соответствующей недетерминированной – интервальной путем замены детерминированных параметров исходной функции соответствующими интервальными параметрами. В полученной таким образом интервальной функции особым точкам вида $0/0$ и $a/0$ $(a \neq 0)$ исходной детерминированной функции соответствуют особые интервальные точки вида $\tilde{0}/\tilde{0}$ и $\tilde{a}/\tilde{0}$ ($\tilde{0}$ – интервал, содержащий 0, $\tilde{a}$ – интервал, не содержащий 0). После этого для решения задачи расчета функции следует вычислить значения функции во всех ее интервальных неособых точках, используя общеизвестные методы вычисления интервальных функций [3], и во всех интервальных особых точках, используя изложенные выше специальные методы вычислений. После этого совокупность проведенных вычислений с помощью предложенных ранее методов анализа [20] позволит выполнить анализ поведения имеющейся функции. Из всех указанных процедур новыми являются только процедуры вычисления интервальных функций в интервальных особых точках с помощью специальных методов вычислений, изложенных выше в пп.4, 5, 6. Поэтому ниже мы ограничимся демонстрацией выполнения только этих процедур при решении прикладных задач.

Пример 2. Найти решение следующей детерминированной системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}\right\}. \qquad (33)$$

Сразу видно, что в заданной детерминированной постановке система уравнений (33) не имеет решений, поскольку при равенстве левых частей обоих уравнений их правые части различны, так что эти уравнения противоречивы. О том же говорит и алгебра: определитель системы (33)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 3\cdot 4 = 0,$$

т.е. равен нулю, а производные от него определители D_1, D_2, полученные заменой 1-го и 2-го столбцов столбцом свободных членов,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 6\cdot 4 = -4, \; D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 3\cdot 5 = 3,$$

не равны 0, так что система (33) несовместна, т.е. не имеет решений. Однако система (33) вполне реалистична и может, например, представлять собой результат повторных измерений одного и того же объекта, т.е. процесс последовательного накопления информации в некотором реальном объекте. Поэтому система уравнений (33) может иметь реальное решение, если постановку задачи изменить, приблизив ее к реальности. Этим изменением может быть более близкая к реальности совокупность недетерминированных (интервальных) коэффициентов уравнений, например, такая: вместо $3 \to [2,4]$, вместо $4 \to [3,5]$, вместо $5 \to [4,6]$, вместо $6 \to [5,7]$. Тогда система (33) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} [2,4]\tilde{x}_1 + [3,5]\tilde{x}_2 &= [4,6] \\ [2,4]\tilde{x}_1 + [3,5]\tilde{x}_2 &= [5,7] \end{aligned}\right\}. \qquad (34)$$

Под решением интервальной линейной системы уравнений (34) будем понимать интервальную версию выражений Крамера для решения этой системы (33), т.е.

$$\tilde{x}_1 = \left(\begin{vmatrix} [4,6] & [3,5] \\ [5,7] & [3,5] \end{vmatrix}\right) \Big/ \left(\begin{vmatrix} [2,4] & [3,5] \\ [2,4] & [3,5] \end{vmatrix}\right),$$

$$\tilde{x}_2 = \left(\begin{vmatrix} [2,4] & [4,6] \\ [2,4] & [5,7] \end{vmatrix}\right) \Big/ \left(\begin{vmatrix} [2,4] & [3,5] \\ [2,4] & [3,5] \end{vmatrix}\right). \qquad (35)$$

С использованием общих методов вычисления интервальной функции [3] вычисляем определители в правых частях (35)

$$\begin{vmatrix} [2,4] & [3,5] \\ [2,4] & [3,5] \end{vmatrix} = [2,4]\cdot[3,5]-[2,4]\cdot[3,5]=[2\cdot 3,4\cdot 5]-[2\cdot 3,4\cdot 5]=$$
$$=[6,20]-[6,20]=[-14,14];$$
$$\begin{vmatrix} [4,6] & [3,5] \\ [5,7] & [3,5] \end{vmatrix} = [4,6]\cdot[3,5]-[5,7]\cdot[3,5]=[4\cdot 3,6\cdot 5]-[5\cdot 3,7\cdot 5]=$$
$$=[12,30]-[15,35]=[-23,15];$$
$$\begin{vmatrix} [2,4] & [4,6] \\ [2,4] & [5,7] \end{vmatrix} = [2,4]\cdot[5,7]-[2,4]\cdot[4,6]=[2\cdot 5,4\cdot 7]-[2\cdot 4,4\cdot 6]=$$
$$=[10,28]-[8,24]=[-14,20].$$

Подставляя вычисленные определители в выражения (35) для $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, используя формулу (19) для деления интервалов, содержащих нуль, и учитывая, что в выражении для $\tilde{x}_1$ у делимого $a_1=-23$, $a_2=15$, в выражении для $\tilde{x}_2$ у делимого $a_1=-14$, $a_2=20$ и в обоих выражениях ширина делителя имеет значение $b_2-b_1=14-(-14)=28$, принимая ширину выреза нуля в 10% от ширины делителя и симметрично относительно нуля, т.е. $b_2'-b_1'=\beta(b_2-b_1)=0{,}1\cdot 28=2{,}8$, так что $b_1'=-1{,}4$, а $b_2'=1{,}4$, находим значения $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$:

$$\tilde{x}_1=[-23{,}15]/[-14{,}14]=[(-23/1{,}4)\wedge(15/-1{,}4),(-23/-1{,}4)\vee(15/1{,}4)]=$$
$$=[-16{,}4;16{,}4];$$
$$\tilde{x}_2=[-14{,}20]/[-14{,}14]=[(-14/1{,}4)\wedge(20/-1{,}4),(-14/-1{,}4)\vee(20/1{,}4)]=$$
$$=[-14{,}3;14{,}3]. \qquad (36)$$

Мы видим, что система линейных уравнений, которая в детерминированном варианте (33) не имела решения, после интервальной раздетерминизации приобретает форму (34), которая уже имеет решение (36).

8. Обсуждение

Выше мы убедились в том, что предложенная процедура раздетерминизации, т.е. переход от модели детерминированной системы к модели недетерминированной интервальной системы придает изучаемой системе новое важное свойство: в точках, в которых знаменатель функции-характеристики прежней системы обращался в нуль (особые точки), из-за чего характеристика в этих точках не существовала, знаменатель функции-характеристики новой системы равен интервалу, включающему кроме нуля, бесконечное множество ненулевых значений, что делает возможным существование характеристики системы и в особых точках. Благодаря этому свойству предложенная очень простая процедура раздетерминизации, заключающаяся в замене детерминированных параметров характеристики изучаемой системы соответствующими интервальными параметрами позволяет изучать исчерпывающим образом системы, характеристики которых в базовой детерминированной модели не везде существуют. Примерами таких систем могут служить разнообразные неклассические информационные системы, используемые в телеметрии, надежности, гуманитарной сфере и т.д. Их особенность заключается в том, что они не могут быть описаны средствами классической детерминированной математики. Поэтому для их адекватного описания нужно либо придумать новый, адекватный проблеме математический аппарат, либо придумать новую математическую модель системы, поддающуюся адекватному описанию средствами какого-нибудь известного математического аппарата. Примером первого подхода может служить предложенный для описания гуманитарных систем аппарат нечетких множеств [2]. Примером второго подхода служит предложенный в этой статье раздетерминизационный подход.

9. Заключение

В работе предложен метод раздетерминизации для решения проблемы вычисления детерминированных функций, имеющих так называемые особые точки, в которых определенного значения у функции не существует. Предложенный метод состоит в переходе от проблемной детерминированной функции к соответствующей недетерминированной (интервальной) функции путем замены детерминированных параметров функции соответствующими интервальными параметрами. Благодаря этому значения функции в особых точках становятся вполне определенными интервальными значениями, что и позволяет решить проблему. Решение проблемы достигается легализацией деления на нуль путем интервализации вычислений. Предложенный подход к решению проблемы вычисления функций с особыми точками имеет важное значение для некоторых классов прикладных систем, в которых эта проблема существует. Такие системы встречаются в телеметрии, надежности, гуманитарной сфере и некоторых других областях, в которых не всегда применимы классические методы детерминистской математики. Это и заставляет искать новые подходы к решению возникающих здесь задач.

Литература

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 2004. 350 с.

2. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.

3. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.

4. Горбань И. И. Феномен статистической устойчивости. Киев: Наукова Думка, 2014. 370 с.

5. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. – New-York: Technology Press and Wiley, 1949. 180 p.

6. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия АН СССР. Серия: математика. 1941. № 5. С. 3–14.

7. Канторович Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. № 5. С. 3–14.

8. Налимов В. В., Чернова Н. А. Теория эксперимента. М.: Наука, 1971. 320 с.

9. Нариньяни А. С. Недоопределенность в системе представления и обработки знаний // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1986. № 5. С. 3–28.

10. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach // Artificial Intelligence. 1992. Vol. 58. P. 19.

11. Вощинин А. П., Сотиров Г. Р. Оптимизация в условиях неопределенности. М.: МЭИ София: Техника, 1989. 226 с.

12. Вощинин А. П., Бочков А. Ф., Сотиров Г. Р. Интервальный анализ данных // Заводская лаборатория. 1990. № 7. С. 76–81.

13. Куржанский А. Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 75–89.

14. Левин В. И. Дискретная оптимизация в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 77. С. 97–106.

15. Левин В. И. Булево линейное программирование с интервальными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 1994 № 7. С. 111–122.

16. Левин В. И. Интервальное дискретное программирование // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 6. С. 92–103.

17. Левин В. И. Нелинейная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 2. С. 138–146.

18. Левин В. И. Методы оптимизации систем в условиях интервальной неопределенности параметров // Информационные технологии. 2012. № 4. С. 52–59.

19. Левин В. И. Методология оптимизации в условиях неопределенности методом детерминизации // Информационные технологии. 2014. № 5. С. 14–21.

20. Левин В.И. Анализ поведения неточно заданных функций с помощью интервально-дифференциального исчисления // Информационные технологии. 2015. Т. 21. № 3. С. 163–170.

References

1. Gnedenko B. V. *Kurs teorii veroiatnostei* [Probability theory]. Moscow, Nauka Publ., 2004. 350 p. (in Russian).

2. Zadeh L. A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. *Information Sciences*, 1975, no. 8, pp. 199–249, 301–357; no. 9, pp. 43–80.

3. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to Interval Computation*. New-York, Academic Press, 1983. 352 p.

4. Gorban I. I. *Fenomen statisticheskoi ustoichivosti* [The phenomenon of statistical stability]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 2014. 370 p. (in Russian).

5. Wiener N. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. New-York, Technology Press and Wiley, 1949. 180 p.

6. Kolmogorov A. N. Interpolirovanie i ekstrapolirovanie statsionarnykh sluchainykh posledovatel'nostei [Interpolation and extrapolation of stationary random sequences]. *Mathematics of the USSR - Izvestiya*, 1941, no. 5,. pp. 3–14.

7. Kantorovich L. V. O nekotorykh novykh podkhodakh k vychislitel'nym metodam i obrabotke nabliudenii [Some new approaches to computational methods and treatment of observations]. *Siberian Mathematical Journal*, 1962, vol. 3, no. 5,. pp. 3–14 (in Russian).

8. Nalimov V. V., Chernova N. A. Teoriia eksperimenta [The theory of the experiment]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 320 p. (in Russian).

9. Narin'iani A. S. Nedoopredelennost' v sisteme predstavleniia i obrabotki znanii [Nudepreteens in the system of representation and processing of knowledge]. *Izvestiia AN SSSR. Tekhnicheskaia kibernetika*. 1986. № 5. pp. 3–28 (in Russian).

10. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach. *Artificial Intelligence*, 1992, vol. 58, p. 19.

11. Voshchinin A. P., Sotirov G. R. *Optimizatsiia v usloviiakh neopredelennosti* [Optimization under uncertainty]. Moscow, MEI Publ., 1989, 224 p (in Russian).

12. Voshchinin A. P., Bochkov A. F., Sotirov G. R. Interval'nyi analiz dannykh [Interval data analysis]. *Zavodskaia laboratoriia*, 1990, no. 7, pp. 76–81 (in Russian).

13. Kurzhanskii A. B. Identification Problem – Theory of Guaranteed Estimates. *Automation and Remote Control*, 1991, vol. 52, no. 4, part 1, pp. 447–465.

14. Levin V. I. Discrete Optimization under Interval Uncertainty. *Automation and Remote Control*, 1992, vol. 53, no. 7. P. 1039–1047.

15. Levin V. I. Boolean Linear Programming with Interval Coefficients. *Automation and Remote Control*, 1994, vol. 55, no. 7. pp. 1019–1028.

16. Levin V. I. Interval Discrete Programming. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1994, vol. 30, no. 6, pp. 866–874.

17. Levin V. I. Nonlinear Optimization under Interval Uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1999, vol. 35, no. 2, pp. 297–306.

18 Levin V. I. Metody optimizatsii sistem v usloviiakh interval'noi neopredelennosti parametrov [Systems Optimization Methods in Conditions of Interval Uncertainty of Parameters]. *Information Technologies*, 2012, no. 4, pp. 52-59 (in Russian).

19. Levin V. I. Metodologiia optimizatsii v usloviiakh neopredelennosti metodom determinizatsii [The Methodology of Optimization in Condition of Uncertainty by Determination Method]. *Information Technologies*, 2013, no. 5, pp. 13-21 (in Russian).

20. Levin V. I. The Analysis of Inexactly Specified Functions by Interval-differential Calculus. *Information Technologies*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 163–170 (in Russian).

Статья поступила 19 июля 2016 г.

Информация об авторе

Левин Виталий Ильич – доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor. Заслуженный деятель науки РФ. Пензенский государственный технологический университет. Область научных интересов: логика; математическое моделирование в технике, экономике, социологии, истории; принятие решений; оптимизация; теория автоматов; теория надежности; распознавание; история науки; проблемы образования. E-mail: vilevin@mail.ru

Адрес: 440039, Россия, г. Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1а/11.

Dedetermination as New Approach to Analysis of Functions with Uncertainty in Singular Points

V. I. Levin

Relevance. *In this paper we propose the dedetermination as new method designed to solving a problem of calculation of deterministic functions with the so-called singular points where the function does not take a certain value.* ***Purpose.*** *The aim is to develop an approach that allows for division by zero and thus exclude singular points of functions.* ***Method.*** *The proposed method is to move from problematic (from point of view of calculating) determined function to the corresponding not determined (interval) function by replacing determined function parameters by corresponding interval parameters. Due to this change the values of the function at the singular points will be well-defined interval and values. The latter allows you to solve the problem of calculating the function.* ***Novelty.*** *The solution to this problem is achieved by legalization division by zero by intervalization of calculations. It uses the principle of cutting out a neighborhood of zero in the interval being the denominator of the fraction representing studied function.* ***Result.*** *For the simplified by cutting out interval function the effective formulas are derived based on the main provisions of interval mathematics and make it easy to calculate the value of this function. The proposed in the article approach to the problem of calculating functions with singular points is important for all those classes of systems in which the problem really exists. It is about the systems which functions have any number of specific points. Such systems are found mostly in telemetry, reliability theory and practice, humanitarian and many others areas. The features of these areas is that they do not always apply the classical methods of deterministic mathematics. This leads to search for new approaches to solving problems that arise here.*

Keywords: *interval, interval function, interval calculation, dedetermination, division by zero.*

Information about Author

Vitaly Ilich Levin – Doctor of Technical Sciences, Full Professor. Honoured Scientist of Russia. Penza State Technological University. Field of Research: logic; mathematical modeling in technics, economics, sociology, history; decision making, optimization, recognition, automata theory, reliability theory, history of science, problems of education. E-mail: vilevin@mail.ru

Address: Russia, 440039, Penza, pr. Baydukova / Gagarin st., 1a/11.